M2 - Référentiels non galiléens

Table des matières

Introduction **1**

I. Changements de référentiels en mécanique classique **2**
1. Rappels de première année 2
2. Cadre de l'étude 3
3. Référentiel en translation par rapport à un autre référentiel 3
4. Référentiel en rotation uniforme autour d'un axe fixe par rapport à un autre référentiel . . . 3

II. Dynamique en référentiel non galiléen **4**
1. Référentiel en translation accélérée 4
2. Référentiel en rotation uniforme autour d'un axe fixe 5
3. Caractère galiléen des référentiels usuels de la mécanique 6
4. Quelques manifestations du caractère non galiléen du référentiel terrestre 8

Introduction

Pourquoi ressent-on une force qui nous « pousse » vers la portière lorsqu'une voiture prend un virage ?
Comprendre ce phénomène peut se faire en adoptant le point de vue d'un **référentiel non galiléen**.

I. Changements de référentiels en mécanique classique

1. Rappels de première année

. Référentiel Galiléen et non Galiléen

En physique, un **référentiel** est un solide (ou un système d'axes) associé à une horloge, par rapport auquel on étudie la position, la trajectoire et le mouvement d'un objet.

Un référentiel est dit **galiléen** si et seulement si le mouvement d'un corps isolé ou pseudo-isolé dans celui-ci est rectiligne uniforme (**principe d'inertie** énoncé par Galilée). Ainsi, tout référentiel en translation rectiligne uniforme par rapport à un référentiel galiléen est aussi galiléen.

Cependant, le référentiel dans lequel il est naturel d'étudier un mouvement n'est pas toujours dans cette situation : l'objectif de ce chapitre est alors de comprendre comment les lois de la dynamique newtonienne sont modifiées lorsqu'elles sont écrites dans un référentiel **non Galiléen**.

. Mouvement de translation

Soient deux référentiels $\mathscr{R}$ et $\mathscr{R}'$ munis des systèmes d'axes $(O, \vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$ et $(O', \vec{u}_{x'}, \vec{u}_{y'}, \vec{u}_{z'})$. Par définition, $\mathscr{R}'$ **est en translation par rapport à** $\mathscr{R}$ si, du point de vue d'un observateur lié à $\mathscr{R}$, **les axes de** $\mathscr{R}'$ **conservent la même direction et le même sens au cours du temps**.

On peut, sans perte de généralité, choisir les axes de $\mathscr{R}'$ parallèles à ceux de $\mathscr{R}$. Le mouvement de $\mathscr{R}'$ par rapport à $\mathscr{R}$ est alors entièrement décrit par celui de son origine O' dans $\mathscr{R}$.

Si le mouvement de O' est rectiligne dans $\mathscr{R}$, on parle de **translation rectiligne**. Si le mouvement de O' est circulaire dans $\mathscr{R}$, on parle de **translation circulaire**. De manière générale, si O' décrit une courbe quelconque, on parle de **translation curviligne**.

. Mouvement de rotation autour d'un axe fixe

Le référentiel $\mathscr{R}'$ est en **rotation autour d'un axe fixe de** $\mathscr{R}$ si tout point fixe de $\mathscr{R}'$ situé hors de cet axe décrit un cercle centré sur l'axe.

En choisissant les axes (Oz) et $(O'z')$ confondus, le mouvement est décrit par l'angle $\theta(t)$ entre $\vec{u}_x$ et $\vec{u}_{x'}$.

Le **vecteur rotation** du référentiel $\mathscr{R}'$ autour du référentiel $\mathscr{R}$ est défini par :

$$\boxed{\vec{\omega}_{\mathscr{R}'/\mathscr{R}} = \omega\, \vec{u}_z = \dot{\theta}\, \vec{u}_z}$$

La rotation est dite **uniforme** si ω est constante.

Application n°1 : Translation ou rotation ?

Énoncé :

Les deux images ci-dessous représentent les positions successives d'un repère lié à un référentiel $\mathscr{R}'$, observées depuis un référentiel $\mathscr{R}$.

