DS n°2

Exercice n°1 : Parc d'attractions (EPITA 2023)

A. Toboggan aquatique

Un toboggan aquatique est un type de toboggan dans lequel un mince filet d'eau assure un glissement du passager avec de faibles frottements. Il en existe de diverses formes, et cette première partie propose d'étudier leur dimensionnement.

A.1. Étude d'un toboggan rectiligne

On s'intéresse à un toboggan rectiligne, comme celui de la figure 1. La différence de hauteur entre le point de départ et le point d'arrivée est notée h, et le passager démarre en haut, au point A, avec une vitesse initiale nulle.

On note g l'intensité de la pesanteur et m la masse du passager. On note v_B la vitesse du passager à l'arrivée, au point B. Le référentiel terrestre est supposé galiléen.

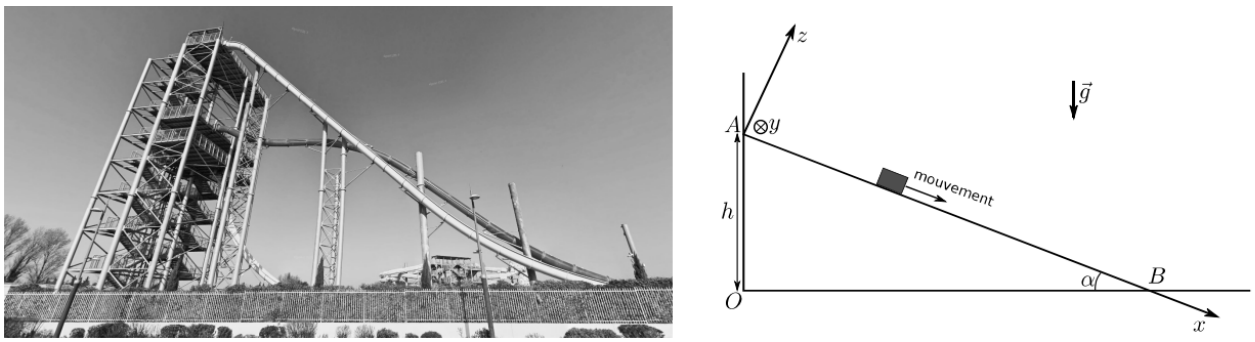


Figure 1 – À gauche : photographie du toboggan « Le Géant » du parc Wave Island. Pour ce toboggan, $h = 33$ m et $\alpha \simeq 45°$. À droite : modélisation retenue pour l'étude du toboggan.

Dans un premier temps, on néglige tout frottement.

Q1. En utilisant une approche énergétique, exprimer la vitesse atteinte au point B par le passager, en fonction de h et de g.

On admet que l'application numérique donne $v_B = 92$ km h^{-1}.

Q2. Ce résultat dépend-il de la forme du toboggan, à h constant ?

On prend maintenant en compte les frottements. On utilisera le repère cartésien indiqué sur la figure 1, à droite, avec $\vec{e}_x$, $\vec{e}_y$ et $\vec{e}_z$ les vecteurs unitaires de la base. Le mouvement a lieu selon $\vec{e}_x$ seulement.

La résultante des forces exercées par le toboggan sur le passager s'écrit :

$$\vec{R} = N\vec{e}_z - T\vec{e}_x,$$

où $T > 0$ représente les frottements.
On utilise la loi de Coulomb : tout au long du mouvement, on a la relation $T = \mu N$, avec μ une constante positive appelée **coefficient de frottement**. On suppose l'inclinaison du toboggan suffisante pour qu'il y ait mouvement.

Q3. À l'aide du principe fondamental de la dynamique, aussi appelé seconde loi de Newton, établir l'expression de N en fonction de m, de g et de l'angle α.

Q4. Exprimer le travail de la force $\vec{R}$ pour le mouvement entre les points A et B, d'abord en fonction de la longueur AB et de T.

Dans un second temps, l'exprimer en fonction de μ, de h, de m, de g et de l'angle α.

