Centrale MP2 2017

I Variables aléatoires entières décomposables

I.A - Premiers exemples

1. <u>C'est du cours :</u> Une fonction f somme au voisinage de zéro de la série entière $\sum\limits_{n\geqslant 0} a_n x^n$ est entièrement déterminée par ses coefficients par la relation $\forall k\in\mathbb{N},\ a_k k! = f^{(k)}(0)$.
   De plus d'après le cours $\mathrm{G_X}$ et $\mathrm{G_{X'}}$ sont définies au moins sur $[-1,1]$ (voisinage de 0) donc
   $$\mathrm{X}\sim\mathrm{X}' \iff \forall n\in\mathbb{N},\ \mathbb{P}(\mathrm{X}=n)=\mathbb{P}(\mathrm{X}'=n)\iff \mathrm{G_X}=\mathrm{G_{X'}}$$
   Ainsi $\boxed{\mathrm{X}\sim\mathrm{X}' \text{ si et seulement si } \mathrm{G_X}=\mathrm{G_{X'}}}$
2. <u>C'est encore du cours :</u> Soit $t\in[-1,1]$.
   On a $\left|t^{\mathrm{Y}}\right|\leqslant 1$ donc t^{Y} et est une variable aléatoire réelle d'espérance finie et de même pour t^{Z} et $t^{\mathrm{Y+Z}}$.
   Selon la formule de transfert, par indépendance de t^{X} et t^{Y} selon le lemme des coalitions, on a
   $$\mathrm{G_{Y+Z}}(t)=\mathbb{E}\left(t^{\mathrm{Y+Z}}\right)=\mathbb{E}\left(t^{\mathrm{Y}}\right)\mathbb{E}\left(t^{\mathrm{Z}}\right)=\mathrm{G_Y}(t)\mathrm{G_Z}(t)$$
   donc avec la question précédente : $\boxed{\forall t\in[-1,1],\ \mathrm{G_X}(t)=\mathrm{G_Y}(t)\mathrm{G_Z}(t) \text{ est une relation qui caractérise } \mathrm{X}\sim\mathrm{Y+Z}}$
3. On commence cette question en démontrant deux lemmes avec Y et Z deux variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{N}$

   Lemme 1 On suppose que $\mathrm{G_Y G_Z}$ est polynomiale de degré n. Alors $\mathrm{G_Y}$ et $\mathrm{G_Z}$ le sont également.

   Soit $k\in\mathbb{N}$ tel que $k>n$. Comme $(\mathrm{Y+Z}\geqslant k)=\bigcup\limits_{i=k}^{+\infty}(\mathrm{Y+Z}=i)$ (union disjointe),

   On a $\mathbb{P}(\mathrm{Y+Z}\geqslant k)=\sum\limits_{i=k}^{+\infty}\mathbb{P}(\mathrm{Y+Z}=i)=\sum\limits_{i=k}^{+\infty}0=0$ $\mathrm{G_Y G_Z}$ est polynomiale de degré n
   Comme $(\mathrm{Y}=k)\subset(\mathrm{Y+Z}\geqslant k)$, on a $0\leqslant\mathbb{P}(\mathrm{Y}=k)\leqslant 0$
   On a donc $\forall k>n$, $\mathbb{P}(\mathrm{Y}=k)=0$ et $\mathbb{P}(\mathrm{Z}=k)=0$.
   Ainsi $\mathrm{G_Y}$ et $\mathrm{G_Z}$ sont polynomiales de degré au plus n
   On peut faire plus simple en remarquant que

   Lemme 2 On suppose que $\mathrm{G_Y}$ est constante alors Y est presque sûrement nulle.
   En effet, toutes les dérivées en 0 de $\mathrm{G_Y}$ étant nulles, on a $\forall k\in\mathbb{N}^*,\ \mathbb{P}(\mathrm{Y}=k)=0$

   Maintenant soit $t\in[-1,1]$, on a $\mathrm{G_X}(t)=\sum\limits_{k=0}^{n}\binom{n}{k}p^k t^k(1-p)^{n-k}=(pt+1-p)^n$

   Si $n\geqslant 2$**,** alors on prend Y et Z suivent respectivement le lois binomiales $\mathcal{B}(n-1,p)$ et $\mathcal{B}(1,p)$ (loi de Bernoulli)
   De sorte $\forall t\in[-1,1],\ \mathrm{G_X}(t)=\mathrm{G_Y}(t)\mathrm{G_Z}(t)$
   donc d'après la question précédente on a $\mathrm{X}\sim\mathrm{Y+Z}$ or Y et Z ne sont pas sûrement constante
   donc X est décomposable dans ce cas.

   Si $n=1$**,** on suppose par l'absurde que X est décomposable et que $\mathrm{X}\sim\mathcal{B}(1,p)$
   Ceci nous fournit Y et Z deux variables aléatoires indépendantes à valeurs dans $\mathbb{N}$ qui ne sont pas constantes presque sûrement tels que $\mathrm{X}\sim\mathrm{Y+Z}$
   On a alors $\mathrm{G_X}=\mathrm{G_Y G_Z}$ de degré 1
   donc $\mathrm{G_Y}$ ou $\mathrm{G_Z}$ est de degré 0 d'après le lemme 1
   donc Y ou Z est presque sûrement constante avec le lemme 2 ce qui est absurde

   On a montré que $\boxed{\text{X est décomposable si et seulement si } n\geqslant 2}$

4. (a) Comme U et V sont supposés être à coefficients positifs, en divisant U et multipliant V par le coefficients dominant de U, on garde la positivité des coefficients.
De plus A étant unitaire, on peut alors supposer que U et V sont unitaires.
Par ailleurs sans perte de généralité, on peut supposer que $0 \leqslant \deg(\mathrm{U}) \leqslant \deg(\mathrm{V}) \leqslant 4$.
Par l'absurde, on suppose que U et V non constants donc $\deg \mathrm{U} \in \{1, 2\}$.

