# Devoir Maison n°3

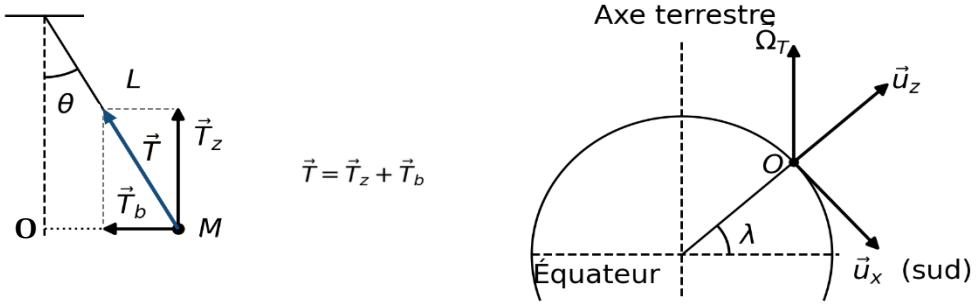
## Exercice n°1 : Le pendule de Foucault

En 1851, Léon Foucault installe sous la coupole du Panthéon (latitude $\lambda = 48,85°$) un pendule simple constitué d'une sphère de masse $m = 28\ kg$ oscillant au bout d'un filin de longueur $L = 67\ \mathrm{m}$ avec déplacement horizontal maximal de la masse par rapport à sa position d'équilibre $d = 4,0\ \mathrm{m}$.

*(Cf. https://www.youtube.com/watch?v=NJeqD2enQMk)*

Il mesure une période d'oscillation $T_0 = 16,5\ s$ mais surtout une précession du plan de ces oscillations avec une période $T_1 = 31\ h46\ min$. Il en déduit que le phénomène est dû à la rotation de la Terre et caractérise l'aspect non galiléen du référentiel terrestre.

Dans tout l'exercice on étudiera le mouvement de la masse $m$ située au point $M$ dans le référentiel terrestre en rotation par rapport au référentiel géocentrique à la vitesse $\Omega_T = 7,29 \times 10^{-5}\ rad.s^{-1}$. Par ailleurs, on négligera l'effet de la force d'inertie d'entrainement et des frottements.




**Q1.** Calculer l'angle maximal $\theta_{max}$ du fil avec la verticale. Calculer l'élévation maximale $\Delta z$ par un développement limité à l'ordre 2 et la comparer à la déviation maximale $d$. Justifier alors que l'on peut considérer que le mouvement de la masse évolue dans le plan $(O, \vec{u}_x, \vec{u}_y)$.

**Q2.** À l'aide de la coupe méridienne ci-dessus, exprimer le vecteur rotation de la Terre $\vec{\Omega}_T$ dans la base locale $(\vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$.

**Q3.** Pour $\vec{v} = \dot{x}\,\vec{u}_x + \dot{y}\,\vec{u}_y$, Montrer que la force d'inertie de Coriolis $\vec{F}_{ic} = -2m\vec{\Omega}_T \wedge \vec{v}$ s'exprime :

$$\vec{F}_{ic} = -2m\Omega_T \times (-\dot{y}sin(\lambda)\vec{u}_x + \dot{x}sin(\lambda)\vec{u}_y - \dot{y}cos(\lambda)\vec{u}_z)$$

**Q4. a)** Appliquer la 2nde loi de Newton à la masse selon l'axe $z$.

**b)** Comparer en ordre de grandeur la composante verticale de la force d'inertie de Coriolis $F_{icz}$ avec le poids $P$ (*on approximera* $\dot{y} \approx \frac{2d}{T_0}$).

**c)** En déduire que la composante verticale de la tension de fil $T_z$ peut s'approximer par : $T_z \approx mg$.

**Q5.** Pour $\theta \ll 1$, déterminer une relation entre $\theta$, $L$ et $OM$ et entre $\theta$, $T_z$ et $T_b$. En déduire l'expression de $T_b$:

$$\overrightarrow{T_b} = \frac{-mg}{L}\overrightarrow{AM} = -m\omega_0^2\overrightarrow{OM}$$

Préciser l'expression de $\omega_0$. Comparer la période propre obtenue à la période mesurée de $16,5s$.

**Q6.** Déterminer les équations du mouvement de la masse selon $x$ et $y$ dans le référentiel terrestre. (On rappelle l'expression du vecteur position en coordonnées cartésiennes : $\overrightarrow{OM} = x\,\vec{u}_x + y\vec{u}_y$).