Q5. À l'aide de ce qui précède, établir l'expression de la vitesse atteinte par le passager en B, en fonction de μ, de h, de g et de l'angle α.

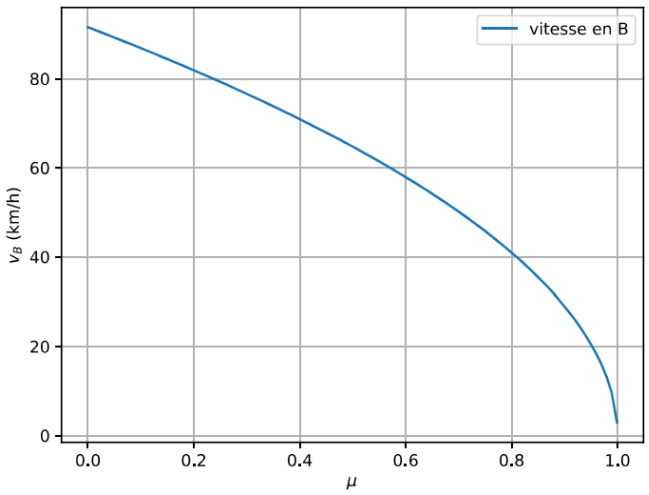


Figure 2 – Tracé de l'expression de v_B en fonction du coefficient de frottement μ, pour $h = 33$ m et $\alpha = 45°$.

Q6. La figure 2 montre un tracé de l'expression précédente de v_B en fonction de μ. La direction du parc d'attractions indique que la vitesse maximale atteinte dans son toboggan est de 80 $\mathrm{km\,h^{-1}}$.

En déduire une estimation de la valeur du coefficient de frottement passager–toboggan.

En bas du toboggan se trouve une longue piste horizontale, dans laquelle le passager va ralentir jusqu'à atteindre une vitesse nulle. On souhaite dimensionner la longueur de cette piste.

On suppose que le passager aborde cette piste à la vitesse de 80 $\mathrm{km\,h^{-1}}$ et que le coefficient de frottement conserve la valeur estimée à la question précédente.

Q7. À l'aide des données précédentes et d'un raisonnement énergétique, indiquer quelle doit être la longueur minimale L de la piste. On attend une expression littérale et une valeur numérique.

A.2. Étude d'un virage

On s'intéresse maintenant à un toboggan possédant un virage. Il est d'abord nécessaire d'établir quelques résultats préliminaires.

a) Préliminaire : étude des oscillations dans une cuvette

Cette sous-partie est indépendante du reste.

On considère une masse m, assimilée à un point matériel M, astreinte à glisser dans une cuvette de rayon a. Le mouvement a lieu dans le plan (Oxy) de la figure 3.

On néglige tout frottement. On note $\vec{g}$ le vecteur pesanteur et g sa norme. On utilise les coordonnées polaires représentées sur la figure 3, avec les vecteurs unitaires $\vec{e}_r$ et $\vec{e}_\theta$.

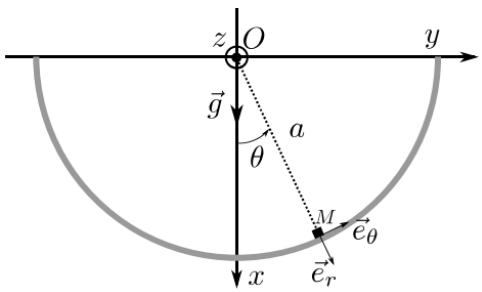


Figure 3 – Le point M glisse sans frottement le long d'un support cylindrique, représenté par l'arc de cercle grisé. Il n'y a pas de mouvement selon (Oz).

Q8. Donner l'expression du moment cinétique σ_{Oz} de la masse m par rapport à l'axe (Oz), en fonction de m, de a et de $\dot{\theta} = \dfrac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}$.

Q9. Donner les expressions du moment du poids et du moment de la réaction du support par rapport à l'axe (Oz), en fonction de m, de g, de a et de θ.