On suppose que le référentiel $\mathscr{R}'$ est attaché à une cabine quelconque sur l'image A et à une monture quelconque sur l'image B.

Figure A



Figure B



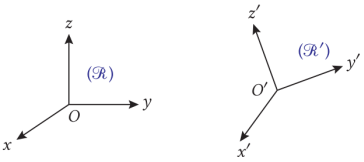
Identifier l'image correspondant à une **translation circulaire** et celle correspondant à une **rotation**. Justifier en décrivant l'évolution de l'orientation des axes de $\mathscr{R}'$ par rapport à $\mathscr{R}$.

2. Cadre de l'étude

Dans tout ce chapitre, nous chercherons à décrire le mouvement d'un point matériel M de masse m dans différents référentiels représentés sur la figure ci-contre :

— le référentiel fixe $\mathscr{R}$, auquel on associe le repère cartésien $(Oxyz)$;

— le référentiel mobile $\mathscr{R}'$, auquel on associe le repère cartésien $(O'x'y'z')$.



On se place dans le cadre de la mécanique classique dans laquelle le temps est supposé identique dans les deux référentiels.

3. Référentiel en translation par rapport à un autre référentiel ⋆

. Composition des vitesses ; vitesse d'entraînement

Application n°2 : Chute de neige observée depuis une voiture

Énoncé :

Le passager d'une voiture observe que la neige tombe en formant un angle $\alpha = 80°$ avec la verticale lorsque la voiture roule horizontalement à $v_e = 110\,\mathrm{km\,h^{-1}}$. Lorsque la voiture s'arrête au feu, il constate que la neige tombe verticalement.

Calculer la vitesse de la neige par rapport au sol, puis par rapport à la voiture en mouvement.

. Composition des accélérations ; accélération d'entraînement

4. Référentiel en rotation uniforme autour d'un axe fixe par rapport à un autre référentiel ⋆

. Formule de Varignon

. Application à la composition des vitesses

. Application à la composition des accélérations

. Expression simplifiée de l'accélération d'entraînement

II. Dynamique en référentiel non galiléen

1. Référentiel en translation accélérée

On considère un référentiel $\mathscr{R}'$, d'origine O', en **translation accélérée** par rapport à un référentiel galiléen $\mathscr{R}$. On étudie le mouvement d'un point matériel M de masse m constante, soumis à une résultante des forces extérieures $\overrightarrow{F}$.

. Force d'inertie d'entraînement et PFD

L'accélération d'entraînement est identique en tout point à un instant donné. La composition des accélérations donne :

$$\overrightarrow{a}_{M/\mathscr{R}} = \overrightarrow{a}_{M/\mathscr{R}'} + \overrightarrow{a}_{\text{e}}.$$

En l'introduisant dans le PFD écrit dans $\mathscr{R}$, on obtient :

$$m\left(\overrightarrow{a}_{M/\mathscr{R}'} + \overrightarrow{a}_{\text{e}}\right) = \overrightarrow{F}.$$

Dans le référentiel $\mathscr{R}'$, le PFD s'écrit donc :

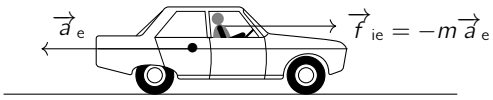
$$\boxed{m\overrightarrow{a}_{M/\mathscr{R}'} = \overrightarrow{F} + \overrightarrow{f}_{\text{ie}}} \qquad \text{avec} \qquad \boxed{\overrightarrow{f}_{\text{ie}} = -m\overrightarrow{a}_{\text{e}}.}$$

La **force d'inertie d'entraînement** est opposée à l'accélération du référentiel. **La force d'inertie de Coriolis est nulle dans tout référentiel en translation.**

Remarque : Les forces d'inertie dépendent du référentiel choisi et ne traduisent pas une interaction avec un autre système : on les appelle « pseudo-forces ». Elles se manipulent néanmoins comme les forces usuelles dans les lois de la dynamique.

