Concours Centrale-Supélec 2021

Épreuve de mathématiques I, PSI, quatre heures

(corrigé)

I - Marche aléatoire sur un graphe

Dans tout ce corrigé, je note $(\Omega, \mathcal{A}, \mathrm{P})$ un espace probabilisé modélisant cette expérience.

I.A – Résultats généraux

Q 1. Soit $k \in \mathbb{N}$. Si, pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, on appelle $A_i^{(k)}$ l'évènement : « à l'étape k, le point est situé au sommet i », alors la famille $(A_i^{(k)})_{1 \leqslant i \leqslant n}$ est un système complet d'évènements (le point est nécessairement en un sommet à chaque étape, et un seul), donc la somme de leurs probabilités égale 1 :

$$\sum_{i=1}^{n} \mathrm{P}\left(A_i^{(k)}\right) = \mathrm{P}\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i^{(k)}\right) = \mathrm{P}(\Omega) = 1.$$

Or, avec les notations de l'énoncé, la probabilité de $A_i^{(k)}$ est $p_i^{(k)}$ pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, d'où le résultat.

Q 2. Soit $k \in \mathbb{N}$. Avec les notations de la question précédente, si l'on applique la formule des probabilités totales avec le système complet d'évènements $(A_i^{(k)})_{1 \leqslant i \leqslant n}$, on obtient :

$$\forall j \in [\![1, n]\!], \quad \mathrm{P}\left(A_j^{(k+1)}\right) = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{P}\left(A_i^{(k)}\right) \mathrm{P}_{A_i^{(k)}}\left(A_j^{(k+1)}\right).$$

Or, par hypothèse de l'énoncé, la probabilité conditionnelle de $A_j^{(k+1)}$ sachant $A_i^{(k)}$ ne dépend pas de l'étape k, et est égale à $t_{i,j}$, donc cette égalité devient :

$$\forall j \in [\![1, n]\!], \quad p_j^{(k+1)} = \sum_{i=1}^{n} p_i^{(k)} t_{i,j}.$$

Ces égalités se résument matriciellement en : $P^{(k+1)} = P^{(k)} T$, d'où le résultat.

Q 3. Une récurrence facile donne : $\forall k \in \mathbb{N}$, $P^{(k)} = P^{(0)} T^k$.

Q 4. Si la suite de vecteurs $(P^{(k)})_{k \in \mathbb{N}}$ converge vers un vecteur P, alors $(P^{(k+1)})_{k \in \mathbb{N}}$ également. De plus, l'application $L \mapsto LT$ est continue sur $\mathrm{M}_{1,n}(\mathbb{R})$ en tant qu'application linéaire sur un espace vectoriel réel de dimension finie ; donc, par caractérisation séquentielle de la continuité, on a :

$$\lim_{k \to +\infty} P^{(k)} T = PT.$$

D'après tout ce qui précède, prendre la limite quand $k \to +\infty$ dans l'égalité : $\forall k \in \mathbb{N}$, $P^{(k+1)} = P^{(k)} T$, nous donne : $P = PT$, d'où la première assertion.

Pour montrer que le vecteur limite $P = (p_1, \ldots, p_n)$ vérifie : $\forall i \in \mathbb{N}$, $p_i \geqslant 0$, notons que pour tout $i \in [\![1, n]\!]$ la suite $\left(p_i^{(k)}\right)_{k \in \mathbb{N}}$ converge vers p_i (puisque $(P^{(k)})_{k \in \mathbb{N}}$ converge vers P, ce qui implique la convergence composante par composante). Or les $p_i^{(k)}$ sont des probabilités, donc sont des réels positifs pour tout $i \in [\![1, n]\!]$ et tout $k \in \mathbb{N}$. Prendre la limite quand $k \to +\infty$ dans l'inégalité :

$$\forall i \in [\![1, n]\!], \quad p_i^{(k)} \geqslant 0$$

implique : $\forall i \in [\![1, n]\!]$, $p_i \geqslant 0$.

Enfin, rappelons que d'après la première question, on a : $\forall k \in \mathbb{N}$, $\sum\limits_{i=1}^{n} p_i^{(k)} = 1$. Par conséquent, quand $k \to +\infty$, l'égalité rappelée ci-avant devient : $\sum\limits_{i=1}^{n} p_i = 1$, d'où la dernière propriété demandée.

I.B – Marche aléatoire sur un tétraèdre

Q 5. D'après la description du graphe donnée, et l'équiprobabilité de se déplacer sur chaque sommet adjacent, on a :

$$T = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\left(J_4 - I_4\right).$$

Q 6. La matrice T est symétrique et à coefficients réels, donc d'après le théorème spectral elle est diagonalisable dans une base orthonormée de vecteurs propres (la matrice de passage de la base canonique dans cette base orthonormée est alors une matrice orthogonale). Précisons les valeurs propres de T : la matrice $T + \frac{1}{3}\mathrm{I}_3 = \frac{1}{3}J_4$ est de rang 1, donc d'après le théorème du rang le sous-espace propre de T associé à la valeur propre $-\frac{1}{3}$ est de dimension 3. Si l'on note $\lambda \in \mathbb{R}$ la dernière valeur propre de T (où on les compte avec multiplicités) alors, la trace étant la somme des valeurs propres, on a : $\mathrm{tr}(T) = 0 = 3 \times \left(-\frac{1}{3}\right) + \lambda = -1 + \lambda$, donc : $\lambda = 1$.

On a déterminé les quatre valeurs propres de T, comptées avec multiplicités : $-\frac{1}{3}$ est valeur propre triple et 1 est valeur propre simple. En récapitulant tout ce que nous avons dit, on en déduit qu'il existe une matrice orthogonale $Q \in \mathrm{O}_4(\mathbb{R})$ telle que :

$$T = Q \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} Q^{-1} = \frac{1}{3} Q \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} Q^{\top},$$

d'où le résultat.

Q 7. On a :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad T^k = Q \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^k Q^{\top} = Q \begin{pmatrix} \left(-\frac{1}{3}\right)^k & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \left(-\frac{1}{3}\right)^k & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \left(-\frac{1}{3}\right)^k & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} Q^{\top}.$$

Or $\left|-\frac{1}{3}\right| < 1$, donc : $\lim\limits_{k \to +\infty} \left(-\frac{1}{3}\right)^k = 0$. En prenant la limite composante par composante, on a donc :

$$\lim_{k \to +\infty} \begin{pmatrix} \left(-\frac{1}{3}\right)^k & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \left(-\frac{1}{3}\right)^k & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \left(-\frac{1}{3}\right)^k & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

L'application $M \mapsto QMQ^{\top}$ étant continue sur $\mathrm{M}_4(\mathbb{R})$ en tant qu'application linéaire sur un espace vectoriel réel de dimension finie, on en déduit :

$$\lim_{k \to +\infty} T^k = \lim_{k \to +\infty} Q \begin{pmatrix} \left(-\frac{1}{3}\right)^k & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \left(-\frac{1}{3}\right)^k & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \left(-\frac{1}{3}\right)^k & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} Q^{\top} = Q \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} Q^{\top}.$$

