EM3 – Champ électromagnétique

Table des matières

I Analyse vectorielle pour l'électromagnétisme **2**
1 Opérateur divergence . . . 2
2 Opérateur rotationnel . . . 2
3 Opérateurs laplacien scalaire et laplacien vectoriel . . . 2
4 Identités d'analyse vectorielle . . . 3
5 Loi locale et loi intégrale : passage de l'une à l'autre . . . 3

II Équation locale de conservation de la charge électrique **4**
1 Cas unidimensionnel . . . 4
2 Cas général . . . 4

III Équations de Maxwell **5**
1 Formulation générale . . . 5
2 Propriétés et conséquences des équations de Maxwell . . . 5
3 Compatibilité avec la conservation de la charge . . . 6
4 Passage des formulations locales aux formulations intégrales . . . 6
5 Approximation des régimes quasi stationnaires (ARQS) . . . 6

IV Champs statiques **7**
1 Équations de Maxwell en régime statique . . . 7
2 Potentiel électrostatique – Équations de Poisson et de Laplace . . . 7

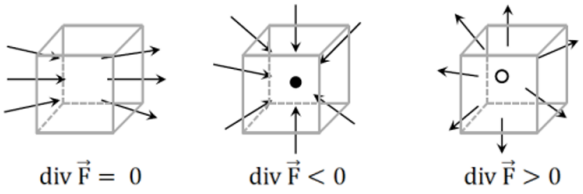
V Énergie électromagnétique **8**
1 Énergie électromagnétique . . . 8
2 Puissance volumique cédée à la matière . . . 8
3 Transport d'énergie : vecteur de Poynting . . . 9
4 Bilan d'énergie électromagnétique . . . 10

I Analyse vectorielle pour l'électromagnétisme

1 Opérateur divergence

L'opérateur divergence transforme un **champ vectoriel** en un **champ scalaire**.

Il mesure localement le **flux sortant par unité de volume** : une divergence positive traduit un flux net sortant, une divergence négative un flux net entrant.



Divergence en coordonnées cartésiennes

Pour $\vec{F} = F_x \vec{e}_x + F_y \vec{e}_y + F_z \vec{e}_z$:

$$\boxed{\text{div}\,\vec{F} = \frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z}.}$$

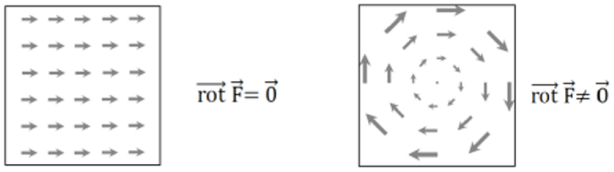
L'opérateur **nabla** permet d'écrire :

$$\vec{\nabla} = \vec{e}_x \frac{\partial}{\partial x} + \vec{e}_y \frac{\partial}{\partial y} + \vec{e}_z \frac{\partial}{\partial z}, \qquad \boxed{\text{div}\,\vec{F} = \vec{\nabla} \cdot \vec{F}.}$$

2 Opérateur rotationnel

L'opérateur rotationnel transforme un **champ vectoriel** en un **champ vectoriel**.

Il décrit localement la **circulation du champ** autour d'un point.



Rotationnel en coordonnées cartésiennes

$$\boxed{\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{F} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial F_z}{\partial y} - \dfrac{\partial F_y}{\partial z} \\ \dfrac{\partial F_x}{\partial z} - \dfrac{\partial F_z}{\partial x} \\ \dfrac{\partial F_y}{\partial x} - \dfrac{\partial F_x}{\partial y} \end{pmatrix}_{(\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)}} \qquad \boxed{\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{F} = \vec{\nabla} \wedge \vec{F}.}$$

3 Opérateurs laplacien scalaire et laplacien vectoriel

Le **laplacien scalaire** transforme un **champ scalaire** f en un **champ scalaire**. Il mesure **la courbure spatiale** du champ. Il permet de comparer la valeur du champ en un point à ses valeurs dans un voisinage immédiat.

Laplacien scalaire en coordonnées cartésiennes

$$\boxed{\Delta f = \text{div}(\overrightarrow{\text{grad}} f) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}.}$$

Pour six points voisins suffisamment proches, équidistants de M selon les trois axes, $f(M)$ est **inférieure à leur moyenne** si $\Delta f(M) > 0$, et **supérieure** si $\Delta f(M) < 0$.