. Exemple : freinage d'un véhicule

Un véhicule roule sur une route horizontale rectiligne puis freine. Le référentiel lié à l'habitacle est en translation accélérée par rapport au sol, supposé galiléen : son accélération est opposée à sa vitesse.
Dans l'habitacle, la force d'inertie d'entraînement est donc dirigée **vers l'avant**. Pour maintenir le passager immobile dans ce référentiel, la résultante horizontale des forces de contact, notamment celle exercée par la ceinture, doit la compenser.



. Autres lois de la dynamique

Les grandeurs cinématiques et les travaux ci-dessous sont évalués dans $\mathscr{R}'$.

Théorème du moment cinétique : pour un point A fixe de $\mathscr{R}'$,

$$\boxed{\left(\frac{d\overrightarrow{L}_A}{dt}\right)_{/\mathscr{R}'} = \overrightarrow{\mathcal{M}}_A(\overrightarrow{F}) + \overrightarrow{\mathcal{M}}_A(\overrightarrow{f}_{\text{ie}})} \qquad \overrightarrow{L}_A = \overrightarrow{AM} \wedge m\overrightarrow{v}_{M/\mathscr{R}'}.$$

Théorème de l'énergie cinétique :

$$\boxed{\Delta\mathcal{E}_{c_{/\mathscr{R}'}} = W_{/\mathscr{R}'}(\overrightarrow{F}) + W_{/\mathscr{R}'}(\overrightarrow{f}_{\text{ie}})} \qquad \mathcal{E}_{c_{/\mathscr{R}'}} = \frac{1}{2}m\left\|\overrightarrow{v}_{M/\mathscr{R}'}\right\|^2.$$

2. Référentiel en rotation uniforme autour d'un axe fixe

On considère un référentiel $\mathscr{R}'$ en **rotation uniforme** autour de l'axe (Oz), fixe dans le référentiel galiléen $\mathscr{R}$. On note :

$$\vec{\omega}_{\mathscr{R}'/\mathscr{R}} = \omega \vec{u}_z, \qquad \omega = \text{constante}.$$

On choisit une origine commune O sur l'axe et on note H le projeté orthogonal de M sur cet axe. La distance à l'axe est $r = HM$.

. Forces d'inertie et PFD

La composition des accélérations s'écrit :

$$\vec{a}_{M/\mathscr{R}} = \vec{a}_{M/\mathscr{R}'} + \vec{a}_e + \vec{a}_c,$$

avec, dans le cas étudié :

$$\vec{a}_e = -\omega^2 \overrightarrow{HM}, \qquad \vec{a}_c = 2\vec{\omega}_{\mathscr{R}'/\mathscr{R}} \wedge \vec{v}_{M/\mathscr{R}'}.$$

En reportant dans le PFD écrit dans $\mathscr{R}$, on obtient :

$$\boxed{m\vec{a}_{M/\mathscr{R}'} = \vec{F} + \vec{f}_{ie} + \vec{f}_{ic}.}$$

On introduit :

— la **force d'inertie d'entraînement**, aussi appelé **force centrifuge** :

$$\boxed{\vec{f}_{ie} = -m\vec{a}_e = m\omega^2 \overrightarrow{HM} = m\omega^2 r \vec{u}_r;}$$

— la **force d'inertie de Coriolis** :

$$\boxed{\vec{f}_{ic} = -m\vec{a}_c = -2m\vec{\omega}_{\mathscr{R}'/\mathscr{R}} \wedge \vec{v}_{M/\mathscr{R}'}.}$$

Remarques :

— La force d'inertie de Coriolis dépend de la **vitesse relative** du point M et de la rotation du référentiel. Elle est nulle si M est immobile dans $\mathscr{R}'$, ou si sa vitesse relative est parallèle à l'axe.