Notons T_ℓ la matrice limite que nous venons de trouver. On a clairement $T_\ell^2 = T_\ell$, donc T_ℓ est une matrice de projecteur. Comme elle est symétrique (réelle), il s'agit plus précisément d'une matrice de projecteur orthogonal. Pour déterminer ses caractéristiques géométriques, il suffit de déterminer $\mathrm{im}(T_\ell)$. Pour cela, on note d'abord que l'image de T_ℓ est de dimension 1 (plusieurs arguments permettent de le remarquer ; notons par exemple que T_ℓ est de trace égale à 1, et pour un projecteur sa trace est égale à son rang), donc il suffit d'un seul vecteur non nul pour l'engendrer. Comme $\mathrm{im}(T_\ell) = \ker(T_\ell - I_4)$ pour un projecteur, déterminer un vecteur non nul de l'image revient à déterminer un vecteur propre de T_ℓ associé à la valeur propre 1. Or il est facile de constater que $U = \begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}$ est un vecteur propre de T pour la valeur propre 1 (la somme des coefficients de chaque ligne de T est égale à 1). Par une récurrence immédiate : $\forall k \in \mathbb{N}$, $T^k U = U$. Un argument de continuité maintes fois invoqué ci-dessus permet d'en déduire, quand $k \to +\infty$: $T_\ell U = U$. Ainsi U est un vecteur propre de T_ℓ également pour la valeur propre 1, et d'après la discussion ci-dessus on en déduit :

$$\mathrm{im}(T_\ell) = \ker(T_\ell - I_4) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}(U).$$

En conclusion : la suite de matrices $(T^k)_{k\in\mathbb{N}}$ converge vers la matrice du projecteur orthogonal sur la droite engendrée par $U = \begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}$.

Q 8. Nous avons vu dans la question **Q 3** que pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a : $P^{(k)} = P^{(0)}T^k$. Or la suite $\left(T^k\right)_{k\in\mathbb{N}}$ converge d'après la question précédente (vers une matrice que nous avons notée T_ℓ), et l'application $M \mapsto P^{(0)}M$ est continue sur $\mathrm{M}_4(\mathbb{R})$ en tant qu'application linéaire sur un espace vectoriel réel de dimension finie. Donc, par la caractérisation séquentielle de la continuité, la suite $\left(P^{(k)}\right)_{k\in\mathbb{N}} = \left(P^{(0)}T^k\right)_{k\in\mathbb{N}}$ converge vers $P^{(0)}T_\ell$. Notons $P = (p_1, p_2, p_3, p_4)$ cette limite dans la suite de cette question.

De plus, on déduit de la question **Q 4** que P vérifie : $PT = P$. En transposant : $T^\top P^\top = P^\top$, donc $P^\top$ appartient au sous-espace propre de $T^\top = T$ associé à la valeur propre 1, qui est engendré par $U = \begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}$ (vérification facile, partant des deux questions précédentes). Il existe donc $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que : $P^\top = \lambda U$. Par identification, on obtient : $p_1 = p_2 = p_3 = p_4 = \lambda$. Or nous rappelons que, toujours d'après la question **Q 4**, on doit avoir : $p_1 + p_2 + p_3 + p_4 = 1$, ce qui impose : $\lambda = \frac{1}{4}$. Autrement dit : $p_1 = p_2 = p_3 = p_4 = \frac{1}{4}$.

Nous avons donc démontré que quel que soit le vecteur initial $P^{(0)}$, la suite $\left(P^{(k)}\right)_{k\in\mathbb{N}}$ converge vers le vecteur ligne $P = \left(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right)$.

I.C – Marche aléatoire sur une pyramide tronquée à base carrée

Q 9. On a :

$$T = \begin{pmatrix}
0 & \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 & 0 & 0\\
\frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} & 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 & 0\\
0 & \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} & 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0\\
\frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3}\\
\frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3}\\
0 & \frac{1}{3} & 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} & 0\\
0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3}\\
0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} & 0
\end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix}
0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0\\
1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0\\
0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0\\
1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1\\
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1\\
0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0\\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1\\
0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0
\end{pmatrix}.$$

Il peut être préférable d'écrire par blocs cette matrice. Si l'on note : $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, alors : $T = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} A & I_4 \\ I_4 & A \end{pmatrix}$. Cela peut par ailleurs alléger le calcul demandé ensuite : si l'on pose $V = (1,1,1,1)$, alors $VA = 2V$ (calcul direct), et donc :

$$(1,1,1,1,1,1,1,1)T = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} V & V \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A & I_4 \\ I_4 & A \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} VA+V & A+VA \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 3V & 3V \end{pmatrix}$$
$$= (1,1,1,1,1,1,1,1)\,.$$

Q 10. La description explicite du graphe, donnée dans la figure 2 du document, montre que toutes les arêtes de G sont de la forme (s,s') ou (s',s) avec $s \in S_1$ et $s' \in S_2$. D'où le résultat.

Une interprétation matricielle de ce résultat, et que nous utiliserons dans la question suivante, est la suivante : posons

$$A = \left\{(\alpha_1, 0, \alpha_3, 0, 0, \alpha_6, 0, \alpha_8) \mid (\alpha_1, \alpha_3, \alpha_6, \alpha_8) \in \mathbb{R}^4\right\},$$

et :

$$B = \left\{(0, \alpha_2, 0, \alpha_4, \alpha_5, 0, \alpha_7, 0) \mid (\alpha_2, \alpha_4, \alpha_5, \alpha_7) \in \mathbb{R}^4\right\}.$$

Pour comprendre ce qui motive la définition de A et B dans ce contexte : si $k \in \mathbb{N}$, alors $P^{(k)} \in A$ si et seulement si le point est en un sommet de $S_1 = \{1,3,6,8\}$ à l'étape k (en effet, dans ce cas la probabilité d'être en un autre sommet est nulle), et de même $P^{(k)} \in B$ si et seulement si le point est en un sommet de $S_2 = \{2,4,5,7\}$ à l'étape k. Alors, le résultat de cette question revient à affirmer :

$$\forall L \in A,\ LT \in B, \quad \text{et :} \quad \forall L \in B,\ LT \in A,$$

ce qui se voit facilement par un calcul direct.

Q 11. Rappelons que pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a : $P^{(k+1)} = P^{(k)}T$ (question **Q 2**). Comme $P^{(0)} \in A$, d'après la question précédente et cette relation de récurrence on a $P^{(1)} \in B$, et plus généralement (par une récurrence facile) :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad P^{(2k)} \in A,\ P^{(2k+1)} \in B.$$

Voyons comment en déduire que la suite $\left(P^{(k)}\right)_{k\in\mathbb{N}}$ ne converge pas : raisonnons par l'absurde, et supposons que cette suite converge vers un vecteur P. Alors les suites extraites $\left(P^{(2k)}\right)_{k\in\mathbb{N}}$ et $\left(P^{(2k+1)}\right)_{k\in\mathbb{N}}$ convergent également vers P. Ce sont deux suites convergentes à valeurs dans A et dans B respectivement, et comme A et B sont des parties fermées de $\mathbb{R}^8$ (nous le justifions plus bas), on en déduit que leur limite P appartient à A et B. Or : $A \cap B = \{\vec{0}\}$, donc le fait que $P \in A \cap B$ implique que P est le vecteur nul. C'est impossible, puisque la somme des coefficients de P doit être égal à 1 d'après la question **Q 4** : nous avons une contradiction.

