DS n°2 – Corrigé

Répartition : exercice 1 : 30 points ; exercice 2 : 15 points ; exercice 3 : 15 points.

Exercice n°1 : Parc d'attractions (EPITA 2023) – 30 points

A. Toboggan aquatique

A.1. Étude d'un toboggan rectiligne – 11 points

Q1. (2 pt) Vitesse d'arrivée en l'absence de frottement
Le passager est soumis à son poids, force conservative, et à la réaction normale du toboggan, dont le travail est nul car elle est perpendiculaire au déplacement. Son énergie mécanique est donc conservée.
En choisissant l'origine de l'énergie potentielle de pesanteur à l'altitude du point B, on obtient :

$$E_\mathrm{m}(A) = E_\mathrm{m}(B) \quad \Longrightarrow \quad mgh = \frac{1}{2}mv_B^2.$$

(1 pt : conservation justifiée et bilan énergétique)

D'où :

$$\boxed{v_B = \sqrt{2gh}.}$$

(1 pt : expression de la vitesse)

Q2. (0,5 pt) Influence de la forme du toboggan
L'expression précédente ne dépend que de la différence d'altitude h et de g. Ainsi, **à hauteur h fixée, la vitesse d'arrivée ne dépend pas de la forme du toboggan**, à condition que le passager atteigne effectivement B et que les frottements restent négligeables.

(0,5 pt)

Q3. (1,5 pt) Réaction normale du toboggan
Dans le référentiel terrestre supposé galiléen, le principe fondamental de la dynamique appliqué au passager s'écrit :

$$m\vec{a} = \vec{P} + \vec{R} = mg\sin\alpha\,\vec{e}_x - mg\cos\alpha\,\vec{e}_z + N\vec{e}_z - T\vec{e}_x.$$

(0,5 pt : PFD et projection du poids)
Le mouvement étant rectiligne selon $\vec{e}_x$, l'accélération n'a pas de composante selon $\vec{e}_z$. La projection sur cet axe donne :

$$0 = N - mg\cos\alpha \quad \Longrightarrow \quad \boxed{N = mg\cos\alpha.}$$

(1 pt : projection normale et résultat)

Q4. (2,5 pt) Travail de la force exercée par le toboggan
La force $\vec{R} = N\vec{e}_z - T\vec{e}_x$ est constante sur la portion rectiligne. Comme $\overrightarrow{AB} = AB\,\vec{e}_x$, son travail vaut :

$$W_{A\to B}(\vec{R}) = \vec{R}\cdot\overrightarrow{AB} \quad \Longrightarrow \quad \boxed{W_{A\to B}(\vec{R}) = -T\,AB.}$$

(1 pt : définition du travail : 0,5 ; calcul : 0,5)
La loi de Coulomb donne $T = \mu N = \mu mg\cos\alpha$. Par ailleurs, $h = AB\sin\alpha$. Par conséquent :

$$W_{A\to B}(\vec{R}) = -\mu mg\cos\alpha\,\frac{h}{\sin\alpha} \quad \Longrightarrow \quad \boxed{W_{A\to B}(\vec{R}) = -\frac{\mu mgh}{\tan\alpha}.}$$

(1,5 pt : Coulomb : 0,5 ; géométrie : 0,5 ; résultat : 0,5)
Ce travail est négatif : les frottements dissipent de l'énergie mécanique.

Q5. (2 pt) Vitesse d'arrivée en présence de frottements
Le théorème de l'énergie mécanique entre A et B donne :

$$E_\mathrm{m}(B) - E_\mathrm{m}(A) = W_{A\to B}(\vec{R}),$$

(0,5 pt)

soit :

$$\frac{1}{2}mv_B^2 - mgh = -\frac{\mu mgh}{\tan\alpha}.$$

(0,5 pt)

On en déduit :

$$\boxed{v_B = \sqrt{2gh\left(1 - \frac{\mu}{\tan\alpha}\right)}.}$$

(1 pt)

Le départ spontané vers le bas dans le modèle retenu suppose $\tan\alpha > \mu$. On retrouve bien $v_B = \sqrt{2gh}$ lorsque $\mu = 0$.

Q6. (0,5 pt) Estimation du coefficient de frottement

On reporte $v_B = 80$ km h^{-1} sur l'axe des ordonnées de la courbe, puis on lit l'abscisse du point correspondant. La lecture graphique retenue dans le corrigé original donne :

$$\boxed{\mu \simeq 0{,}2.}$$

(0,5 pt : lecture graphique cohérente)

Remarque sur la précision : en exploitant directement l'expression de la question 5, on trouve

$$\mu = \tan\alpha\left(1 - \frac{v_B^2}{2gh}\right) = 1 - \frac{(80/3{,}6)^2}{2\times 10\times 33} \simeq 0{,}25.$$

Une valeur voisine de 0,25 est donc cohérente avec les données. La question suivante doit être corrigée en tenant compte de la valeur effectivement retenue par l'élève.

Q7. (2 pt) Longueur minimale de la piste de freinage

Sur la portion horizontale, la réaction normale vaut $N = mg$. La force de frottement a pour norme $T = \mu mg$. Le poids et la réaction normale ne travaillent pas.

On note $v_{\text{entrée}} = 80/3{,}6$ m s^{-1}. Le théorème de l'énergie cinétique entre l'entrée sur la piste et le point d'arrêt donne :

$$0 - \frac{1}{2}mv_{\text{entrée}}^2 = -\mu mgL_{\min}.$$

(1 pt : travail négatif : 0,5 ; bilan énergétique : 0,5)

Ainsi :

$$\boxed{L_{\min} = \frac{v_{\text{entrée}}^2}{2\mu g}.}$$

(0,5 pt)

Avec $\mu \simeq 0{,}2$ et l'aide au calcul de l'énoncé :

$$L_{\min} \simeq \frac{5\times 10^2}{2\times 0{,}2\times 10} \quad\Longrightarrow\quad \boxed{L_{\min} \simeq 125 \text{ m}.}$$

(0,5 pt : valeur cohérente avec Q6)

La piste doit donc avoir une longueur au moins égale à cette distance dans le modèle étudié. Avec $\mu \simeq 0{,}25$, on obtient plutôt $L_{\min} \simeq 100$ m.