— Elle est toujours orthogonale à la vitesse relative. Sa puissance est donc nulle dans $\mathscr{R}'$:

$$\mathcal{P}_{/\mathscr{R}'}(\vec{f}_{ic}) = \vec{f}_{ic} \cdot \vec{v}_{M/\mathscr{R}'} = 0.$$

La force de Coriolis ne travaille pas dans le référentiel tournant. Elle peut dévier le mouvement, mais ne contribue pas à la variation de l'énergie cinétique dans ce référentiel.

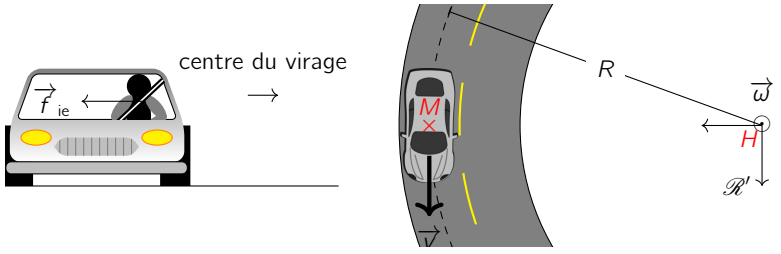
. Exemple de manifestation de la force d'inertie d'entraînement : Véhicule dans un virage

Un véhicule décrit un virage circulaire horizontal à vitesse constante. On assimile le passager à un point M décrivant un cercle de rayon R à la vitesse v. Le référentiel tournant lié au véhicule possède la vitesse angulaire $\omega = v/R$.

Le passager est immobile dans ce référentiel : la force de Coriolis est nulle. La force centrifuge vaut :

$$\vec{f}_{ie} = m\omega^2 R \vec{u}_r = m\frac{v^2}{R}\vec{u}_r.$$

Elle est compensée par la résultante horizontale des forces de contact exercées par le siège et la ceinture, dirigée vers le centre du virage.



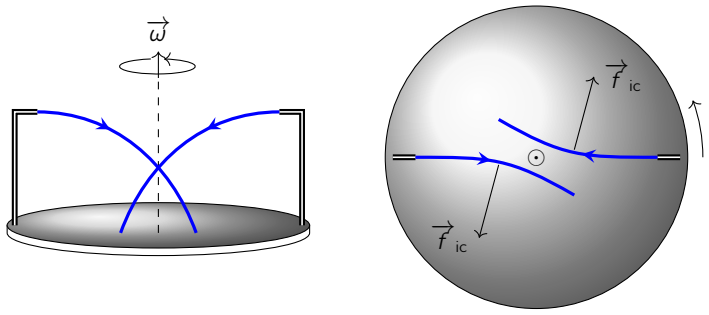
Application n°3 : Inclinaison de la voie dans un virage

Énoncé :

Un train roule à la vitesse v uniforme ; la voie ferrée est légèrement incurvée vers la gauche (dans le sens de la marche), la portion de voie concernée est assimilable à un arc de cercle de rayon R grand. Expliquer la situation par un schéma et proposer l'angle α d'inclinaison de voie par rapport à l'horizontale qu'il est recommandé d'adopter pour une meilleure sécurité des passagers. AN : pour un TGV circulant à $300\,\mathrm{km\cdot h^{-1}}$ l'inclinaison des voies ne dépasse pas 3,50° ; en déduire le rayon de courbure minimal acceptable.

. Exemple de manifestation de la force d'inertie de Coriolis : Jets d'eau sur un plateau tournant.

Deux robinets diamétralement opposés, fixés à un plateau, émettent des jets dirigés initialement vers son axe. Le plateau tourne uniformément dans le sens antihoraire, vu de dessus.
Dans le référentiel du plateau, chaque élément de fluide subit, en plus des forces réelles, la force centrifuge et la force de Coriolis. Au départ, la vitesse relative horizontale est dirigée vers l'axe : la force centrifuge est radiale, tandis que la force de Coriolis produit une déviation **vers la droite du mouvement**. Les deux jets sont ainsi déviés. Le sens de cette déviation s'inverse si l'on inverse le sens de rotation du plateau.