Q10. En utilisant le théorème du moment cinétique, établir une équation différentielle portant sur $\theta(t)$.

Q11. Proposer une approximation qui permet de résoudre cette équation.

Sous cette hypothèse, résoudre l'équation. On supposera qu'initialement :

$$\theta(0) = \theta_0 > 0 \qquad \text{et} \qquad \dot{\theta}(0) = 0.$$

Q12. Tracer l'allure de la solution $\theta(t)$. On fera apparaître les valeurs maximales et minimales atteintes.

Q13. Toujours sous l'hypothèse précédente, donner l'expression de la période des oscillations en fonction de a et de g.

b) Retour au cas du virage dans le toboggan

On étudie un cas où le passager du toboggan arrive avec une vitesse v_0 à l'entrée d'un virage de rayon R_0. Le toboggan a une forme de gouttière, et l'effet du virage va être de faire monter le passager le long de la gouttière.

La question est de savoir jusqu'où il va monter : il faut en effet dimensionner la gouttière pour que le passager ne soit pas éjecté.

On suppose le virage horizontal. On repère par θ la position angulaire du passager dans le plan (Oxy) représenté sur la figure 4. Ce plan accompagne le mouvement du passager le long du virage. On suppose que la vitesse de progression dans le virage reste égale à v_0.

Les informations importantes pour la résolution du problème sont les suivantes :

- Il est possible de mener l'étude dans le plan (Oxy) uniquement, représenté à droite sur la figure 4.
- Le référentiel lié à ce plan est non galiléen. Dans le modèle retenu, on admet que l'on peut appliquer les théorèmes de la mécanique en ajoutant au bilan des forces une force d'inertie, appelée « force centrifuge », qui s'écrit :
$$\vec{F} = \frac{mv_0^2}{R_0}\vec{e}_y.$$
- Le bilan ainsi utilisé comprend le poids $\vec{P}$, la force d'inertie $\vec{F}$ et la réaction normale $\vec{N}$ du toboggan. On néglige tout frottement.

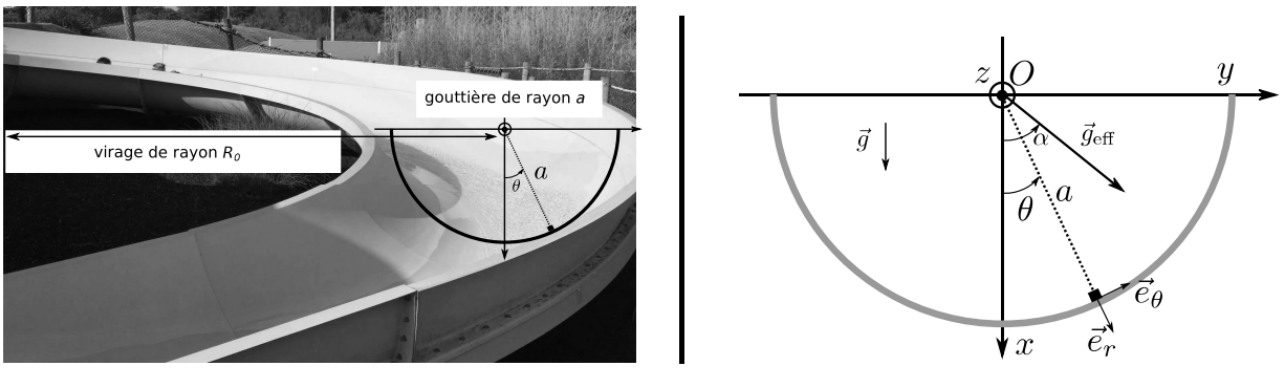


Figure 4 – À gauche : photographie d'un virage. À droite : repère dans le plan de la gouttière. L'axe (Ox) est vertical et orienté vers le bas ; l'axe (Oy) est horizontal et orienté vers l'extérieur du virage.