Méthode 1 -1 est racine évidente de T et après calcul au brouillon, on a $\mathrm{A}(t) = (\mathrm{T}+1)(\mathrm{T}^3-\mathrm{T}^2+\mathrm{T}+1)$
Je note $\mathrm{B(T)} = \mathrm{T}^3 - \mathrm{T}^2 + \mathrm{T} + 1$. La fonction polynomiale $t \mapsto \mathrm{B}(t)$ a pour dérivée $t \mapsto 3t^2 - 2t + 1$.
Le trinôme B′ a pour discriminant -8, ainsi $\forall t \in \mathbb{R}$, $\mathrm{B}'(t) > \mathrm{T}^3 - \mathrm{T}^2 + \mathrm{T} + 1$
donc $t \mapsto \mathrm{B}(t)$ est strictement croissante et continue sur $\mathbb{R}$ or $\lim\limits_{t\to+\infty} \mathrm{B}(t) = +\infty$ et $\lim\limits_{t\to-\infty} \mathrm{B}(t) = -\infty$
Ainsi selon le théorème de la bijection, B est bijective de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$
ce qui nous fournit un unique $r \in \mathbb{R}$ tel que $\mathrm{B}(r) = 0$
comme $\mathrm{B}'(r) \neq 0$ alors r est racine simple de B et c'est l'unique racine réelle de B.
De plus $\mathrm{B}(-1) = -2 < 0$ et $\mathrm{B}(0) = 1$ donc $-1 < r < 0$ selon la monotonie de B
d'où les seules racines réelles de A sont -1 et r et elles sont simples
donc A admet deux autres racines complexes conjuguées distinctes notées λ et $\overline{\lambda}$
on peut donc écrire : $\mathrm{A(T)} = (\mathrm{T}+1)(\mathrm{T}-r)(\mathrm{T}-\lambda)(\mathrm{T}-\overline{\lambda})$
Ou encore $\mathrm{A(T)} = (\mathrm{T}+1)(\mathrm{T}-r)(\mathrm{T}-\mathrm{Re}(\lambda)\mathrm{T}+|\lambda|^2)$ (décomposition dans $\mathbb{R}$ en facteurs irréductibles)
donc $\mathrm{U} \in \{\mathrm{T}+1, \mathrm{T}-r, (\mathrm{T}+1)(\mathrm{T}-r), (\mathrm{T}-\lambda)(\mathrm{T}-\overline{\lambda})\}$
On remarque que la somme des racines de A est $-1 + r + \lambda + \overline{\lambda} = 0$ à l'aide du coefficient de T^3

Si $\mathrm{U} = \mathrm{T}+1$, la somme des racines de V est $r + \lambda + \overline{\lambda} = 1$
donc le coefficient de degré 2 de V est -1 ce qui est absurde
Si $\mathrm{U} = \mathrm{T}-r$, c'est absurde de manière analogue car $r = \lambda + \overline{\lambda} - 1 < 0$
Si $\mathrm{U} = (\mathrm{T}+1)(\mathrm{T}-r)$, la somme des racines de V est $\lambda + \overline{\lambda} = 1 - r$
donc le coefficient de degré 3 de V est $-1 + r$ ce qui est absurde
Si $\mathrm{U} = (\mathrm{T}-\lambda)(\mathrm{T}-\overline{\lambda})$ alors $\mathrm{V} = (\mathrm{T}+1)(\mathrm{T}-r)$, et c'est absurde de manière analogue

Méthode 2 **Si** $\deg \mathrm{U} = 1$, alors $\deg \mathrm{V} = 3$.
On peut donc écrire $\mathrm{U} = \mathrm{T} + a$ et $\mathrm{V} = \mathrm{T}^3 + b\mathrm{T}^2 + c\mathrm{T} + d$ avec $a, b, c, d \in \mathbb{R}^+$
On a alors $a + b = 0$ (coefficient de degré 3 de $\mathrm{A} = \mathrm{UV}$) comme $a \geqslant 0$ et $b \geqslant 0$, on a alors $a = b = 0$
donc $\mathrm{U} = \mathrm{T}$ et $\mathrm{V} = \mathrm{T}^3 + c\mathrm{T} + d$ et ainsi $1 = \mathrm{A}(0) = \mathrm{U}(0)\mathrm{V}(0) = 0$ ce qui est absurde.