Le laplacien vectoriel s'applique à un **champ vectoriel** et donne un **champ vectoriel**. Dans une base cartésienne, il s'obtient en appliquant le laplacien scalaire à chaque composante.

Laplacien vectoriel en coordonnées cartésiennes

Pour $\vec{F} = F_x \vec{e}_x + F_y \vec{e}_y + F_z \vec{e}_z$:

$$\boxed{\Delta \vec{F} = (\Delta F_x)\vec{e}_x + (\Delta F_y)\vec{e}_y + (\Delta F_z)\vec{e}_z.}$$

Soit, de manière équivalente :

$$\boxed{\Delta \vec{F} = \frac{\partial^2 \vec{F}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \vec{F}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \vec{F}}{\partial z^2}.}$$

4 Identités d'analyse vectorielle

Pour un champ scalaire f et un champ vectoriel $\vec{F}$ suffisamment réguliers :

Identités d'analyse vectorielle

$$\boxed{\overrightarrow{\text{rot}}(\overrightarrow{\text{grad}} f) = \vec{0}} \qquad \boxed{\text{div}(\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{F}) = 0}$$

$$\boxed{\text{div}(\overrightarrow{\text{grad}} f) = \Delta f} \qquad \boxed{\overrightarrow{\text{rot}}(\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{F}) = \overrightarrow{\text{grad}}(\text{div}\,\vec{F}) - \Delta \vec{F}}$$

5 Loi locale et loi intégrale : passage de l'une à l'autre

Notion de loi locale et de loi intégrale

Une loi physique reliant deux champs $X(M,t)$ et $Y(M,t)$ est dite :

— **locale** si elle relie leurs valeurs et leurs dérivées au même point M ;
— **intégrale** si elle relie des propriétés globales de ces champs sur un domaine étendu de l'espace.

Les lois locales font souvent intervenir des équations différentielles et les opérateurs d'analyse vectorielle. Les lois intégrales font notamment apparaître des **flux** ou des **circulations**.

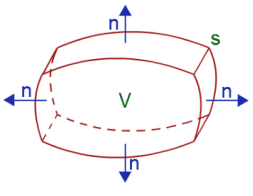
Théorèmes reliant une loi locale et une loi intégrale

Les champs sont supposés suffisamment réguliers pour appliquer les théorèmes ci-dessous.

Théorème de Green–Ostrogradski

Soit $\mathcal{V}$ un volume délimité par une surface **fermée** $\mathcal{S}$, orientée vers l'extérieur.

$$\boxed{\iiint_{\mathcal{V}} \text{div}\,\vec{F}\,\text{d}\tau = \oiint_{\mathcal{S}} \vec{F} \cdot \text{d}\vec{S}}$$

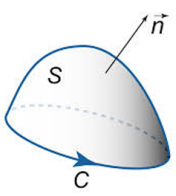


Ce théorème relie la **divergence dans un volume** au **flux à travers sa frontière**.

Théorème de Stokes

Soit $\mathcal{S}$ une surface de bord $\mathcal{C}$, contour **fermé**. Leurs orientations sont liées par la règle de la main droite.

$$\boxed{\iint_{\mathcal{S}} \overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{F} \cdot \text{d}\vec{S} = \oint_{\mathcal{C}} \vec{F} \cdot \text{d}\vec{\ell}}$$



Ce théorème relie le **flux du rotationnel** à la **circulation sur le contour**.

II Équation locale de conservation de la charge électrique

La **charge électrique se conserve** : la charge contenue dans un volume fixe ne peut varier que par le passage de charges à travers sa frontière. Il n'existe ni création ni destruction de charge électrique nette.

1 Cas unidimensionnel ⋆

2 Cas général

Dans le cas précédent, div $\vec{j} = \partial j/\partial x$. Le bilan se généralise à trois dimensions :

Équation locale de conservation de la charge

$$\boxed{\frac{\partial \rho(M,t)}{\partial t} + \text{div}\,\vec{j}(M,t) = 0.}$$

Une divergence positive du courant traduit un flux net sortant d'un petit volume et donc une diminution locale de ρ.