A.2. Étude d'un virage – 14 points

a) Préliminaire : étude des oscillations dans une cuvette

Q8. (1,5 pt) Moment cinétique par rapport à l'axe (Oz)

Le mouvement étant circulaire de rayon a :

$$\overrightarrow{OM} = a\vec{e}_r, \qquad \vec{v} = a\dot{\theta}\,\vec{e}_\theta.$$

(0,5 pt)

Le moment cinétique par rapport à O s'écrit :

$$\vec{\sigma}_O = \overrightarrow{OM} \wedge m\vec{v} = ma^2\dot{\theta}\,\underbrace{\vec{e}_r \wedge \vec{e}_\theta}_{\vec{e}_z}.$$

(0,5 pt : définition du moment cinétique)

Sa projection sur l'axe (Oz) vaut donc :

$$\boxed{\sigma_{Oz} = ma^2\dot{\theta}.}$$

(0,5 pt)

Q9. (2 pt) Moments du poids et de la réaction du support

Dans la base polaire de l'énoncé, le poids s'écrit :

$$\vec{P} = mg\cos\theta\,\vec{e}_r - mg\sin\theta\,\vec{e}_\theta.$$

Son moment par rapport à O vaut :

$$\overrightarrow{OM} \wedge \vec{P} = -mga\sin\theta\,\vec{e}_z.$$

Ainsi :

$$\boxed{\mathcal{M}_{Oz}(\vec{P}) = -mga\sin\theta.}$$

(1,5 pt : méthode : 0,5 ; expression signée : 1)

En l'absence de frottement, la réaction du support est radiale : sa droite d'action passe par O. Son moment est donc nul :

$$\boxed{\mathcal{M}_{Oz}(\vec{N}) = 0.}$$

(0,5 pt : moment nul justifié)

Q10. (1,5 pt) Équation différentielle du mouvement

Le théorème du moment cinétique par rapport à l'axe fixe (Oz), dans le référentiel galiléen de l'étude, donne :

$$\frac{\mathrm{d}\sigma_{Oz}}{\mathrm{d}t} = \mathcal{M}_{Oz}(\vec{P}) + \mathcal{M}_{Oz}(\vec{N}).$$

(0,5 pt)

On obtient donc :

$$ma^2\ddot{\theta} = -mga\sin\theta \quad\Longrightarrow\quad \boxed{\ddot{\theta} + \frac{g}{a}\sin\theta = 0.}$$

(1 pt : substitution : 0,5 ; équation finale : 0,5)

Q11. (2,5 pt) Approximation des petits angles et résolution

Pour des oscillations de faible amplitude, $|\theta| \ll 1$ avec θ exprimé en radians, on peut écrire $\sin\theta \simeq \theta$. L'équation devient celle d'un oscillateur harmonique :

$$\ddot{\theta} + \omega_0^2\theta = 0, \qquad \omega_0 = \sqrt{\frac{g}{a}}.$$

(0,5 pt : petits angles et linéarisation)

Sa solution générale est :

$$\theta(t) = A\cos(\omega_0 t) + B\sin(\omega_0 t).$$

(0,5 pt)

Les conditions initiales donnent :

$$\theta(0) = \theta_0 \implies A = \theta_0, \qquad \dot{\theta}(0) = 0 \implies B\omega_0 = 0 \implies B = 0.$$

(1 pt : 0,5 par condition initiale)

Finalement :

$$\boxed{\theta(t) = \theta_0 \cos\left(\sqrt{\frac{g}{a}}\, t\right).}$$

(0,5 pt)

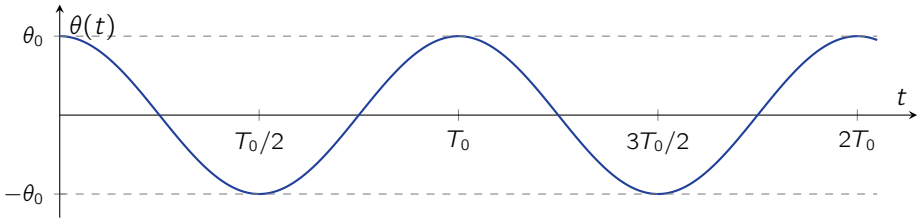
La validité de l'approximation nécessite ici $\theta_0 \ll 1$ rad.

Q12. (1 pt) Allure de la solution

La fonction est un cosinus qui commence à son maximum θ_0 avec une tangente horizontale. Les valeurs extrêmes sont :

$$\boxed{\theta_{\max} = \theta_0, \qquad \theta_{\min} = -\theta_0.}$$

(0,5 pt : extrema)



(0,5 pt : cosinus et départ au maximum)

Q13. (0,5 pt) Période des petites oscillations

La pulsation propre est $\omega_0 = \sqrt{g/a}$. Par conséquent :

$$T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} \quad \Longrightarrow \quad \boxed{T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{a}{g}}.}$$

(0,5 pt)

b) Retour au cas du virage dans le toboggan

Q14. (1,5 pt) Pesanteur effective

Dans le repère de l'énoncé, $\vec{e}_x$ est vertical descendant et $\vec{e}_y$ est dirigé vers l'extérieur du virage. Ainsi :

$$\vec{P} + \vec{F} + \vec{N} = mg\vec{e}_x + \frac{mv_0^2}{R_0}\vec{e}_y + \vec{N} = m\vec{g}_{\text{eff}} + \vec{N},$$

avec :

$$\boxed{\vec{g}_{\text{eff}} = g\vec{e}_x + \frac{v_0^2}{R_0}\vec{e}_y.}$$

(1 pt : 0,5 par composante)