Si $\deg \mathrm{U} = 2$, alors $\deg \mathrm{V} = 2$
On peut donc écrire $\mathrm{U} = \mathrm{T}^2 + a\mathrm{T} + b$ et $\mathrm{V} = \mathrm{T}^2 + c\mathrm{T} + d$ avec $a, b, c, d \in \mathbb{R}^+$
On a alors $a + c = 0$ (coefficient de degré 3 de $\mathrm{A} = \mathrm{UV}$) comme $a \geqslant 0$ et $c \geqslant 0$, on a alors $a = c = 0$
donc $\mathrm{U} = \mathrm{T}^2 + b$ et $\mathrm{V} = \mathrm{T}^2 + d$ ainsi $\mathrm{T}^4 + 2\mathrm{T} + 1 = \mathrm{A} = \mathrm{UV} = \mathrm{T}^4 + (b+d)\mathrm{T}^2 + bd$
donc $2 = 0$ ce qui est absurde

$\boxed{\text{si U et V sont à coefficients réels positifs ou nuls tels que UV = A, alors U ou V est constant}}$

(b) On prends X vérifiant $\mathrm{X} \sim \mathcal{B}(1/2, 2)$ qui est décomposable d'après 3
Alors $\mathrm{G_X} : t \mapsto \left(\dfrac{t+1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}t^2 + \frac{1}{2}t + \frac{1}{4}$
et ainsi $\mathrm{G_{X^2}} : t \mapsto \frac{1}{4}t^4 + \frac{1}{2}t + \frac{1}{4}$ polynomiale associé au polynôme $\frac{1}{4}\mathrm{A(T)}$
Si X^2 était décomposable alors $\frac{1}{4}\mathrm{A(T)}$ serait le produit de deux polynômes à coefficients réels positifs ou nuls et ces deux polynômes seraient non constants d'après le lemme 2 de la question 3
Ceci est absurde selon la question précédente

$\boxed{\text{En prenant } \mathrm{X} \sim \mathcal{B}(1/2, 2)\text{,, alors est décomposable X alors que } \mathrm{X}^2 \text{ ne l'est pas}}$

I.B - Variables uniformes

1. **Variables uniformes décomposables**

(a) **Méthode 1** (l'initiale) On considère la fonction $\varphi : \begin{cases} \mathbb{N} & \longrightarrow & \mathbb{N}^2 \\ n & \longmapsto & (q, r) \text{ où } n = aq + r \text{ et } r \in [\![0, a-1]\!] \end{cases}$

Cette fonction est bien définie d'après le théorème de la division euclidienne (existence et unicité) car $a \in \mathbb{N}^*$.

donc d'après le cours, $\varphi \circ \mathrm{X}$ est une variable aléatoire discrète car X l'est et toujours d'après le cours, on peut définir les variables aléatoires Q, R à valeurs entières telles que $(\mathrm{Q}, \mathrm{R}) = \varphi \circ \mathrm{X}$

Q et R vérifiant les propriétés voulues, ceci prouve l'existence

si on a Q_1 et R_1 à valeurs entières vérifiant les mêmes propriétés alors

$$\forall \omega \in \Omega,\ a\mathrm{Q}_1(\omega) + \mathrm{R}_1(\omega) = \mathrm{X}(\omega) = a\mathrm{Q}(\omega) + \mathrm{R}(\omega) \text{ et } \mathrm{R}_1(\omega), \mathrm{R}(\omega) \in [\![0, a-1]\!]$$

donc par théorème de la division euclidienne (unicité), on a

$\forall \omega \in \Omega,\ \mathrm{Q}_1(\omega) = \mathrm{Q}(\omega)$ et $\mathrm{R}_1(\omega) = \mathrm{R}(\omega)$ ce qui prouve l'unicité

Méthode 2 (plus « naturelle »)

Soit $\omega \in \Omega$. Comme $a \in \mathbb{N}^*$, le théorème de la division euclidienne,

nous fournit un unique couple $(q_\omega, r_\omega) \in \mathbb{N} \times [\![0, a-1]\!]$ tel que $\mathrm{X}(\omega) = aq_\omega + r_\omega$

On peut donc définir le couple d'applications sur Ω : (Q, R) par la relation

$$\forall \omega \in \Omega,\ \mathrm{X}(\omega) = a\mathrm{Q}(\omega) + \mathrm{R}(\omega)$$

R prend ces valeurs dans $[\![0, a-1]\!]$ qui est fini.

Soit $k \in [\![0, a-1]\!]$. On a $(\mathrm{R} = k) = \bigcap_{j=0}^{+\infty} (\mathrm{X} = aj + k)$ (union dénombrable d'événements)

Ainsi R est une variable aléatoire sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ et il en est de même pour $\mathrm{Q} = \dfrac{\mathrm{X} - \mathrm{R}}{a}$ par linéarité

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{il existe un unique couple de variables aléatoires entières } (\mathrm{Q}, \mathrm{R}) \text{ définies sur } \Omega \text{ telles que} \\ \mathrm{X} = a\mathrm{Q} + \mathrm{R} \ \text{ et } \ \forall \omega \in \Omega,\ \mathrm{R}(\omega) \in [\![0, a-1]\!]\end{array}}$$

(b) Comme X est à valeur dans $[\![0, n-1]\!]$ et $n = ab$

La restriction φ de $[\![0, n-1]\!]$ vers $[\![0, b-1]\!] \times [\![0, a-1]\!]$ est bijective (théorème de la division euclidienne)

donc $\boxed{(\mathrm{Q}, \mathrm{R}) \text{ suit la loi uniforme sur } [\![0, b-1]\!] \times [\![0, a-1]\!]}$ qui est de cardinal n

Soit $i \in [\![0, b-1]\!]$. La loi de couple donnant les lois marginales, on a :

$$\mathbb{P}(\mathrm{Q} = i) = \sum_{j=0}^{a-1} \mathbb{P}((\mathrm{Q}, \mathrm{R}) = (i, j)) = \sum_{j=0}^{a-1} \frac{1}{n} = \frac{a}{n} = \frac{1}{b}$$

donc $\boxed{\mathrm{Q} \text{ suit la loi uniforme sur } [\![0, b-1]\!] \text{ et R la loi uniforme sur } [\![0, a-1]\!]}$ (analogue)

(c) On considère les variables aléatoires $\mathrm{Y} = a\mathrm{Q}$ et $\mathrm{Z} = \mathrm{R}$ à valeurs dans $\mathbb{N}$. Ce sont deux variables aléatoires discrètes vérifiant non presque sûrement constantes d'après la question précédente car a et $b \geqslant 2$ et de plus, $\mathrm{X} = \mathrm{Y} + \mathrm{Z}$.