**Q7.** On introduit la variable complexe $U = x + \mathrm{i}y$. Ajouter à l'équation en $x$ celle en $y$ multipliée par $i$, montrer que :

$$\frac{d^2U}{dt^2} + 2\mathrm{i}\omega\frac{dU}{dt} + \omega_0^2 U = 0$$

Préciser l'expression de $\omega$.

**Q8.** Dans la limite $\boldsymbol{\omega \ll \omega_0}$ et en supposant que l'on lâche initialement le pendule sans vitesse initiale à la position $\boldsymbol{x = x_0}$, $\boldsymbol{y = 0}$. On admet l'expression approchée :

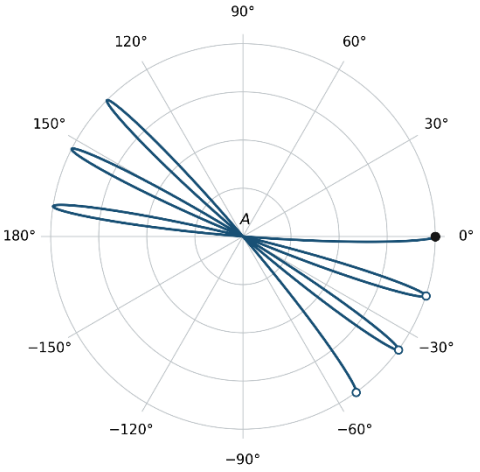
$$\boldsymbol{U(t) = x_0 cos(\omega_0 t) e^{-i\omega t}}$$

Pour suivre la rotation du plan d'oscillation, on observe la masse une fois par période d'oscillation, aux instants $\boldsymbol{t_n = nT_0}$, où $\boldsymbol{T_0 = 2\pi/\omega_0}$ et $\boldsymbol{n}$ est un entier naturel.

**a)** Que vaut $\boldsymbol{\cos(\omega_0 t_n)}$ à ces instants ? Simplifier $\boldsymbol{U(t_n)}$, puis identifier les coordonnées polaires de la masse en écrivant $\boldsymbol{U(t_n) = r_n\, e^{i\theta_n}}$. Le rayon $\boldsymbol{r_n}$ est la distance au point $\boldsymbol{O}$ et l'angle $\boldsymbol{\theta_n}$ est compté depuis l'axe $\boldsymbol{(Ox)}$ dans le sens trigonométrique.

**b)** Le point noir indique la position initiale. Sur la figure, associer à chacun des trois points blancs l'instant correspondant : $\boldsymbol{T_0}$, $\boldsymbol{2T_0}$ ou $\boldsymbol{3T_0}$. De quel angle le plan d'oscillation a-t-il tourné en une période ? Préciser le sens de cette rotation vu de dessus.

**c)** En déduire, en fonction de $\boldsymbol{\omega}$, la durée d'un tour complet du plan d'oscillation. À l'aide de l'expression de $\boldsymbol{\omega}$ obtenue à la question 7, calculer cette durée à Paris et la comparer à la valeur mesurée de $\boldsymbol{31\ h\ 46\ min}$.

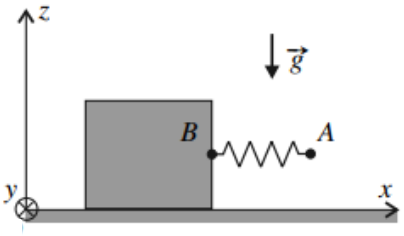



*Trajectoire vue de dessus sur trois oscillations. Pour le tracé seul, $\omega_o/\omega = 20$.*

***Remarque :*** *En pratique, le pendule de Foucault installé au Panthéon dispose d'un mécanisme lui injectant de l'énergie pour maintenir le mouvement, sans quoi les oscillations s'arrêtent au bout de quelques heures à cause des frottements de l'air.*

**Exercice n°2 : Mouvement Stick-slip (coller-glisser)**

Un bloc de masse $\boldsymbol{M}$ est posé sur une table horizontale. On note $\boldsymbol{f_s}$ et $\boldsymbol{f_d}$ les coefficients de frottement statique et dynamique entre le bloc et la table, avec $\boldsymbol{f_s > f_d}$.