Q14. Montrer que la somme des forces du bilan précédent s'écrit :

$$\vec{P} + \vec{F} + \vec{N} = m\vec{g}_{\text{eff}} + \vec{N},$$

avec $\vec{g}_{\text{eff}}$ une pesanteur « effective » dont on donnera la norme en fonction de g, de R_0 et de v_0.

Q15. Donner également l'expression de l'angle α entre $\vec{g}_{\text{eff}}$ et l'axe (Ox), en fonction de g, de R_0 et de v_0.

Par exemple, si $v_0 = 25\ \text{km}\,\text{h}^{-1}$ et $R_0 = 4\ \text{m}$, on obtient approximativement :

$$\|\vec{g}_{\text{eff}}\| \simeq 15{,}5\ \text{m}\,\text{s}^{-2} \qquad \text{et} \qquad \alpha \simeq 51^\circ.$$

On se place dans ce cas dans la suite.

Q16. Le passager entre dans le virage avec $\theta(0) = 0$ et $\dot{\theta}(0) = 0$.

En utilisant une analogie avec ce qui a été vu dans la sous-partie A.2.a, indiquer entre quelles valeurs extrêmes va varier θ dans la suite du mouvement. Il n'est pas nécessaire de faire de calculs compliqués pour répondre à cette question.

Conclure sur le dimensionnement de la gouttière dans ce cas.

B. Détecteur de wagons

Dans les attractions qui utilisent des wagons, il est parfois nécessaire de détecter le passage d'un wagon à un endroit donné. Ceci peut se faire à l'aide d'un capteur inductif, que nous étudions dans cette partie.

B.1. Conséquence du passage d'un objet métallique

Le détecteur comporte une bobine d'inductance L_1, placée sur le bâti du manège et proche du lieu de passage des wagons. Sa résistance électrique est négligée. On note $u(t)$ la tension à ses bornes, orientée en convention récepteur pour le courant $i_1(t)$ (figure 5).

Lorsqu'un wagon passe à proximité, la bobine du détecteur devient magnétiquement couplée aux éléments métalliques du wagon. Ces derniers sont modélisés par une bobine d'inductance L_2, fermée sur elle-même et de résistance électrique négligeable. On note $i_2(t)$ le courant dans ce second circuit.

On note M le coefficient de mutuelle inductance entre les deux circuits. Pour établir les relations électriques, on considère une position donnée du wagon : L_1, L_2 et M sont donc supposés constants.

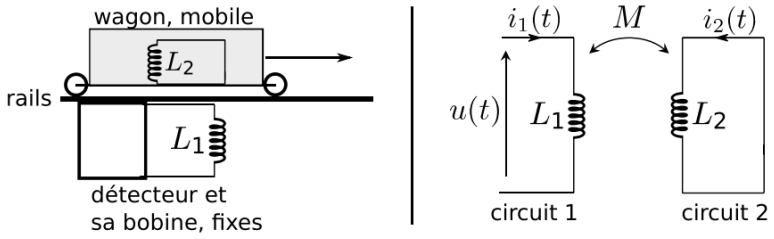


Figure 5 – À gauche : schéma de principe. À droite : schéma électrique avec les bobines 1 et 2, couplées magnétiquement. Les orientations des courants définissent le signe du coefficient de mutuelle inductance M.

Q17. En étudiant le circuit 2, montrer que :

$$i_2(t) = -\frac{M}{L_2} i_1(t) + C,$$

où C est une constante.

Q18. En étudiant le circuit 1, montrer que la relation entre $u(t)$ et $i_1(t)$ se met sous la forme :

$$u(t) = L \frac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t}.$$

Ceci montre que le circuit 1 est équivalent à une bobine d'inductance L, non couplée magnétiquement avec un autre circuit. Donner l'expression de L en fonction de L_1, de L_2 et de M.

Exercice n°2 : L'acide lactique dans le sang (E3A MPI 2025)

Données utiles :

— À la température de l'étude, le produit ionique de l'eau vaut $K_e = 10^{-14}$, soit $pK_e = 14$.