Il reste à montrer que Y et Z sont indépendantes. Soit $y \in \mathrm{Y}(\Omega)$ et $z \in \mathrm{Z}(\Omega)$.
En fait Y est à valeurs dans $\{ak \mid k \in [\![0, b-1]\!]\}$ et Z dans $[\![0, a-1]\!]$ d'après (b).
On peut donc écrire $y = aq$ avec $q \in [\![0, b-1]\!]$ et on a $z \in [\![0, a-1]\!]$.
Alors $\mathbb{P}\left((\mathrm{Y}, \mathrm{Z}) = (y, z)\right) = \mathbb{P}\left((\mathrm{Q}, \mathrm{R}) = (q, z)\right) = \dfrac{1}{n}$
et $\mathbb{P}(\mathrm{Y} = y)\,\mathbb{P}(\mathrm{Z} = z) = \mathbb{P}(\mathrm{Q} = q)\,\mathbb{P}(\mathrm{R} = z) = \dfrac{1}{b}\dfrac{1}{a} = \dfrac{1}{n}$
donc $\mathbb{P}(\mathrm{Y} = y)\,\mathbb{P}(\mathrm{Z} = z) = \mathbb{P}\left((\mathrm{Y}, \mathrm{Z}) = (y, z)\right)$
On vient d'établir l'indépendance de Y et Z Ainsi $\boxed{\text{X est décomposable}}$

Vu l'énoncé, on se permet d'identifier polynôme et fonction polynomiale : $\mathrm{G_Y}(\mathrm{T}) = \displaystyle\sum_{i=0}^{b-1} \frac{\mathrm{T}^{ai}}{b}$

et $\mathrm{G_Z}(\mathrm{T}) = \displaystyle\sum_{i=0}^{a-1} \frac{\mathrm{T}^{i}}{a}$ donc $\boxed{\mathrm{G_X}(\mathrm{T}) = \left(\displaystyle\sum_{i=0}^{b-1} \frac{\mathrm{T}^{ai}}{b}\right)\left(\displaystyle\sum_{i=0}^{a-1} \frac{\mathrm{T}^{i}}{a}\right)}$ produit de polynômes non constants

2. **Variables uniformes non décomposables**

(a) $\boxed{\begin{array}{c}\text{On veut montrer qu'il suffit de prouver le résultat suivant :}\\ \textit{si } \mathrm{U} \textit{ et } \mathrm{V} \textit{ sont des polynômes de } \mathbb{R}[\mathrm{T}] \textit{ unitaires et à coefficients dans } \mathbb{R}^+ \textit{ tels que}\\ \mathrm{U}(\mathrm{T})\mathrm{V}(\mathrm{T}) = 1 + \mathrm{T} + \cdots + \mathrm{T}^{n-1}\textit{, alors l'un des deux polynômes } \mathrm{U} \textit{ ou } \mathrm{V} \textit{ est constant.}\\ \text{pour prouver que X est non décomposable}\end{array}}$

On suppose pour cela que l'implication établie et on veut montrer que X est non décomposable.
On suppose par l'absurde que X est décomposable, ce qui nous fournit Y et Z presque sûrement non constantes tel que $\mathrm{G_X}(\mathrm{T}) = \mathrm{G_Y}(\mathrm{T})\mathrm{G_Z}(\mathrm{T})$ en utilisant 2.
On a $\mathrm{G_X}(\mathrm{T}) = \dfrac{1 + \mathrm{T} + \cdots + \mathrm{T}^{n-1}}{n}$ d'après le lemme 1 de 3, $\mathrm{G_Y}$ et $\mathrm{G_Z}$ sont polynomiales
en posant $\mathrm{U}(\mathrm{T}) = u\mathrm{G_Y}(\mathrm{T})$ et $\mathrm{V}(\mathrm{T}) = v\mathrm{G_Z}(\mathrm{T})$ de façon à avoir U et V unitaire
alors U et V sont des polynômes de $\mathbb{R}[\mathrm{T}]$ unitaires et à coefficients dans $\mathbb{R}^+$
tels que $\mathrm{U}(\mathrm{T})\mathrm{V}(\mathrm{T}) = 1 + \mathrm{T} + \cdots + \mathrm{T}^{n-1}$
donc l'un des deux polynômes U ou V est constant
donc $\mathrm{G_Y}$ ou $\mathrm{G_Z}$ est presque sûrement constante
donc d'après le lemme 2 établi en 3, Y ou Z est presque sûrement constante égale à 0
Absurde. D'où le résultat annoncé.