Les deux composantes étant orthogonales :

$$\boxed{g_{\text{eff}} = \|\vec{g}_{\text{eff}}\| = \sqrt{g^2 + \frac{v_0^4}{R_0^2}}.}$$

(0,5 pt)

Q15. (1 pt) Inclinaison de la pesanteur effective

L'angle α entre $\vec{g}_{\text{eff}}$ et l'axe (Ox) vérifie :

$$\tan\alpha = \frac{\text{composante suivant } \vec{e}_y}{\text{composante suivant } \vec{e}_x} = \frac{v_0^2}{R_0 g}.$$

(0,5 pt)

Ainsi :

$$\boxed{\alpha = \arctan\left(\frac{v_0^2}{R_0 g}\right).}$$

(0,5 pt)

Avec les valeurs de l'énoncé, $\alpha \simeq 51°$.

Q16. (2,5 pt) Amplitude du mouvement et dimensionnement de la gouttière
Dans le modèle retenu, la situation est analogue à celle de la cuvette, avec une pesanteur de norme g_{eff} inclinée d'un angle α. La position d'équilibre stable correspond donc à $\theta = \alpha$.
On introduit l'angle $\varphi = \theta - \alpha$, mesuré par rapport à la direction de $\vec{g}_{\text{eff}}$. Initialement :

$$\varphi(0) = -\alpha, \qquad \dot{\varphi}(0) = 0.$$

(0,5 pt : analogie et position initiale)
En l'absence de frottement, les deux positions extrêmes sont symétriques par rapport à cette direction : $\varphi_{\text{min}} = -\alpha$ et $\varphi_{\text{max}} = +\alpha$. Cette symétrie des positions extrêmes ne nécessite pas l'approximation des petits angles.
En revenant à $\theta = \varphi + \alpha$, on obtient :

$$\boxed{\theta_{\text{min}} = 0, \qquad \theta_{\text{max}} = 2\alpha.}$$

(1 pt : symétrie des positions extrêmes et valeurs)
Numériquement :

$$\boxed{0 \leq \theta \leq 102^\circ.}$$

(0,5 pt)
Dans ce modèle de mouvement contraint, la gouttière doit donc se prolonger au moins jusqu'à l'angle 102° du côté extérieur du virage. Une gouttière s'arrêtant à 90° ne suffit pas.
(0,5 pt : dimensionnement)

B. Détecteur de wagons

B.1. Conséquence du passage d'un objet métallique – 5 points

Q17. (2,5 pt) Relation entre les courants dans les deux circuits
À position du wagon fixée, L_1, L_2 et M sont constants. Le flux magnétique total à travers le circuit 2 est :

$$\Phi_2 = L_2 i_2 + M i_1.$$

(0,5 pt)
La loi de Faraday donne la force électromotrice induite :

$$e_2 = -\frac{\mathrm{d}\Phi_2}{\mathrm{d}t} = -L_2 \frac{\mathrm{d}i_2}{\mathrm{d}t} - M \frac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t}.$$

(0,5 pt)
Le circuit 2 est fermé sur lui-même et sa résistance est négligée. La loi des mailles impose donc $e_2 = 0$, d'où :

$$L_2 \frac{\mathrm{d}i_2}{\mathrm{d}t} + M \frac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t} = 0.$$

(0,5 pt)
Après intégration :

$$\boxed{i_2(t) = -\frac{M}{L_2} i_1(t) + C.}$$

(1 pt : intégration : 0,5 ; constante : 0,5)
La constante C est fixée par les conditions initiales :

$$C = i_2(0) + \frac{M}{L_2} i_1(0).$$

Q18. (2,5 pt) Inductance équivalente vue depuis le circuit 1
Avec les orientations de l'énoncé et la convention récepteur pour le circuit 1, la relation tension-courant s'écrit :

$$u(t) = L_1 \frac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t} + M \frac{\mathrm{d}i_2}{\mathrm{d}t}.$$

(1 pt : terme propre : 0,5 ; terme mutuel : 0,5)

La question précédente donne :

$$\frac{\mathrm{d}i_2}{\mathrm{d}t} = -\frac{M}{L_2}\frac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t}.$$

(0,5 pt)

En remplaçant :

$$u(t) = \left(L_1 - \frac{M^2}{L_2}\right)\frac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t}.$$

(0,5 pt)

Le circuit 1 se comporte donc comme une bobine d'inductance :

$$\boxed{L = L_1 - \frac{M^2}{L_2}.}$$

(0,5 pt)

Le couplage avec le circuit 2 fermé diminue l'inductance apparente du circuit 1. En l'absence de couplage ($M = 0$), on retrouve $L = L_1$.

Total de l'exercice : 30 points.

