Exercice 10.1. Impesanteur ★ (Référentiel en translation accélérée)

1. L'avion est en translation accélérée par rapport au référentiel terrestre supposé galiléen. Pour qu'un point matériel A de masse m_a dans l'avion soit en état d'impesanteur, il faut que les forces se compensent. Cela signifie que la force d'inertie d'entraînement subie par le point doit être égale à l'opposé du poids de ce point : $\overrightarrow{P} = m_a \overrightarrow{g}$. Or la force d'inertie d'entraînement est définie par : $\overrightarrow{f}_{ie} = -m_a \overrightarrow{a}_e$. Cela signifie que l'accélération d'entraînement $\overrightarrow{a}_e$ (accélération de l'avion dans le référentiel terrestre galiléen) doit être égale à l'accélération de la pesanteur. L'avion est en chute libre : **la trajectoire entre B et C doit donc être une parabole**.

2. On étudie l'avion, considéré comme ponctuel, dans le référentiel terrestre supposé galiléen. On choisi un repère centré en B . Le principe fondamental de la dynamique s'écrit :

$$m\overrightarrow{a} = m\overrightarrow{g}$$

soit en projection sur les axes horizontaux et verticaux :

$$\boxed{\begin{cases} a_x = 0 \\ a_y = -g \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x(t) = v_{0x}t \\ y(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + v_{0y}t \end{cases}}$$

3. Lorsque la durée maximale de vol T est atteinte, on a

$$x(T) = v_{0x}T$$

Ainsi, $T = \dfrac{x(T)}{v_{0x}}$ et donc

$$y(T) = 0 = -\frac{1}{2}g\left(\frac{x(T)}{v_{0x}}\right)^2 + \frac{v_{0y}}{v_{0x}}x(T)$$

On en déduit que $(x(T) \neq 0)$

$$x(T) = \frac{2v_{0x}v_{0y}}{g}$$

soit encore

$$T = \frac{2v_{0y}}{g}.$$

On sait aussi que

$$y\left(\frac{T}{2}\right) = h = -\frac{1}{2}g\left(\frac{T}{2}\right)^2 + v_{0y}\frac{T}{2},$$

ce qui se réécrit

$$T^2 - \frac{4v_{0y}T}{g} + \frac{8h}{g} = 0,$$

soit

$$\boxed{T^2 = \frac{8h}{g}, \text{ soit } T = \sqrt{\frac{8h}{g}} \simeq 85 \text{ s}}$$

4. Le principe d'inertie assure que dans un référentiel galiléen, tout point isolé (ou pseudoisolé) est en mouvement rectiligne et uniforme (ou immobile). Ce principe permet ainsi de caractériser les référentiels galiléens. Le premier principe n'est pas contredit si l'on considère que la seule force associée à une interaction physique est le poids. Ainsi dans le référentiel de l'avion, un objet lâché est immobile alors qu'il n'est pas isolé. Le référentiel de l'avion n'est donc pas galiléen.

Exercice 10.2. Manège en rotation ★ (Force d'inertie d'entraînement, frottements solides)

On modélise un passager par un point matériel de masse m, situé à la distance R de l'axe. Au moment du retrait du plancher, on suppose que le manège tourne à vitesse angulaire constante ω. On se place dans le référentiel lié au manège.

1. Pourquoi les passagers ne tombent-ils pas ?

Lorsque le plancher est retiré, le passager tend à glisser vers le bas sous l'effet de son poids. La paroi exerce alors sur lui une force de frottement statique $\vec{T}$ dirigée vers le haut. Si le passager reste immobile par rapport à la paroi, son équilibre vertical impose

$$T - mg = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad \boxed{T = mg}.$$

La rotation intervient par l'intermédiaire de la réaction normale de la paroi. Plus le manège tourne vite, plus cette réaction est intense et plus le frottement maximal que la paroi peut exercer est grand.

2. Vitesse angulaire minimale

On note $\vec{u}_r$ le vecteur unitaire radial dirigé de l'axe vers la paroi. La réaction normale est dirigée vers l'axe, $\vec{N} = -N\vec{u}_r$, tandis que la force d'inertie d'entraînement est dirigée vers l'extérieur, $\vec{f}_{\text{ie}} = m\omega^2 R\,\vec{u}_r$. La force d'inertie de Coriolis est nulle puisque le passager est immobile dans le référentiel du manège.