(b) Les racines complexes de ce polynôme de degré $n-1$, $\mathrm{UV} = \dfrac{1 - \mathrm{T}^n}{1 - \mathrm{T}}$ sont les $n-1$ éléments de $\mathbb{U}_n \setminus \{1\}$
Dans $\mathbb{C}[\mathrm{X}]$, ce polynôme est scindé à racines simples, il en est donc de même pour U et V
La seule racine éventuelle réelle de U et V est -1 et $-1 = 1/-1$
Les racines complexes non réelles de U et V sont conjuguées deux à deux car U et V sont dans $\mathbb{R}[\mathrm{X}]$
De plus si z est racine de U alors $\overline{z}$ encore racine de U or $\overline{z} = 1/z$ car $|z| = 1$
comme $r = \deg \mathrm{U}$ et que $\mathrm{U}(0) \neq 0$ car $\mathrm{U}(0)\mathrm{V}(0) = 1$, donc $\mathrm{T}^r\mathrm{U}\left(\frac{1}{\mathrm{T}}\right)$ est un polynôme de degré r
donc $\mathrm{T}^r\mathrm{U}\left(\frac{1}{\mathrm{T}}\right)$ et U sont de même degré, scindé à racines simples avec les mêmes racines
ceci nous fournit un réel u tel que $\mathrm{T}^r\mathrm{U}\left(\frac{1}{\mathrm{T}}\right) = u\mathrm{U}$
de plus $u > 0$ car les coefficients de U sont positifs
comme U est unitaire, alors $1 = u\mathrm{U}(0) = u \cdot |\mathrm{U}(0)|$
mais $|\mathrm{U}(0)|$ est le module du produit des racines de U car U est unitaire d'où $u = 1$
ainsi $\boxed{\mathrm{U}(\mathrm{T}) = \mathrm{T}^r\mathrm{U}\left(\frac{1}{\mathrm{T}}\right) \text{ et de même } \mathrm{V}(\mathrm{T}) = \mathrm{T}^s\mathrm{V}\left(\frac{1}{\mathrm{T}}\right)}$

(c) On note que *implicitement* $u_0 = u_r = v_0 = v_s = 1$. (imprécision de l'énoncé)

On remarque que pour tout $k \in [\![1, r]\!],\ u_k = u_{r-k}$ car $\mathrm{U(T)} = \mathrm{T}^r\mathrm{U}\left(\frac{1}{\mathrm{T}}\right)$

En regardant le terme de degré r, dans UV, on a : $1 = \sum_{k=0}^{r} u_{r-k}v_k = \sum_{k=0}^{r} u_k v_k = 1 = 1 + \sum_{k=1}^{r} u_k v_k$

donc $1 = u_0 + \sum_{k=1}^{r} u_k v_k$

donc $\sum_{k=1}^{r} u_k v_k = 0$ or $\forall k \in [\![1, r]\!],\ u_k v_k \geqslant 0$ donc $\boxed{\forall k \in [\![1, r]\!],\ u_k v_k = 0}$

(d) On va montrer par récurrence forte que : $\forall k \in [\![1, r]\!],\ u_k \in \{0, 1\}$ et $v_k \in \{0, 1\}$

Initialisation On a bien $u_0 = v_0 = 1 \in \{0, 1\}$

Hérédité Soit $k \in [\![0, r-1]\!]$ tel que pour tout $p \in [\![0, k]\!]$, on ait $u_p \in \{0, 1\}$ et $v_p \in \{0, 1\}$.

Montrons $u_{k+1} \in \{0, 1\}$ et $v_{k+1} \in \{0, 1\}$.

Avec la convention $\sum_{i=1}^{l}(\cdots) = 0$ si $l = 0$, le terme de degré $k + 1$ dans UV donne :

$1 = u_{k+1} + v_{k+1} + \sum_{i=1}^{k} u_i v_{k+1-i}$ donc $0 \leqslant \sum_{i=1}^{k} u_i v_{k+1-i} \leqslant 1$

Comme pour tout $i \in [\![1, k]\!]$ on a u_i et $v_{k+1-i} \in \{0, 1\}$, alors $\sum_{i=1}^{k} u_i v_{k+1-i} \in \{0, 1\}$

donc $u_{k+1} + v_{k+1} \in \{0, 1\}$ or $u_{k+1}v_{k+1} = 0$ d'après la question précédente

On a donc $u_{k+1} \in \{0, 1\}$ et $v_{k+1} \in \{0, 1\}$

Conclusion On a montré par récurrence que $\boxed{\forall k \in [\![0, r]\!],\ u_k \in \{0, 1\} \text{ et } v_k \in \{0, 1\}}$

(e) Pour tout $p \in [\![r + 1, s]\!]$, on a $1 = \sum_{i=0}^{r} u_i v_{p-i} = v_p + \sum_{i=1}^{p} u_i v_{p-i}$ avec le terme de degré p de UV

En faisant une récurrence comme à la question précédente, on montre : $\forall k \in [\![0, s]\!],\ v_k \in \{0, 1\}$

On a $\mathrm{U}(1) = \sum_{i=0}^{r} u_i = 2 + \sum_{i=1}^{r-1} u_i$ et $\mathrm{V}(1) = 2 + \sum_{i=1}^{s-1} v_i$

Ainsi $2 \leqslant \mathrm{U}(1) \leqslant r + 1$ et $2 \leqslant \mathrm{V}(1) \leqslant s + 1$ et $\mathrm{V}(1) \in \mathbb{N}$ et $\mathrm{U}(1) \in \mathbb{N}$

or $\mathrm{U}(1)\mathrm{V}(1) = n$ et n est premier. Ce qui est absurde

On vient de prouver par l'absurde le résultat suivant : *si* U *et* V *sont des polynômes de* $\mathbb{R}[\mathrm{T}]$ *unitaires et à coefficients dans* $\mathbb{R}^+$ *tels que* $\mathrm{U(T)V(T)} = 1 + \mathrm{T} + \cdots + \mathrm{T}^{n-1}$, *alors l'un des deux polynômes* U *ou* V *est constant.*

Ceci permet de conclure que si n est premier, une loi uniforme sur $[\![0, n-1]\!]$ n'est pas décomposable.