Un ressort horizontal, de raideur $\boldsymbol{k}$ et de longueur à vide $\boldsymbol{\ell_0}$, est fixé au bloc en $\boldsymbol{B}$. Initialement, le bloc est immobile et le ressort est à sa longueur à vide, on fixe $\boldsymbol{x_B(0) = 0}$.

À partir de l'instant $\boldsymbol{t = 0}$, on déplace l'extrémité libre $\boldsymbol{A}$ du ressort à vitesse constante $\vec{\boldsymbol{u}} = \boldsymbol{u}\,\vec{\boldsymbol{u}}_x$, avec $\boldsymbol{u > 0}$.

On note $\boldsymbol{X(t) = x_A(t) - x_B(t) - l_0}$ l'allongement du ressort et on rappelle l'expression de la force de rappel élastique du ressort sur le bloc : $\vec{\boldsymbol{F}} = -\boldsymbol{kX(t)}\,\frac{\overrightarrow{AB}}{AB}$.

*1ère phase : Le bloc est immobile ($\boldsymbol{0 \leq t < t_1}$) :*

**Q9.** Exprimer la position $\boldsymbol{x_A(t)}$ en fonction de $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{t}$ *et* $\boldsymbol{l_0}$ puis l'allongement du ressort $\boldsymbol{X(t)}$ en fonction de $\boldsymbol{u}$ *et* $\boldsymbol{t}$. En déduire l'expression de la force de rappel exercée sur la masse $\vec{\boldsymbol{F}}$ en fonction de $\boldsymbol{k}, \boldsymbol{u}, \boldsymbol{t}$ et $\vec{\boldsymbol{u}}_x$.

**Q10.** Appliquer le principe fondamental de la dynamique. En déduire l'instant $\boldsymbol{t_1}$ auquel il se met en mouvement en fonction de $\boldsymbol{f_s}$, $\boldsymbol{M}$, $\boldsymbol{g}$, $\boldsymbol{k}$ et $\boldsymbol{u}$.

*2ème phase : Le bloc glisse ($\boldsymbol{t_1 < t < t_2}$) :*

**Q11.** Préciser la direction, le sens et la norme de la force de frottement exercée par la table sur le bloc.

**Q12.** Appliquer le principe fondamental de la dynamique. Montrer que l'équation différentielle vérifiée par l'allongement $\boldsymbol{X(t)}$ au cours de cette phase est :

$$\frac{\boldsymbol{d^2X}}{\boldsymbol{dt^2}} + \frac{\boldsymbol{k}}{\boldsymbol{M}}\boldsymbol{X} = \boldsymbol{gf_d}$$

**Q13.** Soit : $\boldsymbol{X(t) = A\cos(\omega_0(t - t_1)) + B\sin(\omega_0(t - t_1)) + \frac{f_d Mg}{k}}$, *avec* $\boldsymbol{\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{M}}}$, $\boldsymbol{(A, B) \in \mathbb{R}^2}$.
Vérifier que l'expression ci-dessus est bien solution de l'équation différentielle vérifiée par $\boldsymbol{X(t)}$.

**Q14.** Déterminer les conditions initiales $\boldsymbol{X(t_1)}$ et $\boldsymbol{\dot{X}(t_1)}$. Appliquer les conditions initiales pour trouver les expressions des constantes d'intégration $\boldsymbol{A}$ et $\boldsymbol{B}$.

*On suppose qu'à l'instant $\boldsymbol{t_2}$, le bloc entre dans une nouvelle phase d'adhérence, on admet que :*

$$\boldsymbol{X(t_2) = (2f_d - f_s)\,\frac{Mg}{k}}$$

*3ème phase : Le bloc est à nouveau immobile ($\boldsymbol{t_2 < t < t_3}$) :*

**Q15.** Sans calculer $\boldsymbol{t_2}$. Exprimer la durée $\boldsymbol{\tau = t_3 - t_2}$ pendant laquelle il reste immobile (*indication : l'allongement au seuil d'adhérence à déjà été calculé* ***Q10.***)

**Q16.** On a tracé ci-contre les courbes $\boldsymbol{X(t)}$ et $\boldsymbol{x_B(t)}$.

Justifier l'appellation de ce mouvement « coller-glisser ».

Comment évolue le mouvement lorsque $\boldsymbol{k \to \infty}$ ?

Que se passe-t-il si $\boldsymbol{f_s = f_d}$ ?