Remarque : les expressions de la divergence en coordonnées cylindriques ou sphériques seront fournies si nécessaire.

III Équations de Maxwell

En régime variable, les champs électrique et magnétique sont **couplés**. Ils constituent le **champ électromagnétique** $(\vec{E}, \vec{B})$.

1 Formulation générale ★

Équation	Forme locale	Forme intégrale	Vide sans sources	ARQS magnétique	Régime statique
Maxwell-Gauss (M.G)					
Maxwell-Faraday (M.F)					
Maxwell-flux (M.Φ.) (Maxwell-Thomson)					
Maxwell-Ampère (M.A.)					

Notations :

$$\Phi_B = \iint_{\mathcal{S}} \vec{B} \cdot \mathrm{d}\vec{S}, \qquad \Phi_E = \iint_{\mathcal{S}} \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{S}, \qquad I_{\text{enl}} = \iint_{\mathcal{S}} \vec{j} \cdot \mathrm{d}\vec{S}.$$

Q_{int} est la charge à l'intérieur de la surface fermée ; e_{ind} est la force électromotrice induite le long du contour fixe $\mathcal{C}$. Les surfaces et contours utilisés dans les formulations intégrales sont fixes dans le référentiel d'étude.

Orientations : les surfaces fermées sont orientées vers l'extérieur. Pour une surface s'appuyant sur un contour $\mathcal{C}$, les orientations sont liées par la règle de la main droite.

2 Propriétés et conséquences des équations de Maxwell

— **Sources :** Maxwell-Gauss et Maxwell-Ampère font explicitement intervenir les densités de charge ρ et de courant $\vec{j}$.

— **Couplage :** Maxwell-Faraday et Maxwell-Ampère relient les variations spatiales d'un champ aux variations temporelles de l'autre. En régime stationnaire, les dérivées temporelles s'annulent : les équations électriques et magnétiques se découplent.

— **Linéarité :** les équations sont linéaires en les champs et les sources. Le **principe de superposition** s'applique : à une somme de sources correspond la somme des champs associés, avec des conditions aux limites compatibles.

— **Lois de conservation :** les équations de Maxwell impliquent la conservation locale de la charge électrique et permettent d'établir un bilan d'énergie électromagnétique, étudié dans la suite du cours.

3 Compatibilité avec la conservation de la charge

Application n°1 : Retrouver la conservation de la charge à partir des équations de Maxwell

Énoncé :

1. Appliquer la divergence à l'équation de Maxwell-Ampère et simplifier grâce au formulaire d'analyse vectorielle.
2. Utiliser Maxwell-Gauss pour retrouver l'équation locale de conservation de la charge.

4 Passage des formulations locales aux formulations intégrales ⋆

5 Approximation des régimes quasi stationnaires (ARQS)

L'**ARQS** (Approximation des Régimes Quasi Stationnaires) consiste à négliger un des deux **termes de couplage** entre les champs électrique et magnétique (termes de dérivées temporelles) dans les équations de Maxwell.

Elle constitue ainsi un intermédiaire entre le **régime statique**, où toutes les dérivées temporelles sont nulles, et le **régime variable général**, où les deux termes de dérivée temporelle doivent être conservés.

Selon le terme négligé, on distingue l'**ARQS magnétique**, la plus fréquente dans les situations étudiées, de l'**ARQS électrique**, hors programme.

ARQS magnétique

L'ARQS magnétique consiste à **négliger le courant de déplacement devant le courant de conduction** :

$$\left\| \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right\| \ll \| \vec{j} \|$$

Elle suppose des variations temporelles suffisamment lentes et une prédominance des effets des courants sur ceux des charges.

Les équations de Maxwell s'écrivent alors :

Maxwell-Gauss	Maxwell-Faraday	Maxwell-flux	Maxwell-Ampère
$\operatorname{div} \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$	$\overrightarrow{\operatorname{rot}}\, \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$	$\operatorname{div} \vec{B} = 0$	$\overrightarrow{\operatorname{rot}}\, \vec{B} = \mu_0 \vec{j}$

Seule l'équation de Maxwell-Ampère est modifiée : **les variations temporelles du champ magnétique restent sources de champ électrique, tandis que la contribution des variations temporelles du champ électrique au champ magnétique est négligée.**

Conséquences : cadre de l'induction électromagnétique

Dans l'ARQS magnétique, le calcul de $\vec{B}$ se fait **comme en magnétostatique, à chaque instant**. Le champ magnétique peut cependant varier dans le temps.