Par l'absurde, nous avons démontré que la suite $\left(P^{(k)}\right)_{k\in\mathbb{N}}$ est divergente.

Justifions à présent que A et B sont des parties fermées de $\mathbb{R}^8$. On peut le justifier *via* la caractérisation séquentielle des fermés : si une suite $(\vec{x}_k)_{k\in\mathbb{N}}$ à valeurs dans A est convergente, alors elle converge composante par composante, or ses composantes sont nulles aux positions 2, 4, 5 et 7. On en déduit que sa limite $\vec{x}$ admet également des coefficients nuls aux positions 2, 4, 5 et 7, donc $\vec{x} \in A$. De même pour B.

Il est intéressant de savoir qu'en fait, tout sous-espace vectoriel d'un espace vectoriel de dimension finie est fermé (ce qu'on peut démontrer en l'écrivant comme le lieu d'annulation d'une projection parallèlement à ce sous-espace par exemple).

II - Matrices stochastiques et distributions de probabilité

II.A –

Q 12. Notons par commodité :

$$M = ((m_{i,j}))_{1\leqslant i,j\leqslant n}\,, \quad U = \begin{pmatrix}1\\ \vdots\\ 1\end{pmatrix} \ \text{ et } \ V = MU.$$

Les notations u_j et v_i ci-dessous sont évidemment les coordonnées respectives de U et V (en particulier $u_j = 1$ pour tout $j \in [\![1, n]\!]$).

Comme M est déjà supposée à coefficients positifs ou nuls, elle est stochastique si et seulement si :

$$\forall i \in [\![1, n]\!], \quad \sum_{j=1}^{n} m_{i,j} = 1. \tag{$*$}$$

Or on a, par définition du produit matriciel :

$$\forall i \in [\![1, n]\!], \quad v_i = \sum_{j=1}^{n} m_{i,j} u_j = \sum_{j=1}^{n} m_{i,j}.$$

On en déduit que M vérifie $(*)$ si et seulement si :

$$\forall i \in [\![1, n]\!],\ \sum_{j=1}^{n} m_{i,j} = 1 \iff \forall i \in [\![1, n]\!],\ v_i = u_i \iff V = U \iff MU = U,$$

ce qu'il fallait démontrer.

Q 13. Si l'on note $T = ((t_{i,j}))_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ la matrice de transition d'un graphe, alors ses coefficients sont positifs ou nuls puisque ce sont des probabilités. Par conséquent, T est une matrice stochastique si et seulement si : $\forall i \in [\![1, n]\!],\ \sum\limits_{j=1}^{n} t_{i,j} = 1$. Or, avec les notations introduites dans le corrigé des questions **Q 1** et **Q 2** (où l'on prend $k = 0$; peu importe, les probabilités de déplacement d'un sommet vers l'autre ne dépendent pas du rang de l'étape), on a :

$$\forall i \in [\![1, n]\!], \quad \sum_{j=1}^{n} t_{i,j} = \sum_{j=1}^{n} \mathrm{P}_{A_i^{(0)}}\left(A_j^{(1)}\right) = \mathrm{P}_{A_i^{(0)}}\left(\bigcup_{j=1}^{n} A_j^{(1)}\right) = 1,$$

parce que la famille $(A_j^{(1)})_{1\leqslant j\leqslant n}$ est un système complet d'évènements. D'où le résultat : T est une matrice stochastique.

Pour justifier que $P^{(k)}$ est une distribution de probabilité, il suffit de citer le résultat de la question **Q 1**, la positivité des coefficients étant immédiate encore une fois.

II.B –

Q 14. Remarquons qu'en imitant le raisonnement de la question **Q 12**, on démontre sans difficulté que si $X \in \mathbb{R}^n$ est un vecteur ligne dont tous les coefficients sont positifs ou nuls, alors X est une distribution de probabilité si et seulement si $XU = 1$ (on identifie une matrice d'ordre 1 avec son unique coefficient), où l'on note encore une fois U le vecteur colonne de $\mathrm{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ dont tous les coefficients sont égaux à 1.

Si X est une distribution de probabilité et M une matrice stochastique, alors on se convainc aisément que les coefficients de XM sont tous positifs ou nuls (ils s'obtiennent comme sommes de produits de coefficients de X et M, lesquels sont positifs ou nuls par hypothèse), donc d'après le paragraphe précédent : XM est une distribution de probabilité si et seulement si $(XM)U = 1$. Or :

$$(XM)U = X(MU) \overset{[\mathbf{Q\,12}]}{=} XU = 1,$$

donc XM est bien une distribution de probabilité.

Q 15. On rappelle qu'on a noté $U = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$.

Si M et N sont stochastiques, alors les coefficients du produit MN sont clairement positifs ou nuls (ils s'obtiennent comme sommes de produits de coefficients de M et N, lesquels sont positifs ou nuls par hypothèse), donc d'après la question **Q 12** : MN est une matrice stochastique si et seulement si $(MN)U = U$. Or :

$$(MN)U = M(NU) \overset{[\mathbf{Q\,12}]}{=} MU \overset{[\mathbf{Q\,12}]}{=} U,$$

d'où le résultat.

Q 16. On note encore $U = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$. Notons aussi $M = ((m_{i,j}))_{1\leqslant i,j\leqslant n}$, $N = ((n_{i,j}))_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ et $\alpha M+(1-\alpha)N = ((a_{i,j}))_{1\leqslant i,j\leqslant n}$.

On veut montrer que $\alpha M + (1 - \alpha)N$ est stochastique. D'abord, notons que la positivité des coefficients de M et N entraîne :

$$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2, \quad a_{i,j} = \underbrace{\alpha m_{i,j}}_{\geqslant 0} + \underbrace{(1-\alpha)n_{i,j}}_{\geqslant 0} \geqslant 0,$$

puisque $1 - \alpha \geqslant 0$ si $\alpha \in [0, 1]$. On en déduit que les coefficients de $\alpha M + (1 - \alpha)N$ sont aussi positifs. De plus $MU = U$ et $NU = U$ car M et N sont stochastiques (question **Q 12**), donc :

$$(\alpha M + (1-\alpha)N)U = \alpha MU + (1-\alpha)NU = \alpha U + (1-\alpha)U = U,$$

donc M vérifie (2), et M est stochastique.

Remarque. Cette question et la précédente montrent que l'ensemble des matrices stochastiques est convexe et stable par multiplication.