Exercice n°2 : L'acide lactique dans le sang – 15 points

Exo 2 – Partie 1 : Acide lactique dans le sang

Q19. (2 pt) Concentrations dans les conditions habituelles
Pour le couple H_2CO_3/HCO_3^-, la relation de Henderson–Hasselbalch s'écrit :

$$\text{pH} = \text{p}K_{a1} + \log\left(\frac{[HCO_3^-]}{[H_2CO_3]}\right).$$

(0,5 pt)

Ainsi, à pH = 7,4 :

$$\frac{[HCO_3^-]}{[H_2CO_3]} = 10^{7,4-6,4} = 10.$$

(0,5 pt)

Avec $C_{t,0} = [H_2CO_3] + [HCO_3^-] = 0{,}0275$ mol L^{-1}, on en déduit :

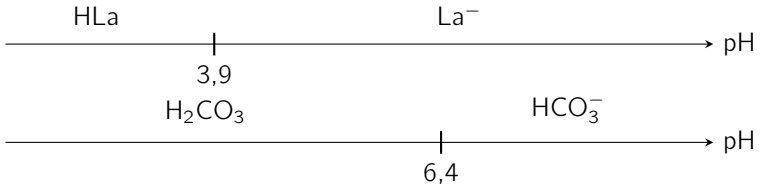
$$\boxed{[H_2CO_3] = \frac{C_{t,0}}{11} = 2{,}50 \times 10^{-3} \text{ mol L}^{-1}.}$$

(0,5 pt)

$$\boxed{[HCO_3^-] = \frac{10C_{t,0}}{11} = 2{,}50 \times 10^{-2} \text{ mol L}^{-1}.}$$

(0,5 pt)

Q20. (3 pt) Prédominance et réaction acido-basique
Pour un couple acide/base, l'acide prédomine si pH < pK_a et la base prédomine si pH > pK_a.



(1 pt : 0,5 par couple correctement placé)

L'acide lactique cède un proton à l'ion hydrogénocarbonate :

$$\boxed{HLa_{(aq)} + HCO_{3\,(aq)}^- \rightleftharpoons La^-_{(aq)} + H_2CO_{3(aq)}.}$$

(0,5 pt)

La constante d'équilibre de cette réaction vaut :

$$K^\circ = \frac{K_{a2}}{K_{a1}} = 10^{\text{p}K_{a1} - \text{p}K_{a2}} = 10^{6,4-3,9} \quad \Longrightarrow \quad \boxed{K^\circ = 10^{2,5} \simeq 3{,}2 \times 10^2.}$$

(1 pt : expression : 0,5 ; valeur : 0,5)

La réaction est favorisée dans le sens direct. Toutefois, K° n'est pas très grand devant 10^4 : ce seul critère ne permet pas de conclure qu'elle est quasi totale. Son avancement dépend aussi des concentrations initiales ; l'hypothèse devra être vérifiée *a posteriori*.

(0,5 pt : discussion de la quasi-totalité)

Q21. (3,5 pt) pH après l'effort et vérification de l'approximation
On note x l'avancement volumique, en mol L^{-1}. Le tableau d'avancement est :

	HLa	HCO_3^-	La^-	H_2CO_3
État initial	$2{,}0 \times 10^{-3}$	$25{,}0 \times 10^{-3}$	0	$2{,}5 \times 10^{-3}$
État final	$2{,}0 \times 10^{-3} - x$	$25{,}0 \times 10^{-3} - x$	x	$2{,}5 \times 10^{-3} + x$

(1 pt : état initial : 0,5 ; état final : 0,5)

L'acide lactique est le réactif limitant. Si la réaction est quasi totale, $x \simeq x_{\max} = 2{,}0 \times 10^{-3}$ mol L^{-1}. On obtient alors :

$$[HCO_3^-] \simeq 23{,}0 \times 10^{-3}, \qquad [H_2CO_3] \simeq 4{,}5 \times 10^{-3}, \qquad [La^-] \simeq 2{,}0 \times 10^{-3},$$

où toutes les concentrations sont exprimées en mol L^{-1}.
La relation de Henderson–Hasselbalch donne :

$$\mathrm{pH} = 6{,}4 + \log\left(\frac{23{,}0 \times 10^{-3}}{4{,}5 \times 10^{-3}}\right) \quad \Longrightarrow \quad \boxed{\mathrm{pH} \simeq 7{,}11 \simeq 7{,}1.}$$

(1 pt : relation : 0,5 ; pH numérique : 0,5)

Pour vérifier l'hypothèse, on calcule la concentration résiduelle $\varepsilon = [HLa]$ à l'aide du couple HLa/La$^-$:

$$\mathrm{pH} = \mathrm{p}K_{a2} + \log\left(\frac{[La^-]}{\varepsilon}\right) \quad \Longrightarrow \quad \varepsilon = [La^-]\, 10^{\mathrm{p}K_{a2} - \mathrm{pH}}.$$

Ainsi :

$$\boxed{\varepsilon \simeq 2{,}0 \times 10^{-3} \times 10^{3{,}9 - 7{,}11} \simeq 1{,}2 \times 10^{-6} \text{ mol L}^{-1}.}$$

(0,5 pt)

Le rapport $\varepsilon / C_0' \simeq 6 \times 10^{-4}$ est très petit devant 1 : environ 99,94 % de l'acide lactique initial a réagi. L'hypothèse d'une réaction quasi totale est donc justifiée.

(0,5 pt : comparaison quantitative)

Le pH obtenu est inférieur à 7,3 : il sort de l'intervalle [7,3 ; 7,5] imposé dans le modèle de l'énoncé. Le mécanisme de régulation lié à la respiration doit donc intervenir.

(0,5 pt : pH hors de l'intervalle imposé)

Exo 2 – Partie 2 : Titrage de l'acide lactique

Q22. (3 pt) Réaction de titrage et montage expérimental

La réaction support du titrage est :

$$\boxed{HLa_{(aq)} + HO^-{}_{(aq)} \longrightarrow La^-{}_{(aq)} + H_2O_{(\ell)}.}$$

(0,5 pt)