II Variables infiniment divisibles : exemples

II.A - Variables bornées

1. Soit $m \in \mathbb{N}^*$. Le résultat admis en début de problème : nous fournit $\mathrm{X}_{m,1}, \ldots, \mathrm{X}_{m,m}$ définies sur un espace probabilisé Ω_m, mutuellement indépendantes et de même loi que $\dfrac{\mathrm{X}}{m}$.

   Pour tout $\omega \in \Omega_m$, on a $\sum_{i=1}^{m} \mathrm{X}_i(\omega) = a$. On a bien $\mathrm{X} \sim \mathrm{X}_{m,1} + \cdots + \mathrm{X}_{m,m}$

   donc $\boxed{\text{X est infiniment divisible}}$

2. (a) Par l'absurde, on suppose qu'il existe $i \in [\![1, n]\!]$, tel que $\mathbb{P}\left(\mathrm{X}_i > \dfrac{\mathrm{M}}{n}\right) > 0$

par conséquent, pour tout $j \in [\![1, n]\!]$, on a $\mathbb{P}\left(\mathrm{X}_j > \dfrac{\mathrm{M}}{n}\right) > 0$ car $\mathrm{X}_j \sim \mathrm{X}_i$

donc par indépendance $\mathbb{P}\left(\displaystyle\bigcap_{j=1}^{n}\left(\mathrm{X}_j > \frac{\mathrm{M}}{n}\right)\right) = \displaystyle\prod_{j=1}^{n} \mathbb{P}\left(\mathrm{X}_j > \frac{\mathrm{M}}{n}\right) > 0$

Or $\displaystyle\bigcap_{j=1}^{n}\left(\mathrm{X}_j > \frac{\mathrm{M}}{n}\right) \subset \left(\sum_{j=1}^{n} \mathrm{X}_j > \mathrm{M}\right)$

donc $\mathbb{P}(\mathrm{X} > \mathrm{M}) = \mathbb{P}\left(\displaystyle\sum_{j=1}^{n} \mathrm{X}_j > \mathrm{M}\right) > 0$ ce qui est absurde car $(\mathrm{X} > \mathrm{M}) = \emptyset$

Ainsi $\boxed{\text{pour tout } i \in [\![1, n]\!], \text{ on } \mathrm{X}_i \leqslant \dfrac{\mathrm{M}}{n} \text{ presque sûrement}}$ puis $\boxed{|\mathrm{X}_i| \leqslant \dfrac{\mathrm{M}}{n} \text{ presque sûrement}}$

car $\left(|\mathrm{X}_i| \leqslant \dfrac{\mathrm{M}}{n}\right) = \left(\mathrm{X}_i \leqslant \dfrac{\mathrm{M}}{n}\right) \cup \left(-\mathrm{X}_i \leqslant \dfrac{\mathrm{M}}{n}\right)$ union d'événements négligeables (analogue pour $-\mathrm{X}_i$)

(b) **Lemme :** si X et Y sont deux variables aléatoires réelles sur le même espace probabilisé d'espérances finies telles que presque sûrement $\mathrm{X} \leqslant \mathrm{Y}$, alors $\mathbb{E}(\mathrm{X}) \leqslant \mathbb{E}(\mathrm{Y})$. (admettre en temps limité est conseillé)

Il suffit de le faire pour $\mathrm{Y} \geqslant 0$ presque sûrement et d'utiliser la linéarité de $\mathbb{E}$.

On a $\mathbb{E}(\mathrm{Y}) = \displaystyle\sum_{y \in \mathrm{Y}(\Omega)} y\mathbb{P}(\mathrm{Y} = y) = \sum_{\substack{y \in \mathrm{Y}(\Omega) \\ y < 0}} y\mathbb{P}(\mathrm{Y} = y) + \sum_{\substack{y \in \mathrm{Y}(\Omega) \\ y \geqslant 0}} y\mathbb{P}(\mathrm{Y} = y)$

or $0 = \mathbb{P}(\mathrm{Y} < 0) = \displaystyle\sum_{\substack{y \in \mathrm{Y}(\Omega) \\ y < 0}} \mathbb{P}(\mathrm{Y} = y)$ donc pour tout $y < 0$, on a $\mathbb{P}(\mathrm{Y} = y) = 0$

d'où $\mathbb{E}(\mathrm{Y}) = \displaystyle\sum_{\substack{y \in \mathrm{Y}(\Omega) \\ y \geqslant 0}} y\mathbb{P}(\mathrm{Y} = y) \geqslant 0$. On vient de prouver le lemme.

Les X_i étant presque sûrement bornées, elles admettent toutes une espérance et une variance.