L'équation de Maxwell-Faraday reste valable et conduit, pour un contour fixe, à la loi de Faraday-Lenz :

$$e_{\text{ind}} = \oint_{\mathcal{C}} \vec{E} \cdot \vec{\mathrm{d}\ell} = -\frac{\mathrm{d}\Phi_B}{\mathrm{d}t}.$$

L'ARQS magnétique constitue ainsi un cadre adapté à l'étude des **phénomènes d'induction** étudiés en première année.

IV Champs statiques

1 Équations de Maxwell en régime statique

Équations de Maxwell en régime statique

Lorsque les champs et les sources ne dépendent pas du temps :

Maxwell-Gauss	Maxwell-Faraday	Maxwell-flux	Maxwell-Ampère
$\operatorname{div}\vec{E} = \dfrac{\rho}{\varepsilon_0}$	$\overrightarrow{\operatorname{rot}}\,\vec{E} = \vec{0}$	$\operatorname{div}\vec{B} = 0$	$\overrightarrow{\operatorname{rot}}\,\vec{B} = \mu_0\,\vec{j}$

Les champs électrique et magnétique sont **découplés** : on retrouve l'électrostatique et la magnétostatique.

Les formulations intégrales redonnent le **théorème de Gauss** et le **théorème d'Ampère** de la magnétostatique :

$$\oiint_{\mathcal{S}} \vec{E}\cdot\mathrm{d}\vec{S} = \frac{Q_{\text{int}}}{\varepsilon_0}, \qquad \oint_{\mathcal{C}} \vec{B}\cdot\mathrm{d}\vec{\ell} = \mu_0 I_{\text{enl}}.$$

2 Potentiel électrostatique – Équations de Poisson et de Laplace ⋆

Existence du potentiel électrostatique

Équations de Poisson et de Laplace

Le potentiel électrostatique vérifie :

Équation de Poisson	Équation de Laplace
$\Delta V = -\dfrac{\rho}{\varepsilon_0}$	$\Delta V = 0$ si $\rho = 0$

Analogie avec la gravitation

Application n°2 : Équations de Poisson et de Laplace gravitationnelles

Énoncé :

On note $\mathcal{G}$ la constante de gravitation, $\vec{G}$ le champ gravitationnel, Φ son potentiel et ρ_m la masse volumique.

1. Comparer les champs créés par une charge ponctuelle q et par une masse ponctuelle m placées en O.
2. En déduire le potentiel gravitationnel d'une masse ponctuelle, nul à l'infini, et sa relation avec $\vec{G}$.
3. Écrire l'analogue gravitationnel de Maxwell-Gauss.
4. En déduire les équations de Poisson et de Laplace gravitationnelles.

Équations de Poisson et de Laplace gravitationnelles

Le potentiel gravitationnel vérifie :

Équation de Poisson	Équation de Laplace
$\Delta\Phi = 4\pi\mathcal{G}\rho_m$	$\Delta\Phi = 0$ si $\rho_m = 0$

V Énergie électromagnétique

Le champ électromagnétique peut stocker de l'énergie, la transporter et en échanger avec la matière.

1 Énergie électromagnétique

Les expressions rencontrées en électrostatique et en magnétostatique se généralisent aux champs variables dans le temps. On utilise ici les expressions dans le vide, également adaptées aux conducteurs étudiés en négligeant les effets de polarisation et d'aimantation du milieu.

Énergie stockée dans le champ électromagnétique

La densité volumique d'énergie électromagnétique est :

$$\boxed{u_{\text{em}} = \frac{\varepsilon_0 E^2}{2} + \frac{B^2}{2\mu_0}} \qquad \text{en J} \cdot \text{m}^{-3}.$$

L'énergie électromagnétique contenue dans un volume $\mathcal{V}$ vaut :

$$\delta U_{\text{em}} = u_{\text{em}}\, \mathrm{d}\tau, \qquad \boxed{U_{\text{em}}(t) = \iiint_{\mathcal{V}} u_{\text{em}}(M,t)\, \mathrm{d}\tau.}$$

2 Puissance volumique cédée à la matière ⋆

Cas général

Puissance cédée par le champ à la matière

On note p la puissance volumique cédée à la matière :

$$\boxed{p = \frac{\delta \mathcal{P}}{\mathrm{d}\tau} = \vec{j} \cdot \vec{E}} \qquad \text{en W} \cdot \text{m}^{-3},$$

Cette puissance est **algébrique** : si $p > 0$, la matière reçoit de l'énergie du champ ; si $p < 0$, elle lui en fournit.