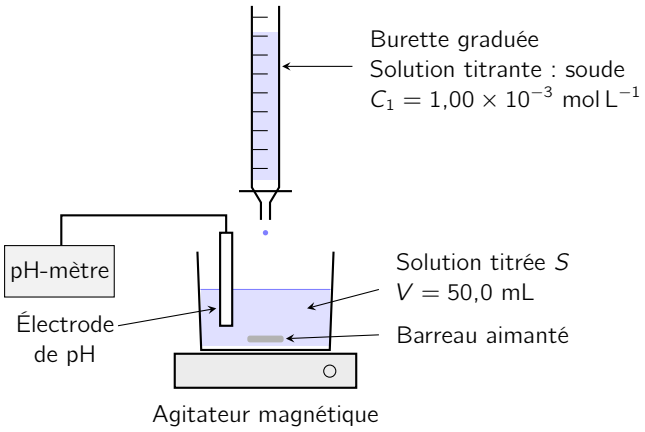
Sa constante d'équilibre vaut :

$$K^\circ = \frac{K_{a2}}{K_e} = 10^{\mathrm{p}K_e - \mathrm{p}K_{a2}} = 10^{14 - 3{,}9} \quad \Longrightarrow \quad \boxed{K^\circ = 10^{10{,}1} \simeq 1{,}3 \times 10^{10}.}$$

(0,5 pt : expression et valeur de la constante)

Cette valeur très élevée permet de considérer la réaction comme quantitative. Elle est adaptée au titrage, sous réserve d'être également rapide et unique dans les conditions de l'expérience.

(0,5 pt : caractère quantitatif)



(1,5 pt : burette annotée : 0,5 ; bécher/agitation : 0,5 ; pH-mètre : 0,5)

L'agitation homogénéise le mélange. On relève le pH après chaque ajout de soude, en resserrant les ajouts au voisinage de l'équivalence.

Q23. (2,5 pt) Concentration d'acide lactique et comparaison au seuil

La lecture graphique donne $V_{eq} \simeq 10{,}5$ mL.

(0,5 pt)

À l'équivalence, les réactifs ont été introduits dans les proportions stœchiométriques. La réaction étant de stœchiométrie 1 : 1 :

$$CV = C_1 V_{eq} \quad \Longrightarrow \quad C = C_1 \frac{V_{eq}}{V}.$$

(0,5 pt)

Numériquement :

$$\boxed{C = 1{,}00 \times 10^{-3} \times \frac{10{,}5}{50{,}0} = 2{,}10 \times 10^{-4} \text{ mol L}^{-1}.}$$

(0,5 pt)

L'acide contenu dans le prélèvement de sang de volume V_0 se retrouve dans la solution S de volume V. La conservation de sa quantité de matière donne :

$$C_0 V_0 = CV \quad \Longrightarrow \quad C_0 = C \frac{V}{V_0}.$$

D'où :

$$\boxed{C_0 = 2{,}10 \times 10^{-4} \times \frac{50{,}0}{5{,}0} = 2{,}10 \times 10^{-3} \text{ mol L}^{-1}.}$$

(0,5 pt : conservation de la quantité de matière et calcul)

La concentration massique dans le sang vaut alors :

$$c_m = C_0 M = 2{,}10 \times 10^{-3} \times 90 = 0{,}189 \text{ g L}^{-1}, \qquad \boxed{c_m = 189 \text{ mg L}^{-1}.}$$

Cette concentration est inférieure au seuil de 200 mg L^{-1} : **selon le critère de l'énoncé, le patient n'est pas en acidose lactique.**

(0,5 pt : concentration massique et comparaison au seuil)

Q24. (1 pt) Choix de l'indicateur coloré

Pour repérer l'équivalence, on choisit un indicateur dont la zone de virage est située dans le saut de pH de la courbe de titrage. Le corrigé source situe ce saut approximativement entre pH 6 et pH 8.

Indicateur	**Zone de virage**	**Choix**
Rouge Congo	3,5–4,5	Trop acide
Rouge de phénol	6,8–7,8	Adapté au saut de pH
Thymolphtaléine	9,0–10,0	Trop basique

(0,5 pt : zone de virage dans le saut de pH)

On retient donc **le rouge de phénol**, qui passe du jaune au rouge lorsque le pH augmente au cours de l'ajout de soude.

(0,5 pt : choix du rouge de phénol)

Total de l'exercice : 15 points.

Exercice n°3 : L'anneau de Thomson – 15 points

D'après les questions 1 à 13 du corrigé Mines-Ponts, Physique II MPI, 2026.

Exo 3 – Partie 1 : Champ magnétique créé par un solénoïde

Q25. (1 pt) Invariances et symétries de la distribution de courants

Dans le modèle d'un solénoïde infini à enroulement continu, la distribution de courants est invariante par translation suivant (Oz) et par rotation autour de cet axe. Les composantes du champ en coordonnées cylindriques ne dépendent donc ni de z ni de θ.

(0,5 pt : invariances et dépendance en r)

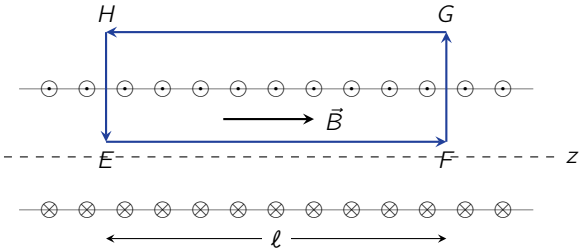
Le plan passant par M et perpendiculaire à (Oz), de directions $\vec{e}_r$ et $\vec{e}_\theta$, est un plan de symétrie de la distribution de courants. Le champ magnétique est perpendiculaire à ce plan en M : il est donc dirigé suivant $\vec{e}_z$.
On en déduit :

$$\boxed{\vec{B}(M) = B_z(r)\,\vec{e}_z.}$$

(0,5 pt : symétrie et direction du champ)

Q26. (3 pt) Champ à l'intérieur du solénoïde infini

On choisit un contour d'Ampère rectangulaire $EFGH$ de longueur ℓ suivant (Oz) : EF est à l'intérieur du solénoïde, GH à l'extérieur, et les deux autres côtés sont perpendiculaires à (Oz). Le contour est orienté dans le sens $E \to F \to G \to H \to E$.