On a $\mathbb{V}(\mathrm{X}) = \mathbb{V}(\mathrm{X}_1 + \cdots + \mathrm{X}_n) = \mathbb{V}(\mathrm{X}_1) + \cdots + \mathbb{V}(\mathrm{X}_n)$ par indépendance

donc $\mathbb{V}(\mathrm{X}) = n\mathbb{V}(\mathrm{X}_1)$ car les X_i ont même loi or $\mathbb{V}(\mathrm{X}_1) = \mathbb{E}\left(\mathrm{X}_1^2\right) - \mathbb{E}(\mathrm{X}_1)^2 \leqslant \mathbb{E}\left(\mathrm{X}_1^2\right)$

par croissance de l'espérance : $\mathbb{V}(\mathrm{X}_1) \leqslant \dfrac{\mathrm{M}^2}{n^2}$ en utilisant $\mathrm{X}_1^2 \leqslant \dfrac{\mathrm{M}^2}{n^2}$ presque sûrement à l'aide de (a)

On en déduit que $\boxed{\mathbb{V}(\mathrm{X}) \leqslant \dfrac{\mathrm{M}^2}{n}}$

3. **Méthode 1 :** **Lemme :** On se donne Y une variable aléatoire à valeurs réelles positives d'espérance nulle, alors $\mathrm{Y} = 0$ presque sûrement.

En utilisant les notations du lemme précédent, on a : $0 = \mathbb{E}(\mathrm{Y}) = 0\mathbb{P}(\mathrm{Y} = 0) + \displaystyle\sum_{\substack{y \in \mathrm{Y}(\Omega) \\ y > 0}} y\mathbb{P}(\mathrm{Y} = y)$

donc pour tout $y \in \mathrm{Y}(\Omega) \setminus \{0\}$, $\mathbb{P}(\mathrm{Y} = y) = 0$

comme $(\mathrm{Y} > 0) = \displaystyle\bigcup_{\substack{y \in \mathrm{Y}(\Omega) \\ y > 0}} (\mathrm{Y} = y)$ (réunion dénombrable disjointe) donc $\mathbb{P}(\mathrm{Y} > 0) = \displaystyle\sum_{\substack{y \in \mathrm{Y}(\Omega) \\ y > 0}} \mathbb{P}(\mathrm{Y} = y)$

Ainsi $\mathbb{P}(\mathrm{Y} > 0) = 0$ et donc $\mathrm{P}(\mathrm{Y} = 0) = 1 - \mathbb{P}(\mathrm{Y} > 0) = 1$. On vient de prouver le lemme annoncé.

On a donc $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ 0 \leqslant \mathbb{V}(\mathrm{X}) \leqslant \dfrac{\mathrm{M}^2}{n}$ donc $\mathbb{V}(\mathrm{X}) = 0$ d'où $\mathbb{E}\left((\mathrm{X} - \mathbb{E}(\mathrm{X}))^2\right) = 0$

Ce qui permet de conclure que $\boxed{\text{X est presque sûrement constante}}$ égale à $\mathbb{E}(\mathrm{X})$ d'après le lemme

Méthode 2 : On a $\mathbb{V}(\mathrm{X}) = 0$ comme en méthode 1.

Ainsi d'après Pafnouti Tchebychev etJules-Irénée Bienaymé, on a $\forall \varepsilon > 0,\ 0 \leqslant \mathbb{P}(|\mathrm{X} - \mathbb{E}(\mathrm{X})| \geqslant \epsilon) \leqslant \dfrac{\mathbb{V}(\mathrm{X})}{\epsilon^2} = 0$ donc

$$\forall p \in \mathbb{N}^*,\ \mathbb{P}\left(|\mathrm{X} - \mathbb{E}(\mathrm{X})| \geqslant \frac{1}{p}\right) = 0 \ \text{ et } \mathbb{P}\left(|\mathrm{X} - \mathbb{E}(\mathrm{X})| > \frac{1}{p}\right) = 1$$

Or $(\mathrm{X} = \mathbb{E}(\mathrm{X})) = \displaystyle\bigcap_{p=1}^{+\infty} \left(|\mathrm{X} - \mathbb{E}(\mathrm{X})| < \frac{1}{p}\right)$

Par intersection dénombrable d'événements presque sûrs, l'événement $(\mathrm{X} = \mathbb{E}(\mathrm{X}))$ est presque sûr.