II.C –

II.C.1)

Q 17. On a par hypothèse : $Mu = \lambda u$. En regardant la h^{e} coordonnée de chaque membre dans cette égalité, on a :

$$\sum_{j=1}^{n} m_{h,j}u_j = \lambda u_h.$$

Le terme de la somme correspondant à $j = h$ est $m_{h,h}u_h$. Ainsi, en soustrayant $m_{h,h}u_h$ à cette égalité, on obtient :

$$\sum_{\substack{j=1 \\ j\neq h}}^{n} m_{h,j}u_j = (\lambda - m_{h,h})u_h.$$

Par conséquent, en utilisant l'inégalité triangulaire (et en se souvenant que $m_{i,j} \geqslant 0$ pour tout $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$ puisque M est stochastique) :

$$|\lambda - m_{h,h}| \cdot |u_h| \leqslant \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq h}}^{n} |m_{h,j}| \cdot |u_j| \leqslant \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq h}}^{n} m_{h,j} \cdot \max_{1\leqslant i\leqslant n} |u_i| = \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq h}}^{n} m_{h,j} \cdot |u_h|.$$

On a $|u_h| > 0$, étant donné que u est non nul en tant que vecteur propre (si bien que sa plus grande coordonnée en valeur absolue ne peut pas être nulle). En divisant par $|u_h|$, on obtient donc :

$$|\lambda - m_{h,h}| \leqslant \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq h}}^{n} m_{h,j} = \sum_{j=1}^{n} m_{h,j} - m_{h,h}.$$

Or M est une matrice stochastique, donc : $\sum_{j=1}^{n} m_{h,j} = 1$. On en déduit le résultat voulu :

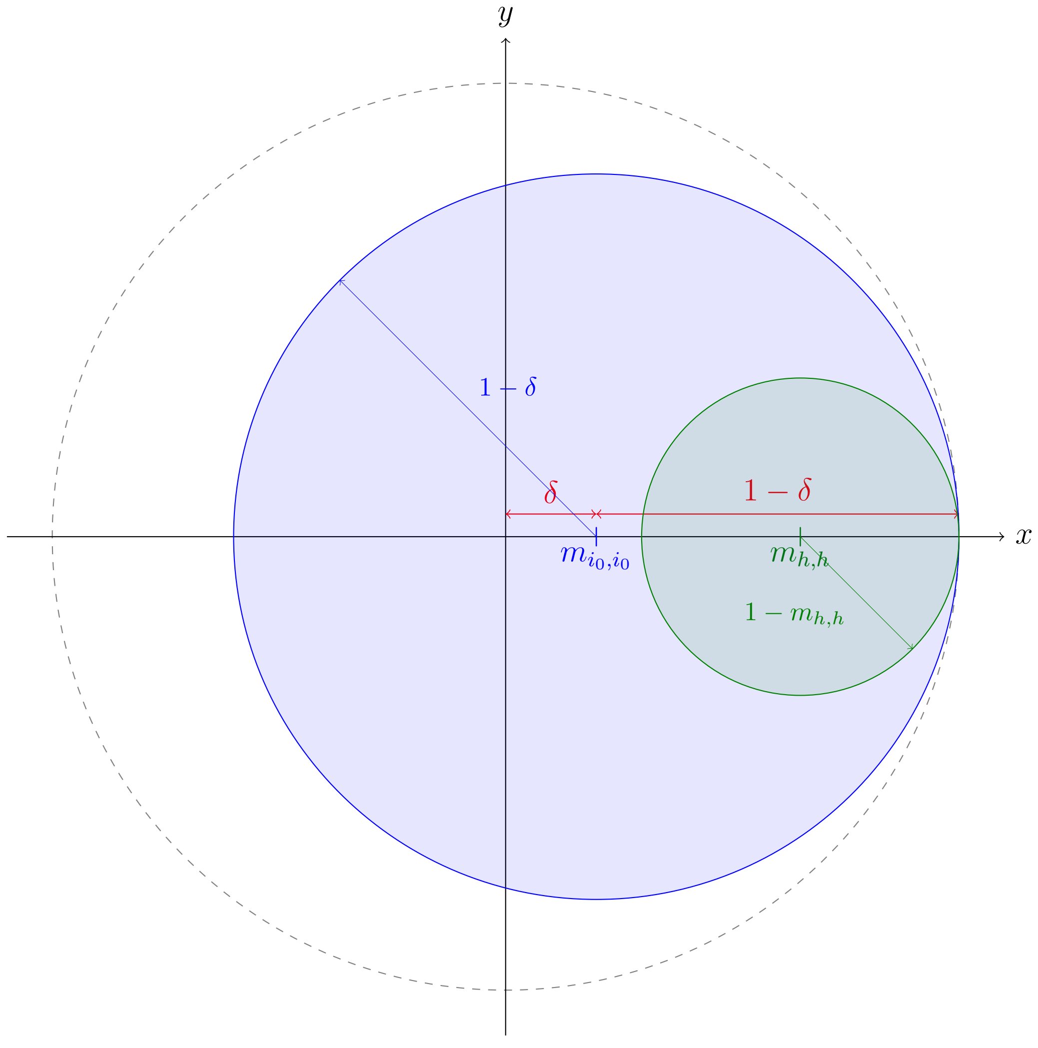
$$|\lambda - m_{h,h}| \leqslant 1 - m_{h,h}.$$

Ensuite :

$$|\lambda| = |\lambda - m_{h,h} + m_{h,h}| \leqslant |\lambda - m_{h,h}| + \underbrace{|m_{h,h}|}_{=m_{h,h}} \leqslant 1 - m_{h,h} + m_{h,h} = 1,$$

d'où la majoration demandée.

Q 18. Une illustration graphique permettra de comprendre ce qu'il se passe dans cette question. Soient i_0 un indice tel que : $\delta = m_{i_0,i_0}$ (c'est donc l'indice du coefficient diagonal le plus petit), et h l'indice de la question précédente. Pour $i \in [\![1, n]\!]$, l'inégalité $|\lambda - m_{i,i}| \leqslant 1 - m_{i,i}$ signifie que le point d'affixe λ est dans le disque de centre $m_{i,i}$ et de rayon $1 - m_{i,i}$. Voyons ce qu'on sait ($|\lambda - m_{h,h}| \leqslant 1 - m_{h,h}$) et ce que l'on veut ($|\lambda - \delta| \leqslant 1 - \delta$), sachant que $m_{h,h} \geqslant m_{i_0,i_0}$:



Il est manifeste que le disque vert (contenant les points d'affixes λ tels que $|\lambda - m_{h,h}| \leqslant 1 - m_{h,h}$) est inclus dans le disque bleu (contenant les points d'affixes λ tels que $|\lambda - \delta| \leqslant 1 - \delta$).

Démontrons-le à présent. On a :

$$|\lambda - \delta| = |\lambda - m_{h,h} + m_{h,h} - \delta| \leqslant |\lambda - m_{h,h}| + |m_{h,h} - \delta|$$

d'après l'inégalité triangulaire. Ensuite, on sait qu'on a : $|\lambda - m_{h,h}| \leqslant 1 - m_{h,h}$ (question précédente), et : $|m_{h,h} - \delta| = m_{h,h} - \delta$ (en effet, $m_{h,h} \geqslant \min_{1\leqslant i\leqslant n} m_{i,i} = \delta$, donc $m_{h,h} - \delta \geqslant 0$), donc la majoration ci-dessus devient :

$$|\lambda - \delta| \leqslant (1 - m_{h,h}) + (m_{h,h} - \delta) = 1 - \delta,$$

d'où le résultat.

L'interprétation géométrique demandée est claire si l'on prend la figure ci-dessus en appui : si δ est la valeur du plus petit coefficient diagonal de M, alors toutes ses valeurs propres sont dans le disque bleu centré en $(\delta, 0)$ (ou : le point d'affixe δ) et de rayon $1-\delta$.