(a) Vue de profil (b) Vue de dessus

. Autres lois de la dynamique

Théorème du moment cinétique : pour un point A fixe de $\mathscr{R}'$,

$$\boxed{\left(\frac{d\vec{L}_A}{dt}\right)_{/\mathscr{R}'} = \vec{\mathcal{M}}_A(\vec{F}) + \vec{\mathcal{M}}_A(\vec{f}_{ie}) + \vec{\mathcal{M}}_A(\vec{f}_{ic})}$$

où $\vec{L}_A = \overrightarrow{AM} \wedge m\vec{v}_{M/\mathscr{R}'}$. Le moment de la force de Coriolis doit être pris en compte, même si son travail est nul.

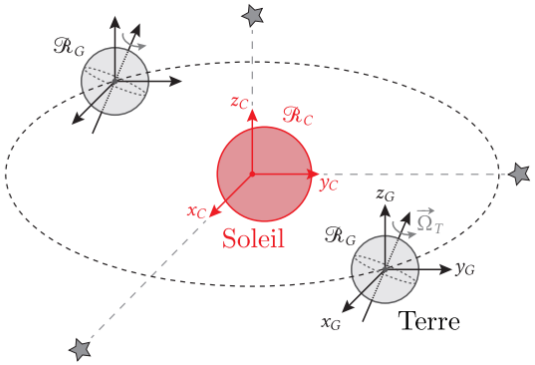
Théorème de l'énergie cinétique : la force de Coriolis ne travaillant pas dans $\mathscr{R}'$,

$$\boxed{\Delta\mathcal{E}_{c/\mathscr{R}'} = W_{/\mathscr{R}'}(\vec{F}) + W_{/\mathscr{R}'}(\vec{f}_{ie}).}$$

3. Caractère galiléen des référentiels usuels de la mécanique

En mécanique, le choix d'un « bon » référentiel est dicté par des considérations pratiques. On cherche essentiellement un compromis entre choisir un référentiel où le mouvement sera simple à décrire (il ne viendrait à l'esprit de personne de décrire la chute d'une balle sur Terre dans le référentiel lié à Jupiter...) et s'assurer que le référentiel retenu soit le plus galiléen possible ou, à défaut, que l'on puisse décrire facilement les forces d'inertie à prendre en compte.

On est amené en général à considérer trois référentiels, représentés sur la figure ci-dessous.



Référentiels usuels en mécanique. $\mathscr{R}_G$ (Géocentrique) est en translation quasi circulaire par rapport à $\mathscr{R}_C$ (Copernic), et $\mathscr{R}_T$ (Terrestre) est en rotation par rapport à ces deux derniers (ses axes ne sont pas représentés). On a représenté les étoiles lointaines fixant les directions des repères liés à $\mathscr{R}_C$ et $\mathscr{R}_G$.

. Référentiel de Copernic

Il s'agit du référentiel $\mathscr{R}_C$ lié au **centre de masse du système solaire** (qui est quasiment confondu avec le centre du Soleil) et dont les **axes pointent vers trois étoiles** suffisamment éloignées pour pouvoir être considérées comme **fixes**.
Ce référentiel est le référentiel naturel pour l'étude du mouvement des planètes, ou de phénomènes terrestres de durée suffisamment longue pour que la révolution de la Terre autour du Soleil ne puisse pas être négligée.

Remarque : rigoureusement, ce référentiel n'est pas galiléen car le Soleil est en mouvement dans notre galaxie, la Voie Lactée. Il décrit une orbite circulaire de rayon $D = 2{,}7 \times 10^4\,\mathrm{a\cdot l}$ autour du noyau galactique en une période $T_S = 250 \times 10^6$ ans. À l'échelle des expériences et des mouvements étudiés ici, on assimile le référentiel de Copernic à un référentiel galiléen.