Le théorème d'Ampère s'écrit :

$$\oint_{EFGH} \vec{B}\cdot \mathrm{d}\vec{\ell} = \mu_0 I_{\text{enlacé}}.$$

(1 pt : contour adapté et théorème)

Les côtés FG et HE ne contribuent pas car $\vec{B}$ est perpendiculaire à $\mathrm{d}\vec{\ell}$. Sur GH, le champ est nul par hypothèse. Il reste donc :

$$\oint_{EFGH} \vec{B}\cdot \mathrm{d}\vec{\ell} = B_z(r)\ell.$$

(1 pt : circulation)

Le contour enlace $n\ell$ spires parcourues par le courant I : $I_{\text{enlacé}} = n\ell I$. Ainsi :

$$B_z(r)\ell = \mu_0 n\ell I \quad\Longrightarrow\quad \boxed{\vec{B}(M) = \mu_0 n I\,\vec{e}_z \qquad (r < b).}$$

(1 pt : courant enlacé et champ)

Le sens $+\vec{e}_z$ correspond au sens du courant représenté ; inverser le courant inverse le champ.

Q27. (0,5 pt) Influence du noyau ferromagnétique

Dans le modèle linéaire admis par l'énoncé, on remplace μ_0 par $\mu_0\mu_r$. Le champ devient :

$$\boxed{\vec{B} = \mu_0\mu_r n I\,\vec{e}_z.}$$

L'application numérique donne :

$$B = 4\pi \times 10^{-7} \times 100 \times 1\,000 \times 10{,}0 = 4\pi \times 10^{-1}\ \text{T} \simeq 1{,}26\ \text{T}.$$

Avec un seul chiffre significatif, comme demandé :

$$\boxed{B \simeq 1\ \text{T}.}$$

(0,5 pt : expression avec le noyau et application numérique)

Dans la suite, on revient au milieu de perméabilité μ_0, sans noyau ferromagnétique.

Q28. (1,5 pt) Composante radiale du champ au voisinage de l'axe

On considère la surface fermée du petit cylindre de rayon r compris entre z et $z+\mathrm{d}z$. Les normales sortantes des bases supérieure et inférieure sont respectivement $+\vec{e}_z$ et $-\vec{e}_z$; celle de la surface latérale est $+\vec{e}_r$.
Au premier ordre en $\mathrm{d}z$ et dans l'approximation proche de l'axe, les flux valent :

$$\Phi_{\text{sup}} \simeq \pi r^2 B_z(z+\mathrm{d}z), \qquad \Phi_{\text{inf}} \simeq -\pi r^2 B_z(z), \qquad \Phi_{\text{lat}} \simeq 2\pi r\,\mathrm{d}z\, B_r(r,z).$$

Le flux total étant nul :

$$\pi r^2\big[B_z(z+\mathrm{d}z) - B_z(z)\big] + 2\pi r\,\mathrm{d}z\, B_r(r,z) = 0.$$

(0,5 pt : bilan des trois flux)

En utilisant $B_z(z+\mathrm{d}z) - B_z(z) \simeq B_z'(z)\,\mathrm{d}z$:

$$\boxed{B_r(r,z) \simeq -\frac{r}{2}\frac{\mathrm{d}B_z}{\mathrm{d}z}.}$$

(0,5 pt : relation différentielle)

Or, avec l'expression fournie dans l'énoncé :

$$\frac{\mathrm{d}B_z}{\mathrm{d}z} = -\frac{\mu_0 n I}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\left(\frac{z}{\sqrt{b^2+z^2}}\right) = -\frac{\mu_0 n I}{2}\frac{b^2}{(b^2+z^2)^{3/2}}.$$

Finalement, à l'ordre retenu près de l'axe :

$$\boxed{B_r(r,z) = \frac{\mu_0 n I r}{4}\frac{b^2}{(b^2+z^2)^{3/2}}.}$$

(0,5 pt : dérivation et expression finale)

Q29. (1,5 pt) Champ lointain et lignes de champ proches de l'axe

Pour $z \gg b$, on a $(b^2+z^2)^{-3/2} \simeq z^{-3}$, d'où :

$$\boxed{B_r(r,z) \simeq \frac{\mu_0 n I r b^2}{4z^3}.}$$

La composante axiale se réécrit, puisque $z > 0$:

$$B_z(z) = \frac{\mu_0 n I}{2}\left[1 - \left(1+\frac{b^2}{z^2}\right)^{-1/2}\right].$$

Avec $(1+x)^{-1/2} = 1 - x/2 + o(x)$ lorsque $x \to 0$:

$$\boxed{B_z(z) \simeq \frac{\mu_0 n I b^2}{4z^2}.}$$

(0,5 pt : deux expressions asymptotiques)

Comme $B_\theta = 0$, les lignes de champ sont contenues dans des plans méridiens, à θ constant. Dans un tel plan :

$$\mathrm{d}\vec{\ell} = \mathrm{d}r\,\vec{e}_r + \mathrm{d}z\,\vec{e}_z.$$

La condition $\mathrm{d}\vec{\ell} \wedge \vec{B} = \vec{0}$ donne :

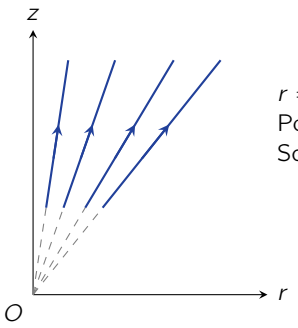
$$B_r\,\mathrm{d}z - B_z\,\mathrm{d}r = 0 \quad\Longrightarrow\quad \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}z} = \frac{B_r}{B_z} = \frac{r}{z}.$$

Pour $r > 0$, l'intégration conduit à $\ln r = \ln z + \text{constante}$, soit :

$$\boxed{r = kz.}$$

(0,5 pt : équation et intégration des lignes de champ)

L'axe $r = 0$ est lui-même une ligne de champ. Dans un plan méridien, les lignes obtenues sont des portions de droites dont les prolongements passent par l'origine.