— Masse molaire de l'acide lactique : $M(C_3H_6O_3) = 90\ g\,mol^{-1}$.

Exo 2 – Partie 1 : Acide lactique dans le sang

Le sang est considéré dans cette partie comme une solution aqueuse dont le pH est imposé par le couple acido-basique H_2CO_3/HCO_3^-, de $pK_{a1} = 6{,}4$.

Dans les conditions habituelles, le pH du sang vaut 7,4 et la concentration totale, définie par

$$C_t = [H_2CO_3] + [HCO_3^-],$$

vaut $C_{t,0} = 0{,}0275\ mol\,L^{-1}$.

Dans le cadre de cette étude, on considère que le pH du sang doit rester compris entre 7,3 et 7,5.

Q19. Déterminer les concentrations en H_2CO_3 et en HCO_3^- dans le sang dans les conditions habituelles.

Lors d'un effort intense, il se forme de l'acide lactique $C_3H_6O_3$, noté ici HLa, dans le muscle, qui est ensuite transféré dans le sang.

La base conjuguée de l'acide lactique est l'ion lactate, noté La^-. Le pK_a du couple HLa/La^- vaut $pK_{a2} = 3{,}9$.

En passant dans le sang, l'acide lactique réagit avec les ions HCO_3^-.

Q20. Faire un diagramme de prédominance dans lequel apparaissent les différentes espèces mises en jeu : H_2CO_3, HCO_3^-, HLa et La^-.

Écrire l'équation de la réaction de l'acide lactique avec l'ion HCO_3^-. On supposera que c'est la seule réaction qui a lieu.

Exprimer et calculer la constante d'équilibre. On considérera que la réaction est quasi totale pour la suite des calculs. Qu'en pensez-vous *a priori* ?

Q21. Calculer le pH après un effort qui a porté la concentration initiale d'acide lactique dans le sang à $C_0' = 2{,}0 \times 10^{-3}\ mol\,L^{-1}$.

L'hypothèse de la réaction suffisamment avancée est-elle justifiée *a posteriori* ?

Commenter la valeur du pH.

Il existe en fait un mécanisme, lié à la respiration, qui permet de ramener le pH dans la zone considérée comme viable.

Exo 2 – Partie 2 : Titrage de l'acide lactique

Nous souhaitons dans cette partie mesurer la concentration de l'acide lactique $C_3H_6O_3$, noté HLa, dans le sang par un titrage pH-métrique.

Après l'effort, un volume $V_0 = 5{,}0$ mL de sang est prélevé. L'acide lactique en est extrait par une méthode qu'on n'étudiera pas.

Cet acide est dissous dans l'eau pour obtenir une solution S de volume $V = 50{,}0$ mL.
Cette solution S est titrée par une solution S_1 de soude $\left(Na^+_{(aq)} + HO^-_{(aq)}\right)$, de concentration $C_1 = 1{,}00 \times 10^{-3}\ mol\,L^{-1}$.

Q22. Écrire l'équation de la réaction de titrage.

Exprimer et calculer la constante d'équilibre. Que peut-on en déduire ?

Faire un schéma annoté du montage à réaliser.