. Référentiel géocentrique

Il s'agit du référentiel $\mathscr{R}_g$ lié au **centre de masse** de la Terre et dont **les axes pointent vers trois étoiles suffisamment éloignées pour pouvoir être considérées comme fixes.**

Dans le référentiel de Copernic $\mathscr{R}_C$, $\mathscr{R}_g$ a un mouvement de translation elliptique, quasi-circulaire, à la vitesse angulaire $\omega = \dfrac{2\pi}{1\ an} = 2{,}0 \times 10^{-7}\,\mathrm{rad\cdot s^{-1}}$. Ce référentiel semble naturel pour l'étude du mouvement de la Lune autour de la Terre et celle du mouvement des satellites artificiels autour de la Terre.

On l'assimile souvent à un référentiel galiléen pour les études au voisinage de la Terre lorsque les effets différentiels des attractions du Soleil et de la Lune sont négligeables à la précision recherchée. Attention, **certains phénomènes, comme les marées, ne sont explicables qu'en prenant en compte le caractère non-galiléen du référentiel géocentrique**.

. Référentiel terrestre

Il s'agit d'un **référentiel lié à un point P à la surface de la Terre** et dont **les axes conservent trois directions fixes par rapport au sol**, dont une définissant la verticale du lieu considéré. C'est classiquement ce référentiel qu'on appelle le **référentiel du laboratoire**.

Par rapport au référentiel géocentrique, ce référentiel est en rotation uniforme autour d'un axe fixe ($\Omega = \dfrac{2\pi}{T_0} = 7{,}3 \times 10^{-5}\,\mathrm{rad\cdot s^{-1}}$ avec $T_0 = 23$ h 56 min 04 s = 86 164 s). Pour la plupart des applications classiques et des expériences courantes, il n'apparaît aucune contradiction si on considère le référentiel terrestre comme galiléen (voir partie suivante pour des contre-exemples).

4. Quelques manifestations du caractère non galiléen du référentiel terrestre

Exemple de l'effet de la force d'inertie d'entraînement : la verticale apparente

Application n°4 : Verticale apparente

Énoncé :

On considère un fil à plomb suspendu à un plafond et immobile dans le référentiel terrestre $\mathscr{R}'$. Le plomb est assimilé à un point matériel M de masse m.

Le référentiel géocentrique $\mathscr{R}$ est supposé galiléen. Le référentiel terrestre est en rotation uniforme par rapport à $\mathscr{R}$, à la vitesse angulaire Ω, autour de l'axe des pôles (TZ).

La Terre est modélisée par une sphère de centre T, de rayon R_T et de masse $\mathcal{M}_T$, dont la répartition de masse est à symétrie sphérique. Le point M est situé à sa surface, à la latitude λ.

On utilise la base locale **géométrique** $(\vec{u}_{x_P}, \vec{u}_{y_P}, \vec{u}_{z_P})$:

— $\vec{u}_{x_P}$ est dirigé vers l'est ;

— $\vec{u}_{y_P}$ est dirigé vers le nord ;

— $\vec{u}_{z_P}$ est radial et dirigé vers l'extérieur.

On note H le projeté orthogonal de M sur l'axe des pôles et $\vec{u}$ le vecteur unitaire dirigé de H vers M.

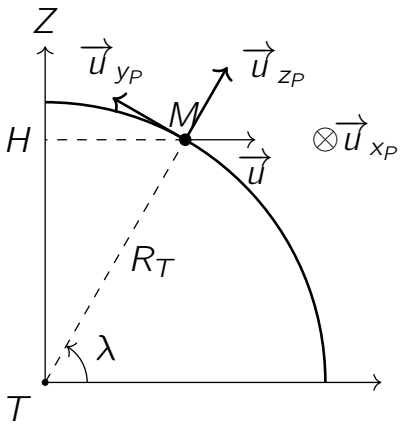


Figure 1 – Base locale géométrique au point M, de latitude λ dans l'hémisphère Nord.

La **verticale apparente** est définie par la direction du fil à plomb : on cherche à déterminer si elle coïncide avec la direction radiale.