$r = kz$
Portions représentées : $z \gg b$
Schéma qualitatif près de l'axe

(0,5 pt : tracé cohérent)

Les pointillés sont des prolongements géométriques : l'approximation utilisée n'est pas valable au voisinage de $z = 0$.

Exo 3 – Partie 2 : Lévitation magnétique

On utilise désormais les expressions obtenues avant l'approximation $z \gg b$. L'altitude z de l'anneau est fixée pendant l'étude électrique et la moyenne temporelle.

Q30. (0,5 pt) Loi de Lenz et sens de l'induction

Par ses effets, l'induction tend à s'opposer aux causes qui lui donnent naissance.

On oriente l'anneau avec la normale $+\vec{e}_z$: le sens positif de circulation est donc le sens trigonométrique vu depuis $z > 0$. Le flux du champ de la bobine à travers l'anneau est noté $\Phi_{1\to2}$.

Si ce flux augmente, la force électromotrice induite est négative : $e_2 = -\mathrm{d}\Phi_{1\to2}/\mathrm{d}t < 0$. Elle tend à faire circuler un courant créant un champ selon $-\vec{e}_z$, donc dans le sens horaire vu depuis le dessus. Si le flux diminue, le sens de cette action s'inverse.

(0,5 pt : loi de Lenz et sens de l'induction)

Précision : ce raisonnement fixe directement le sens de la force électromotrice. Lorsque l'auto-induction de l'anneau est prise en compte, le courant ne suit pas instantanément cette force électromotrice ; son sens à chaque instant se déduit de l'équation électrique et du déphasage calculé à la question 34.

Q31. (0,5 pt) Champ magnétique créé par la bobine en régime variable

Dans l'approximation des régimes quasi stationnaires retenue, on remplace I par $i_1(t) = I_1\cos(\omega t)$ dans les expressions magnétostatiques. Au voisinage de l'axe :

$$\boxed{\vec{B}(r,z,t) = \frac{\mu_0 n r b^2}{4(b^2+z^2)^{3/2}} I_1\cos(\omega t)\,\vec{e}_r + \frac{\mu_0 n}{2}\left(1 - \frac{z}{\sqrt{b^2+z^2}}\right) I_1\cos(\omega t)\,\vec{e}_z.}$$

(0,5 pt : deux composantes et dépendance temporelle)

Il s'agit du champ créé par la bobine inductrice, sans ajouter le champ propre de l'anneau.

Q32. (1,5 pt) Équation électrique de l'anneau et inductance mutuelle

On choisit comme surface s'appuyant sur l'anneau le disque horizontal de rayon a, orienté suivant $+\vec{e}_z$. La composante radiale du champ ne contribue pas au flux à travers ce disque. Près de l'axe, la composante axiale est assimilée à sa valeur sur l'axe :

$$\Phi_{1\to2}(t) \simeq \pi a^2 B_z(z,t) = \frac{\mu_0 n \pi a^2}{2}\left(1 - \frac{z}{\sqrt{b^2+z^2}}\right) i_1(t).$$

En identifiant $\Phi_{1\to2}(t) = M(z) i_1(t)$, on obtient :

$$\boxed{M(z) = \frac{\mu_0 n \pi a^2}{2}\left(1 - \frac{z}{\sqrt{b^2+z^2}}\right).}$$

(0,5 pt : flux et identification de M)

Avec les orientations choisies, $M(z) > 0$ pour $z > 0$. L'altitude étant fixe, la loi de Faraday donne la force

électromotrice due à la bobine :

$$e_2(t) = -\frac{\mathrm{d}\Phi_{1\to 2}}{\mathrm{d}t} = -M(z)\frac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t}.$$

(0,5 pt : Faraday avec le signe)

La loi des mailles de l'anneau résistif et inductif s'écrit $Ri_2 + L\,\mathrm{d}i_2/\mathrm{d}t = e_2$, soit :

$$\boxed{Ri_2(t) + L\frac{\mathrm{d}i_2}{\mathrm{d}t} + M(z)\frac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t} = 0.}$$

(0,5 pt : loi des mailles et équation)

Q33. (2 pt) Courant en régime sinusoïdal forcé et déphasage

On choisit $\underline{i_1}(t) = I_1 e^{j\omega t}$, avec $I_1 > 0$, et l'on note $\underline{i_2}(t) = \underline{I_2} e^{j\omega t}$. En régime sinusoïdal forcé, l'équation électrique devient :

$$(R + jL\omega)\underline{I_2} + j\omega M(z) I_1 = 0.$$

Ainsi :

$$\boxed{\underline{i_2}(t) = \frac{-j\omega M(z)}{R + jL\omega}\, I_1 e^{j\omega t}.}$$

(0,5 pt : passage complexe et courant)

L'amplitude réelle positive est le module de $\underline{I_2}$:

$$\boxed{I_2(z) = \frac{\omega M(z) I_1}{\sqrt{R^2 + L^2\omega^2}}.}$$

(0,5 pt)

Pour déterminer la phase, on multiplie par le conjugué du dénominateur :

$$\underline{I_2} = \frac{\omega M(z) I_1}{R^2 + L^2\omega^2}(-L\omega - jR) = I_2(z)\left(-\frac{L\omega}{\sqrt{R^2 + L^2\omega^2}} - j\frac{R}{\sqrt{R^2 + L^2\omega^2}}\right).$$

En identifiant à $I_2(z)(\cos\varphi + j\sin\varphi)$:

$$\boxed{\cos\varphi = -\frac{L\omega}{\sqrt{R^2 + L^2\omega^2}}, \qquad \sin\varphi = -\frac{R}{\sqrt{R^2 + L^2\omega^2}}.}$$

(1 pt : 0,5 pour le cosinus et 0,5 pour le sinus)

Le courant réel est donc :

$$\boxed{i_2(t) = I_2(z)\cos(\omega t + \varphi).}$$

Pour $R > 0$, $L > 0$ et $\omega > 0$, on peut choisir $\varphi = -\pi/2 - \arctan(L\omega/R) \in]-\pi, -\pi/2[$.