Cas d'un conducteur ohmique : loi d'Ohm locale et effet Joule

Un conducteur contient des **porteurs de charge mobiles**. Dans un métal, il s'agit des électrons de conduction. En l'absence de champ électrique, leur mouvement désordonné ne produit pas de courant électrique.

Lorsqu'un champ électrique est appliqué, les porteurs subissent la force électrique $q\vec{E}$. Un mouvement d'ensemble se superpose alors à leur agitation : il apparaît une densité de courant $\vec{j}$.

Loi d'Ohm locale

Dans un **conducteur ohmique isotrope**, au repos dans le référentiel d'étude, la densité de courant est proportionnelle au champ électrique :

$$\boxed{\vec{j}(M,t) = \gamma\, \vec{E}(M,t).}$$

Le coefficient $\gamma > 0$ est la **conductivité électrique** du matériau. Il s'exprime en $\Omega^{-1} \cdot \text{m}^{-1}$.

Ordres de grandeur :

Métal : $\gamma \sim 10^7\ \Omega^{-1}\cdot\mathrm{m}^{-1}$.

Eau de mer : $\gamma \sim 5\ \Omega^{-1}\cdot\mathrm{m}^{-1}$.

Silicium intrinsèque (non dopé), vers 300 K : $\gamma \sim 3{,}8\times 10^{-4}\ \Omega^{-1}\cdot\mathrm{m}^{-1}$.

Bois très sec : $\gamma \sim 10^{-15}\ \Omega^{-1}\cdot\mathrm{m}^{-1}$.

Conséquence énergétique : l'effet Joule.

La puissance volumique cédée par le champ aux charges vaut $p = \vec{j}\cdot\vec{E}$. Pour un conducteur ohmique, on la note p_J. En utilisant $\vec{j} = \gamma\vec{E}$:

$$p_J = \gamma\vec{E}\cdot\vec{E} = \gamma E^2 = \frac{j^2}{\gamma}.$$

Puissance volumique dissipée par effet Joule

Dans un conducteur ohmique, la puissance volumique dissipée par effet Joule s'exprime :

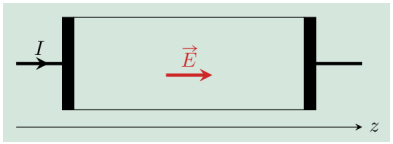
$$\boxed{p_J = \vec{j}\cdot\vec{E} = \gamma E^2 = \frac{j^2}{\gamma}} \qquad \text{en } \mathrm{W}\cdot\mathrm{m}^{-3}.$$

Le champ cède de l'énergie aux porteurs, qui la transmettent au matériau par leurs interactions : l'énergie électromagnétique est convertie en énergie interne. C'est l'**effet Joule**.

Application n°3 : Puissance dissipée par effet Joule

Énoncé :

On considère un conducteur ohmique cylindrique de longueur ℓ, de rayon a et de conductivité uniforme γ. Il est parcouru par un courant stationnaire d'intensité I, uniformément réparti sur sa section et dirigé selon $\vec{e}_z$. On néglige les effets de bord.



Déterminer la puissance totale dissipée par effet Joule $\mathcal{P}_J$ en fonction de I, ℓ, a et γ.

3 Transport d'énergie : vecteur de Poynting

Le champ électromagnétique peut transporter de l'énergie. Ce transport, présent également en régime stationnaire, est décrit par le **vecteur de Poynting**.

