# Equations de Maxwell

## Exercice 12.1. Chauffage par induction ★★ (M.F, Loi d'Ohm locale)

On étudie dans cet exercice un dispositf modèle permettant de chauffer un cylindre métallique par induction électromagnétique, potentiellement jusqu'à une température supérieure à sa température de fusion. Il s'agit d'une bobine parcourue par un courant alternatif $i(t) = I_0\cos(\omega t)$ de forte intensité. Au centre de cette bobine est placé un cylindre conducteur, qui est le métal à chauffer, de conductivité électrique $\gamma$. Ce principe est par exemple utilisé dans des dispositifs de soudure électromagnétique.

**1 -** Faire un schéma du dispositif. Donner sans calcul l'expression du champ créé par la bobine. Pour simplifier, on se place dans l'ARQS magnétique et on néglige tout effet de bord, ce qui revient à assimiler la bobine à un solénoïde infini.

**2 -** Justifier qu'un champ électrique apparaît au sein de la bobine. En déduire qualitativement pourquoi le métal placé au centre chauffe.

**3 -** On peut montrer que le champ électrique induit dans le métal est de la forme $\vec{E} = E_\theta(r,t)\vec{e}_\theta$. En utilisant l'équation de Maxwell-Faraday, établir son expression en fonction notamment de $r$ et $I_0$.

**4 -** En déduire la densité de courant induite dans le matériau, puis l'expression de la puissance volumique dissipée par effet Joule. Où le métal va-t-il fondre en premier ?

*Donnée :* $\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{A} = \left(\frac{1}{r}\frac{\partial A_z}{\partial\theta} - \frac{\partial A_\theta}{\partial z}\right)\vec{e}_r + \left(\frac{\partial A_r}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial r}\right)\vec{e}_\theta + \frac{1}{r}\left(\frac{\partial(rA_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial A_r}{\partial\theta}\right)\vec{e}_z$

## Exercice 12.2. Manipulation des équations de Maxwell ★★ (Equation différentielle d'ordre 2)

On suppose que règne dans l'espace le champ électromagnétique

$$\begin{cases}\vec{E}(M,t) = f(z)\,\mathrm{e}^{-t/\tau}\vec{e}_x\\ \vec{B}(M,t) = g(z)\,\mathrm{e}^{-t/\tau}\vec{e}_y\end{cases}$$

où $\tau$ est une constante de temps et $f$, $g$ deux fonctions que l'on cherche à déterminer. On suppose que l'espace est vide de charges et de courants.

**1 -** Vérifier que la forme de ces deux champs est compatible avec les équations de Maxwell-Gauss et Maxwell-Thomson.

**2 -** Montrer que l'équation de Maxwell-Faraday impose une relation entre $g(z)$ et $f'(z)$.

**3 -** Montrer que l'équation de Maxwell-Ampère impose une relation entre $f(z)$ et $g'(z)$.

**4 -** En déduire une équation différentielle vérifiée par $f$. La résoudre en supposant que $\vec{E}(z=0,t=0) = E_0\vec{e}_x$ et que le champ électrique est nul en $z \to +\infty$ à tout instant.

**5 -** En déduire l'expression complète du champ électromagnétique.

## Exercice 12.3. Potentiel gravitationnel ★★ (Gauss gravitationnel, équation de Poisson et de Laplace)

On rappelle que le champ électrique et le potentiel électrostatiques créés par une sphère de centre $O$, de rayon $R$, uniformément chargée en volume avec la densité volumique de charges $\rho$ en tout point $M$ de l'espace sont de la forme :

$$\vec{E}(M) = \begin{cases}\dfrac{\rho R^3}{3\varepsilon_0 r^2}\vec{u}_r & \text{pour r} > \text{R}\\ \dfrac{\rho r}{3\varepsilon_0}\vec{u}_r & \text{pour r} < \text{R}\end{cases} \quad \text{et} \quad V = \begin{cases}\dfrac{\rho R^3}{3\varepsilon_0 r} & \text{pour r} > \text{R}\\ \dfrac{-\rho}{2\varepsilon_0}\left(\dfrac{r^2}{3} - R^2\right) & \text{pour r} < \text{R}\end{cases}$$

Le potentiel ayant été choisi nul lorsque le point $M$ est à l'infini.

1. Rappeler les analogies entre l'expression du champ gravitationnel-électrique en $M$ créé par une particule massique-chargée en $O$.
2. En déduire l'expression du champ et du potentiel gravitationnels créés par une sphère de centre $O$, de rayon $R$, uniformément répartie en masse avec la densité volumique de masse $\mu$ en tout point $M$.
3. Retrouver ces résultats en utilisant le théorème de Gauss gravitationnel et la relation

$$\vec{G}(M) = -\overrightarrow{\text{grad}}\,\Phi(M)\,.$$

4. Les équations locales du champ $\vec{G}$ sont-elles vérifiées ?
5. Les équations de Poisson et de Laplace sont-elles vérifiées à l'intérieur et à l'extérieur de la sphère ?