Supposons à présent que les coefficients diagonaux de M sont tous strictement positifs (ceci équivaut à l'inégalité $\delta > 0$), et soit λ une valeur propre de M de module 1. Nous voulons démontrer que dans ce cas : $\lambda = 1$ (chose qu'on observe très clairement sur la figure ci-dessus : le cercle de centre l'origine et de rayon 1 ne coupe le disque de centre d'affixe δ et de rayon $1-\delta$ qu'en le point d'affixe égale à 1). Pour cela, soit θ un argument de λ, de sorte que : $\lambda = e^{i\theta}$. On a :

$$|\lambda - \delta|^2 = |\lambda|^2 - 2\mathrm{Re}\,(\lambda\delta) + |\delta|^2 = 1 - 2\cos(\theta)\delta + \delta^2,$$

donc l'inégalité $|\lambda - \delta| \leqslant 1 - \delta$ devient, après élévation au carré et simplifications :

$$-2\cos(\theta)\delta \leqslant -2\delta.$$

On divise par $-2\delta < 0$, et cette inégalité équivaut alors à : $\cos(\theta) \geqslant 1$. Ce n'est possible que si $\cos(\theta) = 1$, c'est-à-dire : $\theta \equiv 0 \bmod 2\pi$, et dans ce cas $\lambda = 1$, d'où le résultat.

II.C.2)

Q 19. On suit l'indication de l'énoncé : soient $X \in \ker(M - I_n)$ un vecteur dont on note $u_1, \dots, u_n$ les coefficients, et s un indice tel que u_s soit le minimum des u_j. On a $MX = X$ et, en regardant le coefficient d'indice s dans cette égalité :

$$\sum_{j=1}^{n} m_{s,j} u_j = u_s.$$

Or M est stochastique, et par hypothèse tous ses coefficients sont strictement positifs. Par conséquent l'inégalité $u_j \geqslant u_s$, valable pour tout $j \in [\![1, n]\!]$, implique $m_{s,j} u_j \geqslant m_{s,j} u_s$ (l'inégalité ne se renverse pas grâce à la positivité des coefficients), et l'égalité ci-dessus donne :

$$u_s = \sum_{j=1}^{n} m_{s,j} u_j \geqslant u_s \underbrace{\sum_{j=1}^{n} m_{s,j}}_{=1} = u_s.$$

Cela impose que l'inégalité ci-dessus est en vérité une égalité :

$$\sum_{j=1}^{n} m_{s,j} u_j = \sum_{j=1}^{n} m_{s,j} u_s, \text{ donc : } \sum_{j=1}^{n} \underbrace{m_{s,j}}_{>0} \underbrace{(u_j - u_s)}_{\geqslant 0 \text{ car } u_j \geqslant u_s} = 0.$$

Une somme de réels positifs est nulle si et seulement si chaque terme est nul ; on a donc : $\forall j \in [\![1, n]\!]$, $m_{s,j}(u_j - u_s) = 0$. Comme $m_{s,j} > 0$, diviser par $m_{s,j} \neq 0$ dans cette égalité implique :

$$\forall j \in [\![1, n]\!], \quad u_s - u_j = 0, \text{ donc : } X = \begin{pmatrix} u_s \\ \vdots \\ u_s \end{pmatrix} = u_s \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} = u_s U,$$

où la notation U a été introduite dans le corrigé de la question **Q 12**. On a ainsi démontré que si $X \in \ker(M - \mathrm{I}_n)$, alors : $X \in \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}(U)$. Autrement dit :

$$\ker(M - \mathrm{I}_n) \subseteq \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}(U).$$

Mais M est une matrice stochastique, donc on a aussi $MU = U$ d'après la question **Q 12**, puis : $U \in \ker(M - I_n)$, donc : $\mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}(U) \subseteq \ker(M - I_n)$ (par stabilité d'un espace vectoriel par produit externe). Ayant la double inclusion, on en déduit :

$$\ker(M - I_n) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}(U), \text{ et donc : } \dim(\ker(M - I_n)) = 1.$$

Q 20. Si $X = (u_1, \ldots, u_n)$ est une distribution de probabilité invariante par M, alors en transposant l'égalité $XM = X$ on obtient : $M^\top X^\top = X^\top$, c'est-à-dire : $X^\top \in \ker(M^\top - I_n)$. Or il fut démontré que $\dim(\ker(M - I_n)) = 1$ dans la question précédente, donc $M - I_n$ est de rang $n-1$ d'après le théorème du rang. Une matrice et sa transposée ont même rang, donc $M^\top - I_n$ est de rang $n-1$ aussi. Encore une fois, par le théorème du rang, on en déduit :

$$\dim\Big(\ker(M^\top - I_n)\Big) = 1.$$

(*par contre on ne sait pas* a priori *s'il est engendré par U, sous prétexte que c'est le cas pour M : attention !*).

Appelons $V = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$ un vecteur qui engendre $\ker(M^\top - I_n)$. Comme $X \in \ker(M^\top - I_n)$, il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que : $X^\top = \lambda V$, ou encore : $X = \lambda V^\top$. Or, en reprenant le raisonnement au début de la question **Q 14** (ainsi que ses notations), on doit avoir $XU = 1$ parce que X est une distribution de probabilité, donc en multipliant à droite par U l'égalité $X = \lambda V^\top$, on obtient : $1 = \lambda V^\top U = \lambda \sum\limits_{i=1}^{n} v_i$. Cela prouve à la fois que $\sum\limits_{i=1}^{n} v_i \neq 0$, et qu'on doit avoir : $\lambda = \frac{1}{\sum\limits_{i=1}^{n} v_i}$.

Ce raisonnement démontre que si X est une distribution de probabilité invariante par M, alors elle est nécessairement égale à : $X = \frac{1}{\sum\limits_{i=1}^{n} v_i} V^\top$, où V est le générateur de $\ker(M^\top - I_n)$ introduit ci-dessus. En particulier, il n'y en a qu'une seule possibilité pour X, d'où l'unicité.

Q 21. Il est utile, pour traiter cette question et les suivantes, de remarquer que la relation $M^{k+1} = M \cdot M^k$ équivaut à :

$$\forall i \in [\![1, n]\!], \quad m_{i,j}^{(k+1)} = \sum_{\ell=1}^{n} m_{i,\ell} \cdot m_{\ell,j}^{(k)}. \tag{†}$$

Démontrons à présent les inégalités demandées. Il est trivial que $\alpha_j^{(k+1)} \leqslant \beta_j^{(k+1)}$ (le plus petit coefficient de la j^{e} colonne est bien sûr plus petit que le plus grand coefficient de cette même colonne), donc nous devons nous contenter de démontrer que $\alpha_j^{(k)} \leqslant \alpha_j^{(k+1)}$ et $\beta_j^{(k+1)} \leqslant \beta_j^{(k)}$.