La projection radiale de la condition d'équilibre donne

$$-N + m\omega^2 R = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad \boxed{N = m\omega^2 R}.$$

D'après la loi de Coulomb, le passager peut rester immobile contre la paroi si $T \leq \mu N$. En utilisant les deux résultats précédents, on obtient

$$mg \leq \mu m\omega^2 R \qquad \Longleftrightarrow \qquad \omega \geq \sqrt{\frac{g}{\mu R}}.$$

La vitesse angulaire minimale permettant de retirer le plancher est donc

$$\boxed{\omega_m = \sqrt{\frac{g}{\mu R}}}.$$

3. Application numérique

Avec $R = 4\,\text{m}$, $\mu = 0{,}4$ et $g = 9{,}81\,\text{m}\,\text{s}^{-2}$, on trouve

$$\omega_m = \sqrt{\frac{9{,}81}{0{,}4 \times 4}} \simeq 2{,}48\,\text{rad}\,\text{s}^{-1}.$$

Un tour correspondant à 2π radians, on divise ω_m par 2π pour obtenir le nombre de tours par seconde, puis on multiplie par 60 pour l'exprimer en tours par minute. Ainsi,

$$n_m = \frac{60\,\omega_m}{2\pi} \simeq 23{,}6\,\text{tr}\,\text{min}^{-1}, \qquad \text{soit environ } \boxed{24 \text{ tours par minute}}.$$

Exercice 10.3. Tige en rotation ★★ (Force d'inertie d'entraînement, position d'équilibre)

1. Les forces qui s'appliquent sont :

— $\vec{P}$ le poids : $\vec{P} = -mg\vec{u_Y} = -mg\left(\cos\alpha\,\vec{u}_x + \sin\alpha\,\vec{u}_y\right)$

— la réaction de la tige sur le point M (sans frottements) donc perpendiculaire à l'axe (Ox) ;

— la force d'inertie de coriolis : $\vec{f_{ic}} = -2\vec{\omega} \wedge \vec{v_{M/R'}}$, avec $\vec{v_{M/R'}} = \dot{x}\,\vec{u}_x$, donc :

$$\vec{f_{ic}} = 2m\omega\dot{x}\sin\alpha\vec{u_z}$$

— la force d'inertie d'entraînement : $\vec{f_{ie}} = -m\vec{a_{ie}} = -m\vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge \vec{OM})$.
Comme $\vec{\omega} = \omega\left(\cos\alpha\,\vec{u}_x + \sin\alpha\,\vec{u}_y\right)$ et que $\vec{OM} = x\vec{u_x}$, il vient :

$$\vec{f_{ie}} = m\omega^2 x\sin\alpha\left(\sin\alpha\,\vec{u}_x - \cos\alpha\,\vec{u}_y\right) = m\omega^2\vec{HM}$$

2. On cherche la position d'équilibre x_0 du point M.
Première méthode : On applique le PFD au point M à l'équilibre dans le référentiel R' puis on le projette suivant l'axe (Ox), on obtient :

$$ma_x = 0 = \vec{P}\cdot\vec{u}_x + \vec{f}_{ie}\cdot\vec{u}_x$$

soit

$$-mg\cos\alpha + m\Omega^2 x_0 = 0$$

et donc

$$\boxed{x_0 = g\cos\frac{\alpha}{\Omega^2}}$$

3. On a déjà exprimé le principe fondamental de la dynamique dans la première question. Il s'écrit :

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -mg\cos\alpha + m\Omega^2 x$$

soit

$$\frac{d^2x}{dt^2} - \Omega^2(x - x_0) = 0$$

Il s'agit d'une équation différentielle linéaire d'ordre 2.

Les solutions sont de la forme : $x(t) = x_0 + A\exp(\Omega t) + B\exp(-\Omega t)$ avec A et B deux constantes à déterminer avec les conditions initiales $\dot{x}(0) = 0$ et $x(0) = a + x_0$. On trouve $A = B = \frac{a}{2}$ puis

$$\boxed{x(t) = x_0 + \frac{a}{2}\exp(\Omega t) + \frac{a}{2}\exp(-\Omega t) = x_0 + a\cosh(\Omega t).}$$

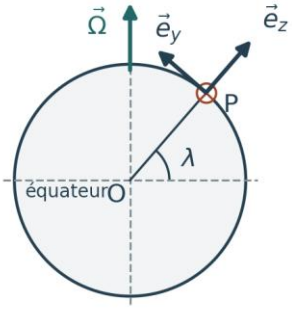
4. Comme la fonction cosinus hyperbolique est croissante, la position d'équilibre semble être instable. Vérifions-le !

Il suffit de dériver deux fois l'énergie potentielle trouvée à la première question : $\boxed{\left(\frac{d^2\mathcal{E}_p}{dx^2}\right)_{x_0} = -m\Omega^2 < 0}$.