Vecteur de Poynting et puissance rayonnée

Le vecteur de Poynting décrit le transport de l'énergie électromagnétique. Son expression est admise :

$$\boxed{\vec{\Pi} = \frac{\vec{E}\wedge\vec{B}}{\mu_0}} \qquad \text{en } \mathrm{W}\cdot\mathrm{m}^{-2}.$$

La **puissance électromagnétique traversant une surface orientée** $\mathcal{S}$ est le flux du vecteur de Poynting :

$$\delta\mathcal{P}_{\text{ray}} = \vec{\Pi}\cdot\mathrm{d}\vec{S} \qquad \Longrightarrow \qquad \boxed{\mathcal{P}_{\text{ray}} = \iint_{\mathcal{S}} \vec{\Pi}\cdot\mathrm{d}\vec{S}.}$$

L'énergie algébrique traversant cette surface pendant $\mathrm{d}t$ vaut : $\boxed{\delta U_{\text{tr}} = \mathcal{P}_{\text{ray}}\,\mathrm{d}t.}$

Remarque :

Pour une **surface fermée** d'un volume $\mathcal{V}$, la **puissance sortante** s'exprime : $\mathcal{P}_{\text{ray}} = \oiint_{\mathcal{S}} \vec{\Pi}\cdot\mathrm{d}\vec{S}$.

Si $\mathcal{P}_{\text{ray}} > 0$, l'énergie sort du volume ; si $\mathcal{P}_{\text{ray}} < 0$, elle y entre.

Ordres de grandeur :

— La densité de flux d'énergie solaire à la distance de la Terre, hors atmosphère et sur une surface perpendiculaire aux rayons, vaut $\langle \Pi_{\text{sol}} \rangle \sim 1{,}4 \times 10^3 \text{ W} \cdot \text{m}^{-2}$.

— Pour un laser de puissance 1 mW et de diamètre 1 mm : $\langle \Pi_{\text{laser}} \rangle \sim 10^3 \text{ W} \cdot \text{m}^{-2}$.

Application n°4 : Flux du vecteur de Poynting

Énoncé :

On reprend le conducteur ohmique cylindrique de rayon a, de longueur ℓ et de conductivité γ, parcouru par un courant stationnaire I. En négligeant les effets de bord, les champs intérieurs sont :

$$\overrightarrow{E} = \frac{I}{\gamma \pi a^2} \overrightarrow{e}_z, \qquad \overrightarrow{B}(r) = \frac{\mu_0 I r}{2\pi a^2} \overrightarrow{e}_\theta \qquad (0 \leq r \leq a).$$

1. Exprimer $\overrightarrow{\Pi}(r)$ et commenter son sens.
2. Calculer la puissance électromagnétique sortante et la relier à la puissance dissipée par effet Joule.

4 Bilan d'énergie électromagnétique ⋆

Équation locale de Poynting

$$\boxed{\frac{\partial u_{\text{em}}}{\partial t} + \text{div}\, \overrightarrow{\Pi} = -\overrightarrow{j} \cdot \overrightarrow{E}.}$$

Chaque terme s'exprime en $\text{W} \cdot \text{m}^{-3}$:

— $\partial u_{\text{em}}/\partial t$ décrit la variation locale de l'énergie électromagnétique stockée ;

— $\text{div}\, \overrightarrow{\Pi}$ décrit le flux net sortant par unité de volume ;

— $p = \overrightarrow{j} \cdot \overrightarrow{E}$ décrit la puissance volumique cédée par le champ à la matière ; elle est positive ou nulle pour l'effet Joule dans un conducteur ohmique.

Ce bilan reste valable lorsque la matière n'est pas ohmique.

Lien avec la conservation de la charge : les deux bilans possèdent un terme de stockage et un terme de transport. Le bilan électromagnétique comporte en plus un échange avec la matière : l'énergie du champ seul n'est donc pas une grandeur conservée. L'énergie totale du champ et de la matière se conserve pour un système isolé.

Application n°5 : Bilan local d'énergie du conducteur

Énoncé :

Vérifier le bilan local dans le même conducteur, pour lequel $p = p_J$. On rappelle :

$$p_J = \frac{I^2}{\gamma \pi^2 a^4}, \qquad \Pi_r(r) = -\frac{I^2 r}{2\gamma \pi^2 a^4}.$$

Pour un champ radial axisymétrique, on donne :

$$\text{div}\, \overrightarrow{\Pi} = \frac{1}{r} \frac{\partial (r \Pi_r)}{\partial r}.$$