Données : $\Omega = 7{,}29 \times 10^{-5}\,\text{rad}\,\text{s}^{-1}$, $R_T = 6{,}37 \times 10^{6}\,\text{m}$ et $g_0 = \mathcal{G}\mathcal{M}_T/R_T^2 \simeq 9{,}8\,\text{m}\,\text{s}^{-2}$.

1. Exprimer la force d'inertie d'entraînement $\vec{f}_{\text{ie}}$ en fonction de m, Ω, R_T, λ et $\vec{u}$, puis déterminer ses composantes dans la base locale.

2. Faire le bilan des forces exercées sur le plomb. Justifier que la force d'inertie de Coriolis est nulle et écrire la condition d'équilibre dans le référentiel terrestre.

3. Rappeler l'expression de la force gravitationnelle terrestre $\vec{F}_{\text{grav}}$ au point M, en fonction de $\mathcal{G}$, m, $\mathcal{M}_T$ et R_T.

En déduire l'expression du champ de gravitation terrestre $\vec{g}_{\text{grav}}$ tel que $\vec{F}_{\text{grav}} = m\vec{g}_{\text{grav}}$.

4. On définit le **champ de pesanteur effective** par :

$$\vec{g}_{\text{eff}} = \vec{g}_{\text{grav}} + \frac{\vec{f}_{\text{ie}}}{m}.$$

Déterminer ses composantes dans la base locale. Relier ce champ à la tension du fil et en déduire que la verticale locale n'est généralement pas radiale. Préciser les positions où ces deux directions coïncident.

5. Dans quelles régions l'effet centrifuge réduit-il le plus la norme de la pesanteur ? Quel autre avantage la proximité de l'équateur présente-t-elle pour un lancement de fusée vers l'est ?

6. Estimer le rapport maximal entre la norme de la force d'inertie d'entraînement et celle de l'attraction gravitationnelle. En déduire pourquoi l'effet d'entraînement constitue une petite correction.

Exemple de l'effet de la force d'inertie de Coriolis : la déviation vers l'est

Application n°5 : Déviation vers l'est lors d'une chute libre

Énoncé :

On considère un point matériel M de masse m, lâché sans vitesse initiale à $t = 0$. On étudie sa chute libre dans le référentiel terrestre $\mathscr{R}'$, où sa vitesse est notée $\overrightarrow{v}_{M/\mathscr{R}'}$.

1. Donner l'expression de la force d'inertie de Coriolis $\overrightarrow{f}_{ic}$.

2. Comparer, en ordre de grandeur, la force d'inertie de Coriolis au poids de la particule. Donner une condition sur la vitesse de la particule pour que la force d'inertie de Coriolis soit négligeable devant son poids.

La force de Coriolis étant faible devant le poids, on cherche une première approximation du mouvement en négligeant cette force.

3. En assimilant la verticale locale à la direction $\overrightarrow{u}_{z_P}$ de la figure précédente et en supposant la pesanteur uniforme, écrire l'accélération de M dans le référentiel terrestre. En déduire l'expression approchée de $\overrightarrow{v}_{M/\mathscr{R}'}(t)$, sachant que le point matériel est lâché sans vitesse initiale. On note g la norme de la pesanteur effective.

4. En déduire une expression et une direction pour $\overrightarrow{f}_{ic}$. Pourquoi parle-t-on de déviation vers l'est ?

Remarque : La force de Coriolis joue un rôle clé dans plusieurs expériences, notamment celle du pendule de Foucault (cette expérience est visible au Panthéon de Paris). Toutefois, son effet est très souvent négligeable pour des petits systèmes. Cette force a toutefois une manifestation macroscopique importante, à savoir dans l'étude des circulations des vents et des courants marins autour de dépression ou surpression locales (les « cyclones » et « anticyclones » météorologiques). Selon l'hémisphère, le sens de rotation de ces phénomènes est imposé par la force de Coriolis.