Cette position d'équilibre est donc bien instable.

Exercice 10.4. Usure des rails d'un train ★★ (Force d'inertie de Coriolis)

1) Le rayon terrestre en P donne la verticale locale $\vec{e}_z$. La tangente au méridien dirigée vers le pôle Nord donne $\vec{e}_y$. Sur la coupe ci-contre, l'est entre dans la feuille (symbole $\otimes$). La vitesse du train vaut donc $\vec{v} = v\vec{e}_x$.



Le symbole $\otimes$ en P représente la direction de la vitesse vers l'est.

Le vecteur $\vec{\Omega}$ est parallèle à l'axe des pôles et orienté vers le nord. Il fait l'angle λ avec l'horizontale locale dirigée vers le nord. Ainsi,

$$\boldsymbol{\vec{\Omega} = \Omega\cos\lambda\,\vec{e}_y + \Omega\sin\lambda\,\vec{e}_z.}$$

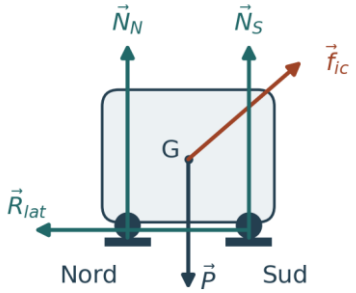
2) Dans le référentiel terrestre, $\vec{f}_{\text{ic}} = -2m\vec{\Omega} \wedge \vec{v}$. Avec $\vec{e}_y \wedge \vec{e}_x = -\vec{e}_z$ et $\vec{e}_z \wedge \vec{e}_x = \vec{e}_y$, on obtient :

$$\boldsymbol{\vec{f}_{\text{ic}} = -2m\Omega v\sin\lambda\,\vec{e}_y + 2m\Omega v\cos\lambda\,\vec{e}_z.}$$

Pour $v = 320/3{,}6 \simeq 88{,}9\ \text{m s}^{-1}$, la composante horizontale vaut 7,6 kN vers le sud et la composante verticale 6,6 kN vers le haut. La vitesse étant perpendiculaire à $\vec{\Omega}$, la norme vaut $2m\Omega v \simeq 1{,}0 \times 10^4$ N.

Le poids vaut $mg \simeq 7{,}6 \times 10^6$ N. Le rapport $\| \vec{f}_{\text{ic}} \|/(mg) = 2\Omega v/g \simeq 1{,}3 \times 10^{-3}$ correspond à environ 0,13 % du poids.

3) Vers l'est, le sud est à droite du train. Pour le maintenir sur la voie, les rails exercent une réaction latérale $\vec{R}_{\text{lat}}$ vers le nord. En retour, le train pousse la voie vers le sud. L'effet de Coriolis sollicite donc davantage le flanc du rail sud, à droite dans le sens de la marche.



Vers l'est, vue de l'arrière. Forces sans échelle, réactions de la voie en vert.

La réaction verticale totale $\vec{N} = \vec{N}_N + \vec{N}_S$ des rails compense le poids diminué de la composante verticale de Coriolis :

$$\boldsymbol{N = mg - 2m\Omega v\cos\lambda.}$$

Vers l'ouest, $\vec{v}$ et $\vec{f}_{\text{ic}}$ changent de sens. Le train tend à dévier vers le nord : le rail nord, encore à droite dans le sens de la marche, subit la sollicitation latérale supplémentaire. La composante verticale est dirigée vers le bas et la charge totale sur les rails augmente.
Cette comparaison décrit la contribution de Coriolis à l'usure latérale sur une voie droite. L'usure réelle dépend aussi du tracé et des contacts roue–rail.

Exercice 10.5. Sismographe ★★ (Force d'inertie d'entraînement, filtrage)

1. C'est la translation de (R') par rapport à (R) qui est à l'origine de la force d'inertie, donc $\vec{f}_{ie} = -m\,\vec{a}(O'/R)$.

On a $x = D + X_0\cos(\omega t)$ caractérise la position de O' dans (R), donc :