Soit $i_0 \in [\![1, n]\!]$ un indice tel que : $\alpha_j^{(k+1)} = m_{i_0,j}^{(k+1)}$ (autrement dit : $m_{i_0,j}^{(k+1)}$ est le plus petit coefficient de la j^{e} colonne de M^{k+1}). On applique (†) avec $i = i_0$, en minorant $m_{\ell,j}^{(k)}$ par $\alpha_j^{(k)}$, et comme $\sum\limits_{\ell=1}^{n} m_{i_0,\ell} = 1$ (en effet M est stochastique) on obtient :

$$\alpha_j^{(k+1)} = m_{i_0,j}^{(k+1)} \geqslant \left(\sum_{\ell=1}^{n} m_{i_0,\ell}\right) \alpha_j^{(k)} = \alpha_j^{(k)},$$

d'où l'inégalité demandée. On procède de même pour montrer $\beta_j^{(k+1)} \leqslant \beta_j^{(k)}$, à ceci près qu'on majore $m_{\ell,j}^{(k)}$ par $\beta_j^{(k)}$ dans (†).

Q 22. Soient $i_0 \in [\![1, n]\!]$ un indice tel que : $\alpha_j^{(k+1)} = m_{i_0,j}^{(k+1)}$, et i_1 un indice tel que : $\beta_j^{(k)} = m_{i_1,j}^{(k)}$ (autrement dit : $m_{i_1,j}$ est le plus grand coefficient de la j^{e} colonne de M^k). On applique (†) avec $i = i_0$, et on isole le terme de la somme correspondant à $\ell = i_1$. On a alors :

$$\alpha_j^{(k+1)} = m_{i_0,j}^{(k+1)} = \sum_{\substack{\ell=1 \\ \ell \neq i_1}}^{n} m_{i_0,\ell} \cdot m_{\ell,j}^{(k)} + m_{i_0,i_1} \cdot m_{i_1,j}^{(k)} = \sum_{\substack{\ell=1 \\ \ell \neq i_1}}^{n} m_{i_0,\ell} \cdot m_{\ell,j}^{(k)} + m_{i_0,i_1} \cdot \beta_j^{(k)}.$$

À présent on minore $m_{\ell,j}^{(k)}$ par le plus petit coefficient de la j^{e} colonne de M^k, qui est égal à $\alpha_j^{(k)}$ par définition. On obtient :

$$\alpha_j^{(k+1)} \geqslant \left(\sum_{\substack{\ell=1 \\ \ell \neq i_1}}^{n} m_{i_0,\ell}\right) \alpha_j^{(k)} + m_{i_0,i_1} \cdot \beta_j^{(k)}.$$

Ensuite, comme M est stochastique, on a : $\sum\limits_{\ell=1}^{n} m_{i_0,\ell} = 1$, donc : $\sum\limits_{\substack{\ell=1\\ \ell\neq i_1}}^{n} m_{i_0,\ell} = 1-m_{i_0,i_1}$. La minoration ci-dessus devient alors :

$$\alpha_j^{(k+1)} \geqslant (1-m_{i_0,i_1})\,\alpha_j^{(k)} + m_{i_0,i_1}\cdot\beta_j^{(k)} = \alpha_j^{(k)} + m_{i_0,i_1}\left(\beta_j^{(k)}-\alpha_j^{(k)}\right),$$

d'où le résultat demandé en posant $j_0 = i_1$ et en réarrangeant les termes.

Q 23. On procède comme dans la question précédente, *mutatis mutandis*, en écrivant cette fois-ci (†) avec le coefficient le plus grand de la j^{e} colonne de M^{k+1}, et en isolant le plus petit coefficient de M^k dans la somme du membre de droite. On aboutit alors à l'inégalité $\beta_j^{(k+1)} \leqslant \beta_j^{(k)} + m_{i_1,j_1}(\alpha_j^{(k)}-\beta_j^{(k)})$ (j'ai noté i_1 l'indice maximisant $m_{i,j}^{(k+1)}$ et j_1 l'indice minimisant $m_{i,j}^{(k)}$), et on en déduit le résultat voulu après réarrangement des termes.

Q 24. En sommant les inégalités obtenues dans les deux questions précédentes, on obtient :

$$\alpha_j^{(k+1)} - \beta_j^{(k+1)} + \left(\beta_j^{(k)}-\alpha_j^{(k)}\right) \geqslant (m_{i_0,j_0}+m_{i_1,j_1})\left(\beta_j^{(k)}-\alpha_j^{(k)}\right).$$

Comme ε est, par définition, la valeur du plus petit coefficient de M, on a : $m_{i_0,j_0}+m_{i_1,j_1} \geqslant 2\varepsilon$. Regrouper les termes en $\beta_j^{(k)}-\alpha_j^{(k)}$ donne donc :

$$\alpha_j^{(k+1)} - \beta_j^{(k+1)} \geqslant (2\varepsilon-1)\left(\beta_j^{(k)}-\alpha_j^{(k)}\right),$$

d'où le résultat voulu, après avoir multiplié par -1 cette inégalité.

Q 25. Soit $j \in [\![1,n]\!]$. Par hypothèse, les coefficients de M sont strictement positifs, ce qui signifie que : $\varepsilon = \min\limits_{1\leqslant i,j\leqslant n} m_{i,j} > 0$. De plus, comme M est stochastique, la somme des coefficients de chaque ligne égale 1, et il en résulte aisément (du fait de leur stricte positivité) que tous les coefficients sont strictement inférieurs à 1. Autrement dit : $0 < \varepsilon < 1$. De cela on déduit ensuite que $1-2\varepsilon \in]-1,1[$, donc : $\lim\limits_{k\to+\infty}(1-2\varepsilon)^k = 0$. Or la majoration de la question précédente implique, par une récurrence facile :

$$\forall k \in \mathbb{N},\quad 0 \leqslant \beta_j^{(k)}-\alpha_j^{(k)} \leqslant (1-2\varepsilon)^k\left(\beta_j^{(0)}-\alpha_j^{(0)}\right),$$

donc d'après le théorème des gendarmes : $\lim\limits_{k\to+\infty}\left(\beta_j^{(k)}-\alpha_j^{(k)}\right) = 0$. De plus, la question **Q 21** montre que les suites $\left(\alpha_j^{(k)}\right)$ et $\left(\beta_j^{(k)}\right)$ sont respectivement croissante et décroissante ; comme leur différence converge vers 0, ce sont des suites adjacentes. D'après le théorème des suites adjacentes, elles convergent donc vers une limite commune b_j. De plus, pour tout $i \in [\![1,n]\!]$ et tout $k \in \mathbb{N}$ on a :

$$\alpha_j^{(k)} \leqslant m_{i,j}^{(k)} \leqslant \beta_j^{(k)},$$

et les deux extrémités de l'encadrement ont même limite b_j, donc d'après le théorème des gendarmes : $\forall i \in [\![1,n]\!],\ \lim\limits_{k\to+\infty} m_{i,j}^{(k)} = b_j$.

En résumé, nous avons montré que pour tout $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, la suite $\left(m_{i,j}^{(k)}\right)_{k\in\mathbb{N}}$ converge vers b_j. Puisqu'il y a convergence composante par composante, on en déduit que la suite $\left(M^k\right)_{k\in\mathbb{N}}$ converge, et sa limite est :

$$B = \begin{pmatrix} \lim\limits_{k\to+\infty} m_{1,1}^{(k)} & \cdots & \lim\limits_{k\to+\infty} m_{1,n}^{(k)} \\ \vdots & & \vdots \\ \lim\limits_{k\to+\infty} m_{n,1}^{(k)} & \cdots & \lim\limits_{k\to+\infty} m_{n,n}^{(k)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 & \cdots & b_n \\ \vdots & & \vdots \\ b_1 & \cdots & b_n \end{pmatrix},$$

ce qui démontre la première partie de cette question.