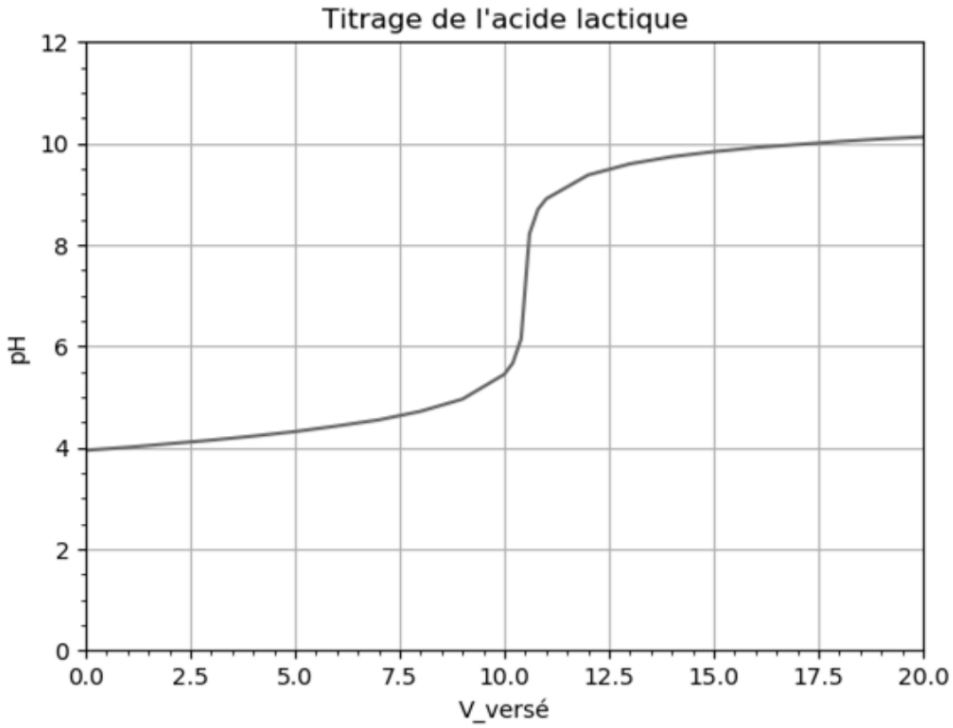


Figure 6 – Courbe de titrage de l'acide lactique. Le volume de soude versé est exprimé en millilitres.

On a tracé l'évolution du pH mesuré en fonction du volume de soude versé pour déterminer le volume à l'équivalence et la concentration d'acide lactique dans le sang.

Q23. Déterminer la concentration C d'acide lactique dans la solution S, puis la concentration C_0 d'acide lactique dans le sang prélevé.

La concentration maximale recommandée dans l'organisme est, selon le critère retenu dans cet exercice, de 200 $\mathrm{mg\,L^{-1}}$; au-delà, on parle d'acidose lactique.

Le patient est-il en acidose lactique selon ce critère ?

Q24. On suit en parallèle le titrage par colorimétrie.

Parmi les indicateurs colorés ci-dessous, lequel ou lesquels peut-on utiliser pour suivre le titrage ? Justifier.

Indicateur coloré	**Rouge Congo**	**Rouge de phénol**	**Thymolphtaléine**
Teinte acide	bleu	jaune	incolore
Teinte basique	rouge	rouge	bleu
Zone de virage	3,5 – 4,5	6,8 – 7,8	9,0 – 10,0

Exercice n°3 : L'anneau de Thomson (Mines-Ponts II, MPI, 2026)

L'expérience du « jumping ring », mise au point par Elihu Thomson en 1877, est une des premières expériences de lévitation magnétique par induction.

Le principe de l'expérience est le suivant : une bobine (circuit primaire), dans laquelle un noyau ferromagnétique a été inséré, est placée verticalement. Un anneau (circuit secondaire) en matériau conducteur est déposé sur le haut de la bobine. Lorsqu'une tension alternative est appliquée aux bornes de la bobine, l'anneau est propulsé vers le haut.



Figure 7 – L'expérience d'Elihu Thomson.

Dans la première partie, on détermine une forme simplifiée du champ magnétique généré par la bobine inductrice au voisinage de son axe.
Dans la seconde partie, on détermine la résultante de la force de Laplace exercée par cette bobine sur un anneau conducteur placé sur son axe.

Donnée utile :

$$\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7}\ \mathrm{H\,m^{-1}}$$

est la perméabilité magnétique du vide.
Les résultats des applications numériques ne comporteront qu'un chiffre significatif.

Exo 3 – Partie 1 : Champ magnétique créé par un solénoïde

On se place en coordonnées cylindriques (r, θ, z), dans la base $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_z)$.