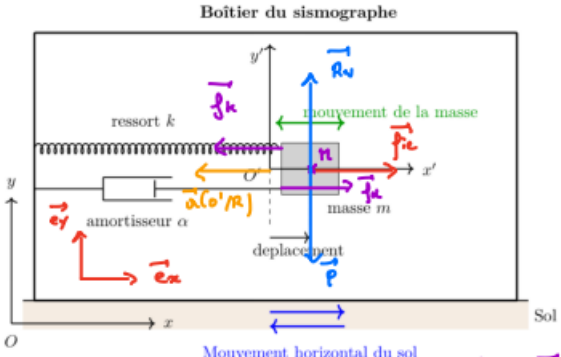
$$\vec{v}(O'/R) = \left(\frac{d\overrightarrow{OO'}}{dt}\right)_R = \frac{dx}{dt}\vec{e}_x$$

$$\Rightarrow \vec{v}(O'/R) = -\omega X_0 \sin(\omega t)\,\vec{e}_x$$

Puis $\vec{a}(O'/R) = \left(\frac{d\vec{v}(O'/R)}{dt}\right)_{(R)}$

Donc $\vec{a}(O'/R) = -\omega^2 X_0\cos(\omega t)\,\vec{e}_x$

Finalement, $\vec{f}_{ie} = m\omega^2 X_0\cos(\omega t)\,\vec{e}_x$



Les sens de $\vec{a}(O'/R)$, $\vec{f}_{ie}$, $\vec{f}_k$ et $\vec{f}_\alpha$ sur le schéma sont arbitraires (ils dépendent de la position / vitesse de la masse et de l'accélération de O').

2. Bilan des forces sur la masse m de centre M est :

- poids $\vec{P}$
- réaction normale $\vec{R}_N$ } sont $\vec{e}_y$, se compensent
- force d'inertie $\vec{f}_{ie}$ ci-dessus
- rappel élastique $\vec{f}_k = -kx'\vec{e}_x$
- frottement fluide $\vec{f}_\alpha = -\alpha\dot{x}'\vec{e}_x$

La 2e loi de Newton sur la masse m dans (R') donne :

$$m\,\vec{a}(M/R') = \underbrace{\vec{P} + \vec{R}_N}_{=\vec{0}} + \vec{f}_{ie} + \vec{f}_k + \vec{f}_\alpha$$

On projette sur $\vec{e}_x$: $m\ddot{x}' = -m\omega^2 X_0\cos(\omega t) - kx' - \alpha\dot{x}'$

Soit $m\ddot{x}' + \alpha\dot{x}' + kx' = m\omega^2 X_0\cos(\omega t)$

3. On pose $\omega_0 = \sqrt{k/m}$ et $Q = \frac{m\omega_0}{\alpha}$:

$$\ddot{x}' + \frac{\omega_0}{Q}\dot{x}' + \omega_0^2 x' = \omega^2 X_0\cos(\omega t)$$

4. On pose $x' = X_m'\cos(\omega t + \phi) \Rightarrow \underline{x}' = X_m' e^{i\omega t}e^{i\phi}$

Alors $\underline{x}'$ vérifie $\ddot{\underline{x}}' + \frac{\omega_0}{Q}\dot{\underline{x}}' + \omega_0^2\underline{x}' = \omega^2 X_0 e^{i\omega t}$

$$\Rightarrow X_m' e^{i\omega t}e^{i\phi}\left(-\omega^2 + i\frac{\omega\omega_0}{Q} + \omega_0^2\right) = \omega^2 X_0 e^{i\omega t}$$

En prenant le module : $X_m'\sqrt{\left(\omega_0^2-\omega^2\right)^2 + \left(\frac{\omega\omega_0}{Q}\right)^2} = \omega^2 X_0$

$$\Rightarrow X_m' = \frac{X_0}{\sqrt{\left(\frac{\omega_0}{\omega}\right)^2 - 1\right)^2 + \left(\frac{\omega_0}{Q\omega}\right)^2}}$$

5. Résonance si $\left(\left(\frac{\omega_0}{\omega}\right)^2 - 1\right)^2 + \left(\frac{\omega_0}{Q\omega}\right)^2$ présente un extremum si (on dérive) :

$$2\left(\frac{\omega_0^2}{\omega^2}-1\right)\cdot\omega_0^2\left(-\frac{1}{\omega^3}\right)+\frac{\omega_0^2}{Q^2}\left(-\frac{1}{\omega^3}\right)=0$$

$$\Rightarrow 2\frac{\omega_0^2}{\omega^2}-2+\frac{1}{Q^2}=0 \Rightarrow \frac{\omega_r^2}{\omega^2}=1-\frac{1}{2Q^2} \Rightarrow \omega_r=\frac{\omega_0}{\sqrt{1-1/2Q^2}}$$

Il faut $1-\frac{1}{2Q^2}>0 \Rightarrow Q>\frac{1}{\sqrt{2}}$

6. On relève sur l'enregistrement des périodes de 0,5 - 1 s, donc des fréquences de 1 - 2 Hz. Il faut choisir ω_0 de cet ordre pour avoir une réponse X'_m en amplitude maximale (ω_r est proche de ω_0, et ce d'autant plus que Q est élevé).