Pour montrer que B est stochastique, on note que M est stochastique, et que l'ensemble des matrices stochastiques est stable par produit d'après la question **Q 15**. Par conséquent la relation $M^{k+1} = M^k \cdot M$ permet de démontrer aisément, par récurrence sur k, que M^k est stochastique pour tout $k \in \mathbb{N}$. On peut le reformuler en disant que chaque ligne de M^k est une distribution de probabilité, qui converge vers $(b_1, \dots, b_n)$, et il fut démontré à la question **Q 4** que la limite d'une suite convergente de distributions de probabilité est également une distribution de probabilité. On en déduit que $(b_1, \dots, b_n)$ en est une, et donc que B est une matrice stochastique : d'où le résultat.

Il n'aurait pas coûté beaucoup plus cher d'utiliser le fait (facile à établir avec la caractérisation séquentielle) que l'ensemble des matrices stochastiques est une partie fermée de $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$.

Q 26. En utilisant la question **Q 21**, on a : $\forall k \in \mathbb{N}$, $\forall j \in [\![1, n]\!]$, $\alpha_j^{(k)} \geqslant \alpha_j^{(0)}$. Quand $k \to +\infty$, on obtient donc : $\forall j \in [\![1, n]\!]$, $b_j \geqslant \alpha_j^{(0)}$. Or les $\alpha_j^{(0)}$ sont tous strictement positifs (ce sont des coefficients de M, qui par hypothèse sont strictement positifs), donc les b_j le sont également : d'où le résultat.

Q 27. La suite $\left(M^k\right)_{k\in\mathbb{N}}$ converge vers B, donc (par continuité séquentielle de $A \mapsto P^{(0)}A$ sur $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$), la suite $\left(P^{(k)}\right)_{k\in\mathbb{N}} = \left(P^{(0)}M^k\right)_{k\in\mathbb{N}}$ converge vers $Q = P^{(0)}B$. On veut maintenant démontrer que $Q = P^\infty$, peu importe la valeur de $P^{(0)}$.

Notons $P^{(0)} = (p_1, \dots, p_n)$. Alors :

$$Q = (p_1, \dots, p_n)B = (p_1, \dots, p_n) \begin{pmatrix} b_1 & \cdots & b_n \\ \vdots & & \vdots \\ b_1 & \cdots & b_n \end{pmatrix} = \left(\left(\sum_{i=1}^n p_i\right) b_1, \cdots, \left(\sum_{i=1}^n p_i\right) b_n \right).$$

Or on sait que $P^{(0)}$ est une distribution de probabilité, donc : $\sum\limits_{i=1}^n p_i = 1$. On en déduit : $Q = (b_1, \dots, b_n) = P^\infty$, d'où le résultat.

Q 28. On a : $\forall k \in \mathbb{N}$, $P^{(k+1)} = P^{(k)}M$. Quand $k \to +\infty$, on a : $P^\infty = P^\infty M$, par continuité de $L \mapsto LM$ sur $\mathrm{M}_{1,n}(\mathbb{R})$. Donc P^∞ est une distribution de probabilité (chose déjà établie dans la question **Q 25**) invariante par M. Elle est unique d'après la question **Q 20**, d'où le résultat.

Remarque. On peut aussi démontrer le résultat voulu sans passer par les deux questions précédentes. On a : $\forall k \in \mathbb{N}$, $M^{k+1} = M^k \cdot M$. Or les suites $(M^k)_{k\in\mathbb{N}}$ et $(M^{k+1})_{k\in\mathbb{N}}$ convergent vers B donc, par un argument de continuité déjà maintes fois invoqué, on obtient quand $k \to +\infty$: $B = BM$. En identifiant la première ligne de cette égalité matricielle, on a donc : $P^\infty = P^\infty M$.

III - Le graphe du web

III.A – Premier modèle de navigation sur le web

Q 29. Soit $i \in [\![1, n]\!]$. Au vu de la définition d'une matrice de transition, et de l'expérience décrite, $a_{i,j}$ désigne la probabilité de passer de la page i à la page j. Puisque le surfeur reste sur la page i si celle-ci ne pointe vers aucune autre, on a $a_{i,i} = 1$ dans ce cas-là (rester sur la page i est un évènement de probabilité 1). Par contre, si la page i pointe vers d'autres pages, alors d'une part on a $a_{i,i} = 0$ (le surfeur change nécessairement de page), et d'autre part, la probabilité est la même de choisir n'importe laquelle des pages vers lesquelles la page i pointe. Notons q cette probabilité, et $A_{i,j}$ l'évènement : « le surfeur va de la page i vers la page j » pour tout $j \in [\![1, n]\!]$. On a clairement :

$$\bigcup_{i\to j} A_{i,j} = \Omega \quad \text{(évènement certain)}$$

et ces évènements sont disjoints donc, par σ-additivité :

$$\sum_{i\to j} \mathrm{P}(A_{i,j}) = \mathrm{P}\left(\bigcup_{i\to j} A_{i,j}\right) = \mathrm{P}(\Omega) = 1.$$

Or : $\sum\limits_{i\to j} \mathrm{P}(A_{i,j}) = \sum\limits_{i\to j} q = q\cdot \mathrm{card}\left(\{j\in [\![1,n]\!] \mid i\to j\}\right) = q\lambda_i$. Donc : $q\lambda_i = 1$, puis : $q=\frac{1}{\lambda_i}$. On vient de démontrer :

$$a_{i,j} = \frac{1}{\lambda_i} \text{ si } i \not\to j.$$

Enfin, il est clair que le surfeur ne peut pas se rendre vers la page j si la page i ne pointe pas vers elle, donc $a_{i,j}=0$ si $i\not\to j$. On a fini de traiter les quatre cas de cette question.

III.B – L'algorithme PageRank

III.B.1)

Q 30. La matrice A est stochastique comme toute matrice de transition (question **Q 13**), et la matrice $\frac{1}{n}J_n$ l'est également (vérification facile : tous ses coefficients sont positifs, et si l'on note $U=\begin{pmatrix}1\\ \vdots\\ 1\end{pmatrix}$ alors $\frac{1}{n}J_nU = \frac{1}{n}\times nU = U$, ce qui prouve qu'elle est stochastique grâce à la question **Q 12**). Par conséquent, la question **Q 16** démontre que $B=(1-\alpha)A+\alpha\cdot\frac{1}{n}J_n$ est aussi stochastique. Son coefficient $(i,j)\in [\![1,n]\!]^2$ est :

$$\underbrace{(1-\alpha)}_{\geqslant 0}\underbrace{a_{i,j}}_{\geqslant 0}+\frac{\alpha}{n}\geqslant\frac{\alpha}{n}>0$$

car $\alpha\in]0,1[$. Donc B est une matrice stochastique dont tous les coefficients sont strictement positifs.

Q 31. Cette probabilité est égale à $(1-\alpha)\cdot 1+\frac{\alpha}{n}\cdot 1 = 1-\alpha\left(1-\frac{1}{n}\right)$.