On considère le solénoïde schématisé sur la figure 8 :

— de rayon $b = 5$ cm ;

— de dimension infinie dans la direction z ;

— parcouru par un courant I, supposé constant dans cette partie ;

— possédant n spires par unité de longueur.

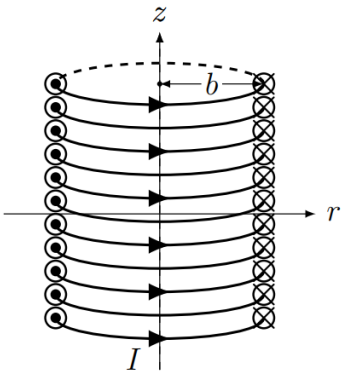


Figure 8 – Solénoïde infini.

Q25. Par des arguments d'invariance et de symétrie, simplifier la forme du champ magnétique $\vec{B}(M)$ créé par ce solénoïde en un point quelconque M de coordonnées cylindriques (r, θ, z).

Q26. On suppose que le champ magnétique est nul à l'extérieur du solénoïde.
En appliquant le théorème d'Ampère, déterminer alors l'expression de $\vec{B}(M)$ créé à l'intérieur du solénoïde infini.

Q27. On ajoute un noyau ferromagnétique de perméabilité relative $\mu_r = 100$.
Dans un modèle de milieu linéaire, on admet que la présence du noyau revient à remplacer μ_0 par $\mu_0\mu_r$ dans l'expression précédente. Que devient le champ magnétique ?
Calculer l'intensité de ce champ si $I = 10{,}0$ A et $n = 1\,000$ m^{-1}.

Dans toute la suite de l'exercice, on ne prend plus en compte le noyau ferromagnétique : la perméabilité du milieu est μ_0.

On coupe le solénoïde à l'altitude $z = 0$ et on ne conserve que la partie inférieure, correspondant à $z < 0$.
On cherche à déterminer la composante $B_r(r, z)$ du champ créé par ce solénoïde semi-infini à une altitude $z > 0$, au voisinage de son axe. On admet que la composante axiale du champ magnétique créé par le solénoïde sur son axe, à une hauteur z au-dessus de son extrémité, vaut :

$$B_z(z) = \frac{\mu_0 nI}{2}\left(1 - \frac{z}{\sqrt{b^2 + z^2}}\right).$$

On cherche à établir l'expression de la composante radiale $B_r(r, z)$ proche de l'axe (Oz).

Pour ce faire, on considère un petit cylindre de rayon r, compris entre z et $z + \mathrm{d}z$, centré sur l'axe (Oz). Au premier ordre près de l'axe, on assimile la composante axiale du champ sur chaque base à sa valeur sur l'axe.

Q28. En utilisant le fait que le champ magnétique est à flux conservatif, écrire une équation liant $B_r(r, z)$ et $B_z(z)$.
En déduire que, pour r proche de l'axe, sa composante radiale s'exprime :

$$B_r(r, z) = \frac{\mu_0 nIr}{4}\frac{b^2}{(b^2 + z^2)^{3/2}}.$$

On se place **uniquement pour la question suivante** dans l'approximation $z \gg b$.

Q29. Déterminer alors les expressions équivalentes de B_r et de B_z en ne gardant qu'un seul terme dominant.
On rappelle que les lignes de champ magnétique sont les courbes tangentes à $\vec{B}$ en tout point et admettent pour équation :

$$\mathrm{d}\vec{\ell} \wedge \vec{B} = \vec{0}.$$

En déduire que les équations des lignes de champ magnétique peuvent s'écrire sous la forme

$$r = kz,$$

où k est une constante d'intégration.
Dessiner alors la forme de ces lignes de champ magnétique proche de l'axe.