Q34. (0,5 pt) Compensation des contributions radiales de la force de Laplace

Un élément de l'anneau, orienté dans le sens positif du courant, s'écrit $\mathrm{d}\vec{\ell} = a\,\mathrm{d}\theta\,\vec{e}_\theta$. La force de Laplace élémentaire due au champ de la bobine est :

$$\mathrm{d}\vec{F} = i_2(t)\,\mathrm{d}\vec{\ell} \wedge \vec{B} = i_2(t) a\,\mathrm{d}\theta\big[B_z(z,t)\vec{e}_r - B_r(a,z,t)\vec{e}_z\big],$$

car $\vec{e}_\theta \wedge \vec{e}_z = \vec{e}_r$ et $\vec{e}_\theta \wedge \vec{e}_r = -\vec{e}_z$.

À un instant donné, i_2 et B_z sont indépendants de θ. Les contributions radiales de deux éléments diamétralement opposés ont même norme et directions opposées. De façon équivalente :

$$\vec{F}_{\text{rad}} = i_2(t) a B_z(z,t) \int_0^{2\pi} \vec{e}_r(\theta)\,\mathrm{d}\theta = \vec{0}.$$

(0,5 pt : compensation justifiée des composantes radiales)

Ainsi, **la résultante de la force de Laplace est purement axiale**.

Q35. (1,5 pt) Valeur moyenne de la force axiale

La composante axiale élémentaire vaut :

$$\mathrm{d}F_z = -i_2(t) a B_r(a,z,t)\,\mathrm{d}\theta.$$

Le champ radial étant indépendant de θ, l'intégration sur l'anneau donne :

$$F_z(t) = -2\pi a\, i_2(t) B_r(a,z,t) = -\frac{\pi\mu_0 n a^2 b^2}{2(b^2 + z^2)^{3/2}}\, i_1(t) i_2(t).$$

(0,5 pt : intégration de la force élémentaire)

En remplaçant les courants par leurs expressions sinusoïdales :

$$F_z(t) = -\frac{\pi\mu_0 n I_1 a^2 b^2 I_2(z)}{2(b^2+z^2)^{3/2}} \cos(\omega t)\cos(\omega t+\varphi).$$

On utilise l'identité :

$$\cos(\omega t)\cos(\omega t+\varphi) = \frac{1}{2}\big[\cos(2\omega t+\varphi)+\cos\varphi\big].$$

La moyenne du premier cosinus sur une période est nulle, donc :

$$\boxed{\langle F_z\rangle_t = -\frac{\pi\mu_0 n I_1 a^2 b^2 I_2(z)\cos\varphi}{4(b^2+z^2)^{3/2}}.}$$

(0,5 pt : moyenne du produit des cosinus)

On identifie :

$$\boxed{K(z) = -\frac{\pi}{4}\,\mu_0 n I_1\, a^2 b^2\, I_2(z)\cos\varphi.}$$

(0,5 pt : identification de K)

Puisque $\cos\varphi < 0$ pour $L > 0$, on a $K(z) > 0$: la force moyenne est dirigée vers le haut. Elle peut permettre la lévitation si elle compense le poids de l'anneau.

Q36. (1 pt) Rôle de l'auto-induction et suppression de la lévitation

Si l'on néglige l'auto-induction, $L = 0$ et la question 34 donne :

$$\cos\varphi = 0, \qquad \sin\varphi = -1, \qquad \varphi = -\frac{\pi}{2} \pmod{2\pi}.$$

Le courant dans l'anneau est alors en quadrature avec le courant primaire. Leur produit a une moyenne nulle, d'où :

$$\boxed{\langle F_z\rangle_t = 0.}$$

(0,5 pt : force moyenne nulle justifiée)

C'est la force moyenne qui s'annule ; la force instantanée n'est pas nécessairement nulle.

Pour empêcher la lévitation, on peut **ouvrir l'anneau par une fente traversant complètement sa section**, afin d'interrompre le chemin conducteur autour de l'axe. Le courant circulant dans la boucle est alors supprimé dans le modèle, ainsi que la force de lévitation associée. De simples rayures superficielles ne suffisent pas à ouvrir ce circuit.

(0,5 pt : fente traversante ouvrant la boucle)

Total de l'exercice : 15 points.

Récapitulatif du barème

Total : 60 points. Note sur $20 = \dfrac{\text{total obtenu}}{3}$.

Exercice 1 – 30 points

Question	Points
Q1	2
Q2	0,5
Q3	1,5
Q4	2,5
Q5	2
Q6	0,5
Q7	2
Q8	1,5
Q9	2
Q10	1,5
Q11	2,5
Q12	1
Q13	0,5
Q14	1,5
Q15	1
Q16	2,5
Q17	2,5
Q18	2,5
Total	**30**

Exercice 2 – 15 points

Question	Points
Q19	2
Q20	3
Q21	3,5
Q22	3
Q23	2,5
Q24	1
Total	**15**

Exercice 3 – 15 points

Question	Points
Q25	1
Q26	1,5
Q27	0,5
Q28	3
Q29	1,5
Q30	0,5
Q31	0,5
Q32	1,5
Q33	2
Q34	0,5
Q35	1,5
Q36	1
Total	**15**