Q 32. On reprend la question **Q 27** avec la matrice B au lieu de M. C'est possible parce que B est stochastique et à coefficients strictement positifs. On a alors la convergence de la suite $\left(Q^k\right)_{k\in\mathbb{N}}$, vers une distribution de probabilité Q^∞ invariante par B (d'après la question **Q 28**). Notons $Q^\infty = (\mu_j)_{1\leqslant j\leqslant n}$. L'égalité $Q^\infty = Q^\infty B$ se traduit par :

$$\forall j\in [\![1,n]\!],\quad \mu_j=\sum_{i=1}^n \mu_i\left((1-\alpha)a_{i,j}+\frac{\alpha}{n}\right) = \mu_j\left((1-\alpha)a_{j,j}+\frac{\alpha}{n}\right)+\sum_{\substack{i=1\\ i\neq j}}^n \mu_i\left((1-\alpha)a_{i,j}+\frac{\alpha}{n}\right).$$

Après réarrangement des termes, pour tout $j\in [\![1,n]\!]$ on a :

$$\begin{aligned}\left(1-(1-\alpha)a_{j,j}-\frac{\alpha}{n}\right)\mu_j &= \sum_{\substack{i=1\\ i\neq j}}^n \mu_i\left((1-\alpha)a_{i,j}+\frac{\alpha}{n}\right)\\ &= \sum_{i\to j}\mu_i\left((1-\alpha)a_{i,j}+\frac{\alpha}{n}\right)+\sum_{\substack{i\neq j\\ i\not\to j}}\mu_i\left((1-\alpha)a_{i,j}+\frac{\alpha}{n}\right)\\ &\overset{[\mathbf{Q\,29}]}{=} \sum_{i\to j}\mu_i\left(\frac{1-\alpha}{\lambda_i}+\frac{\alpha}{n}\right)+\frac{\alpha}{n}\sum_{\substack{i\neq j\\ i\not\to j}}\mu_i.\end{aligned}$$

Au vu de cette expression, il semble que le membre de gauche soit une fonction croissante des μ_i tels que $i\to j$ (c'est en effet une fonction de la forme $\mu_i\mapsto a\mu_i+b$ avec $a=\frac{1-\alpha}{\lambda_i}>0$), et une fonction décroissante de la « variable » λ_i (c'est de la forme $\lambda_i\mapsto\frac{a}{\lambda_i}+b$ avec $a>0$, et la fonction inverse est décroissante). Pour pouvoir en déduire que les μ_j définissent des pertinences au sens donné dans l'énoncé, il suffit de s'assurer que $1-(1-\alpha)a_{j,j}-\frac{\alpha}{n}>0$ pour tout $j\in [\![1,n]\!]$ (pour que μ_j et $\left(1-(1-\alpha)a_{j,j}-\frac{\alpha}{n}\right)\mu_j$ soient de même monotonie). Pour le vérifier, faisons une distinction de cas :

— si $j \in [\![1, n]\!]$ vérifie $a_{j,j} = 1$ (cas où la page j ne pointe vers aucune autre page), alors $1-(1-\alpha)a_{j,j} - \frac{\alpha}{n} = \alpha\left(1 - \frac{1}{n}\right) > 0$ (si, du moins, $n \geqslant 2$, ce qui est une hypothèse raisonnable si n est un nombre de pages web) ;

— si $j \in [\![1, n]\!]$ vérifie $a_{j,j} = 0$ (autre cas), alors $1-(1-\alpha)a_{j,j} - \frac{\alpha}{n} = 1 - \frac{\alpha}{n} > 0$ car : $\frac{\alpha}{n} < \frac{1}{n} \leqslant 1$.

Ainsi dans tous les cas le coefficient en facteur de μ_j, dans le membre de gauche de l'égalité ci-dessus est strictement positif. Après division par ce coefficient, on en déduit conformément à la discussion ci-dessus que les μ_j définissent une pertinence, d'où le résultat voulu.

III.B.2)

Q 33. Suivant la description donnée de l'algorithme, on construit le programme de façon récursive ainsi :

```
def puissance1(B,k):
  if k==0:
    n=B.shape[1]
    return np.identity(n)
  A=puissance1(B,k-1)
  return np.dot(B,A)
```

Q 34. Suivant la description donnée de l'algorithme, on construit le programme de façon récursive ainsi :

```
def puissance2(B,k):
  if k==0:
    n=B.shape[1]
    return np.identity(n)
  elif k%0==0:
    A=puissance2(B,k//2)
    return np.dot(A,A)
  else:
    A=puissance2(B,(k-1)//2)
    C=np.dot(A,A)
    return np.dot(A,C)
```

Q 35. Dans le cas de `puissance1(B,k)`, il y a toujours k appels à la fonction `np.dot`.

Dans le cas de `puissance2(B,k)`, on note que lorsque k est pair, on obtient B^k à partir de $B^{\frac{k}{2}}$ *via* une multiplication (de $B^{\frac{k}{2}}$ par elle-même), tandis que lorsque k est impair on obtient B^k à partir de $B^{\frac{k-1}{2}}$ *via* deux multiplications (on multiplie $B^{\frac{k-1}{2}}$ par elle-même, puis on multiplie le résultat obtenu par B). Par conséquent :

— le meilleur des cas est celui où, à chaque appel, l'exposant (c'est-à-dire la deuxième entrée de `puissance2`) est un entier pair (sauf lors du dernier appel : à moins d'être nul, k ne peut pas être indéfiniment divisible par 2) ;

— le pire des cas est celui où, à chaque appel, l'exposant est un entier impair.

Dans le premier cas, on a $k = 2^p$, et dans ce cas il y a exactement $p+1$ appels à la fonction `np.dot`. Dans le second cas, on a $k = \sum\limits_{\ell=0}^{p} 2^\ell = 2^{p+1} - 1$. Pour le remarquer, on note que dans le cas où l'exposant est toujours impair, la suite des exposants est définie par $k_0 = k$ et : $\forall n \in [\![1, p]\!]$, $k_n = \frac{k_{n-1}-1}{2}$. Une récurrence facile donne $k_p < \frac{2^{p+1}}{2^p} = 2$, et k_p est supposé impair donc $k_p = 1$ (notons que ce ne peut pas être terminé plus tôt, vu que dans le meilleur des cas il y a au moins $p+1$ appels à la fonction `np.dot` ; on pourrait montrer plus rigoureusement par récurrence que $2^{p-n} \leqslant k_n < 2^{p+1-n}$ pour tout $n \in [\![1, p]\!]$). La définition de la suite $(k_n)_{1 \leqslant n \leqslant p}$ entraîne : $\forall n \in [\![1, p]\!]$, $2^n k_n - 2^{n-1} k_{n-1} = -2^{n-1}$. En sommant de $n = 1$ à $n = p$, on reconnaît une somme télescopique qui nous permet d'en déduire : $2^p - k = -\sum\limits_{n=1}^{p} 2^{n-1}$, d'où le résultat annoncé en posant $\ell = n - 1$ et en isolant k dans cette égalité. Il y a dans ce cas $2(p+1)$ appels à la fonction `np.dot`.