**Expression de la divergence en coordonnées sphériques** :

$$\text{div}\,\vec{a} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial\left(r^2 a_r\right)}{\partial r} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial\left(\sin\theta a_\theta\right)}{\partial\theta} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial a_\varphi}{\partial\varphi}$$

**Expression du rotationnel en coordonnées sphériques** :

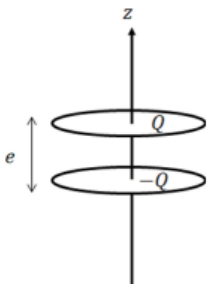
$$\overrightarrow{\text{rot}}\,\overrightarrow{a} = \begin{pmatrix} \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial(\sin\theta a_\varphi)}{\partial\theta} - \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial a_\theta}{\partial\varphi} \\ \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial a_r}{\partial\varphi} - \frac{1}{r}\frac{\partial(r a_\varphi)}{\partial r} \\ \frac{1}{r}\frac{\partial(r a_\theta)}{\partial r} - \frac{1}{r}\frac{\partial a_r}{\partial\theta} \end{pmatrix}$$

**Expression du Laplacien scalaire en coordonnées sphériques** :

$$\Delta U = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial U}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial U}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial^2 U}{\partial\varphi^2}$$

## Bilan d'énergie électromagnétique

### □ Exercice 12.4. Bilan d'énergie dans un condensateur en régime stationnaire ★




Soit un condensateur plan fonctionnant en régime stationnaire.

1. Rappeler l'expression du champ $\overrightarrow{E}$ entre les armatures d'un condensateur plan infini. Dans quel cas peut-on assimiler un condensateur plan au condensateur infini ?
2. Exprimer l'énergie électrique dans le condensateur en fonction de $e$, $S$ et $\varepsilon_0$. En se rappelant que $U = \dfrac{Qe}{S\varepsilon_0}$, retrouver un résultat vu en électricité de première année.

### □ Exercice 12.5. Bilan d'énergie dans un solénoïde en régime stationnaire ★

On a montré qu'à l'intérieur du solénoïde infini d'axe $(Oz)$, $\overrightarrow{B} = \mu_0 n I \overrightarrow{e}_z$. Lorsque le solénoïde est de longueur finie $\ell$, l'expression est une approximation valable à condition que les effets de bords soient négligeables, c'est-à-dire lorsque $\ell$ est très grand devant le rayon $R$ du solénoïde.

1. Exprimer l'énergie magnétique dans le solénoïde.
2. L'inductance d'une bobine s'exprimer comme $L = \mu_0\dfrac{N^2}{\ell}\pi R^2$. En déduire une expression de l'énergie magnétique donnée en première année.

### □ Exercice 12.6. Bilan d'énergie dans un milieu ohmique ★★ (Vecteur de Poynting)

L'espace compris entre les plans $z = -\dfrac{a}{2}$ et $z = \dfrac{a}{2}$ est rempli d'un milieu conducteur ohmique, de conductivité $Y$, parcouru par une densité volumique de courant uniforme et constante $\overrightarrow{j}(M) = j\overrightarrow{u}_x$.

1. Par des considérations de symétrie, déterminer la direction du champ magnétique $\overrightarrow{B}(M)$ créé par cette distribution en un point $M$. En déduire $\overrightarrow{B}(M)$ à l'intérieur du milieu conducteur en intégrant l'une des équations de Maxwell.
2. Exprimer le vecteur de Poynting, la densité volumique d'énergie électromagnétique, la puissance volumique dissipée dans le conducteur.
3. Faire un bilan d'énergie électromagnétique pour le volume parallèlépipèdique $\left[\dfrac{-c}{2},\dfrac{c}{2}\right]\times\left[-\dfrac{b}{2},\dfrac{b}{2}\right]\times\left[-\dfrac{a}{2},\dfrac{a}{2}\right]$.

### □ Exercice 12.7. Décharge d'un conducteur dans l'air ★★ (Bilan en régime transitoire)

Une boule conductrice, de centre $O$ et de rayon $R$, porte initialement la charge $Q_0$ uniformément répartie sur sa surface. Elle est abandonnée dans l'air supposé légèrement conducteur, de conductivité $\gamma$ et initialement localement neutre ($\rho(M, t = 0) = 0$ en tout point $M$ à l'extérieur de la boule). On cherche le champ électromagnétique $(\overrightarrow{E}(M,t), \overrightarrow{B}(M,t))$ en un point $M$ de l'espace repéré par ses coordonnées sphériques de centre $O$.

1. Déterminer $\overrightarrow{E}(M, t = 0)$ à l'extérieur de la boule.
2. Déterminer $\overrightarrow{B}(M, t)$ à l'extérieur de la boule.
3. En utilisant l'identité de Poynting, $\dfrac{\partial u_{em}}{\partial t} + \text{div}\ \overrightarrow{\Pi} = -\overrightarrow{j}\cdot\overrightarrow{E}$, trouver le champ électrique $\overrightarrow{E}(M, t)$ à l'extérieur de la boule.
4. Montrer $\rho(M, t) = 0$ à l'extérieur de la boule.
5. Déterminer la charge $Q(t)$ portée par la boule à l'instant $t$.
6. Calculer de deux façons différentes l'énergie totale dissipée dans le milieu entre les instants $t = 0$ et $t = \infty$. Commenter.