Exo 3 – Partie 2 : Lévitation magnétique

On assimile la bobine inductrice au demi-solénoïde de la partie 1, maintenant parcouru par un courant

$$i_1(t) = I_1 \cos(\omega t).$$

On place à l'altitude z un petit anneau de cuivre circulaire constitué d'une unique spire, ayant les caractéristiques suivantes :

— rayon $a = 1$ cm ;

— résistance $R = 10^{-4}\ \Omega$;

— coefficient d'auto-inductance $L = 10$ nH.

On note $i_2(t)$ le courant parcourant l'anneau.

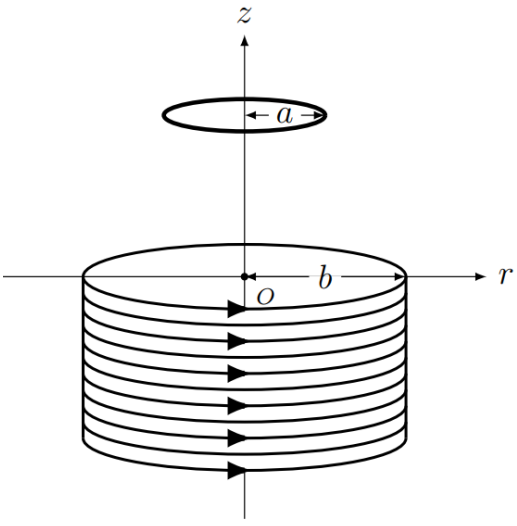


Figure 9 – Lévitation de l'anneau de Thomson.

Dans cette partie, on utilise les expressions du champ au voisinage de l'axe établies avant l'approximation $z \gg b$.

On se place dans l'approximation des régimes quasi stationnaires. L'altitude z de l'anneau est considérée comme constante pendant l'étude électrique et le calcul de la moyenne temporelle de la force.

Le sens positif de i_2 est associé à la normale $+\vec{e}_z$ par la règle de la main droite.

Q30. Donner la loi de Lenz pour l'induction.

Comment faire pour prévoir le sens du courant i_2 ?

Q31. À partir des résultats et des données de la partie 1, donner l'expression du champ magnétique total $\vec{B}(r, z, t)$ généré, au voisinage de son axe, par le demi-solénoïde parcouru par le courant $i_1(t)$.

Q32. À partir de la loi de Faraday, montrer que le courant $i_2(t)$ satisfait une équation différentielle de la forme :

$$R\, i_2(t) + L\frac{\mathrm{d}i_2}{\mathrm{d}t} + M(z)\frac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t} = 0,$$

où l'on exprimera le coefficient d'inductance mutuelle $M(z)$ en fonction de μ_0, de n, de a, de b et de z.

Q33. En régime sinusoïdal forcé, passer en notation complexe à la pulsation ω et déterminer l'expression du courant complexe $\underline{i_2}(t)$ circulant dans l'anneau.

Montrer alors que l'on peut écrire :

$$i_2(t) = I_2(z)\cos(\omega t + \varphi),$$

où l'on exprimera l'amplitude $I_2(z)$ en fonction de $M(z)$, de R, de L, de ω et de l'amplitude I_1 de i_1.

Exprimer également $\cos\varphi$ et $\sin\varphi$ en fonction de R, de L et de ω.

On cherche à déterminer la valeur moyenne de la résultante de la force de Laplace appliquée à l'anneau.

Q34. Montrer que les contributions radiales à la force de Laplace se compensent lorsqu'on les somme sur l'ensemble de l'anneau.

Q35. Montrer que la valeur moyenne temporelle de la composante axiale F_z de la force de Laplace, suivant l'axe $\vec{e}_z$, s'exprime sous la forme :

$$\langle F_z \rangle_t = \frac{K(z)}{(b^2 + z^2)^{3/2}},$$

où l'on exprimera $K(z)$ en fonction de $I_2(z)$, de φ, de $\mu_0 n I_1$, de a et de b.

Q36. Que vaut $\langle F_z \rangle_t$ si on ne prend pas en compte le coefficient d'auto-inductance de l'anneau ?

Que recommanderiez-vous de faire à l'anneau pour empêcher sa lévitation ?