II.B - Étude du caractère infiniment divisible de quelques variables entières

1. Une variable binomiale est bornée et non constante
   donc $\boxed{\text{une variable binomiale n'est pas infiniment divisible d'après II.A}}$
2. Soit X une variable aléatoire suivant loi de poisson de paramètre $\lambda > 0$ Soit $t \in [-1, 1]$.
   On a $\mathrm{G_X}(t) = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}(\mathrm{X} = k)\, t^k = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(t\lambda)^k}{k!} \mathrm{e}^{-\lambda}$ donc $\mathrm{G_X}(t) = \mathrm{e}^{\lambda(t-1)}$ si $\mathrm{X} \sim \mathcal{P}(\lambda)$
   En appliquant $n-1$ fois la propriété de I.A.2 ainsi que le lemme des coalitions avec X_i et $\mathrm{X}_1 + \cdots + \mathrm{X}_{i-1}$:
   $$\mathrm{G}_{\mathrm{X}_1+\cdots+\mathrm{X}_n}(t) = \prod_{i=1}^{n} \mathrm{G}_{\mathrm{X}_i}(t) = \prod_{i=1}^{n} \mathrm{e}^{\lambda_i(t-1)} = \mathrm{e}^{(\lambda_1+\cdots+\lambda_n)(t-1)}$$
   donc $\mathrm{G}_{\mathrm{X}_1+\cdots+\mathrm{X}_n}$ est la fonction génératrice d'une variable aléatoire de loi de Poisson de paramètre $\lambda_1 + \cdots + \lambda_n$
   donc d'après I.A.1 $\boxed{\mathrm{X}_1 + \cdots + \mathrm{X}_n \text{ suit une loi de Poisson de paramètre } \lambda_1 + \cdots + \lambda_n}$
3. On note λ le paramètre de X ainsi $\mathrm{X} \sim \mathcal{P}(\lambda)$.
   Soit $m \in \mathbb{N}^*$. Le résultat admis en début de problème : nous fournit $\mathrm{X}_{m,1}, \ldots, \mathrm{X}_{m,m}$ définies sur un espace probabilisé Ω_m, mutuellement indépendantes et de même loi que pour tout $i \in [\![1, m]\!]$, $\mathrm{X}_{m,i} \sim \mathcal{P}(\lambda/m)$
   donc d'après la question précédente $\mathrm{X}_{m,1} + \cdots +, \mathrm{X}_{m,m} \sim \mathcal{P}(\lambda)$
   ainsi $\mathrm{X}_{m,1} + \cdots +, \mathrm{X}_{m,m} \sim \mathrm{X}$ et pour tout i, j, $\mathrm{X}_{m,i} \sim \mathrm{X}_{m,j}$ et les $\mathrm{X}_{m,i}$ sont mutuellement indépendantes
   donc $\boxed{\text{X est infiniment divisible}}$
4. **Méthode 1 :** Soit $i \in [\![1, r]\!]$, X_i est infiniment divisible. Pour $m \in \mathbb{N}^*$, on peut trouver $\mathrm{Y}_1, \ldots, \mathrm{Y}_m$ indépendantes de même loi telles que $\mathrm{X}_i \sim \mathrm{Y}_1 + \cdots + \mathrm{Y}_m$.
   Comme $t \mapsto it$, est injective, on a $i\mathrm{Y}_1, \ldots, i\mathrm{Y}_m$ sont de même loi et $i\mathrm{X}_i \sim i\mathrm{Y}_1 + \cdots + i\mathrm{Y}_m$
   De plus $i\mathrm{Y}_1, \ldots, i\mathrm{Y}_m$ sont indépendantes selon le lemme des coalitions donc $i\mathrm{X}_i$ est infiniment divisible.
   De plus les $i\mathrm{X}_i$ sont mutuellement indépendantes avec le lemme des coalitions à valeurs dans $\mathbb{N}$.
   Il reste à établir que la somme de r variables aléatoires indépendantes infiniment divisibles en variables aléatoires à valeurs entières est infiniment divisibles. Il suffit de le faire pour $r = 2$ puis effectuer une récurrence, en utilisant le lemme des coalitions dans l'hérédité.
   Soit alors Y et Z deux variables aléatoires indépendantes infiniment divisibles en variables aléatoires à valeurs entières. Soit $m \in \mathbb{N}^*$.
   On peut trouver $\mathrm{Y}_1, \ldots \mathrm{Y}_m$ indépendantes de même loi sur un espace probabilisé et $\mathrm{Z}_1, \ldots \mathrm{Z}_m$ indépendantes de même loi sur un autre espace probabilisé toutes à valeurs entières telles que $\mathrm{Y} \sim \mathrm{Y}_1 + \cdots + \mathrm{Y}_m$ et $\mathrm{Z} \sim \mathrm{Z}_1 + \cdots + \mathrm{Z}_m$.
   On pose $g = \mathrm{G}_{\mathrm{Y}_1}$, $h = \mathrm{G}_{\mathrm{Z}_1}$ et $f = gh$

Comme g et h sont développables en série entière à coefficients positifs et de rayon au moins 1, alors par produit de Cauchy h est développable en série entière à coefficients positifs et de rayon au moins 1.
De plus $f(1) = g(1)h(1) = 1$ donc on peut définir une loi $\mathcal{L}$ à valeurs entières dont la fonction génératrice est f (famille sommable de réels positifs de somme 1)
La propriété du début nous fournit $\mathrm{X}_1, \ldots, \mathrm{X}_m$ indépendantes de loi $\mathcal{L}$ sur un espace probabilisé $(\Omega_m, \mathcal{A}_m, \mathbb{P}_m)$.
En utilisant les résultats de la premières parties on montre que

$$\mathrm{G}_{\mathrm{X}_1+\cdots+\mathrm{X}_m} = f^m = g^m h^m = \mathrm{G}_{\mathrm{Y}_1+\cdots+\mathrm{Y}_m}\mathrm{G}_{\mathrm{Z}_1+\cdots+\mathrm{Z}_m} = \mathrm{G}_\mathrm{Y}\mathrm{G}_\mathrm{Z} = \mathrm{G}_{\mathrm{Y}+\mathrm{Z}}$$

donc on a $\mathrm{Y}+\mathrm{Z} \sim \mathrm{X}_1 + \cdots + \mathrm{X}_m$ ce qui permet de conclure.

Méthode 2 : Je note : $\mathrm{Z} = \displaystyle\sum_{i=1}^{r} i\mathrm{X}_i$ Soit $m \in \mathbb{N}^*$.

UN THÉORÈME ADMIS DU COURS (plus général que le rappel), nous fournit une famille $\left(\mathrm{Y}_{m,k}^{(i)}\right)_{\substack{1\leqslant i\leqslant r\\ 1\leqslant k\leqslant m}}$ de variables aléatoires mutuellement indépendantes suivant des lois de Poisson définies sur un même espace probabilisé, en choisissant les paramètres -en utilisant ce qui précède- de façon que pour $i \in [\![1, r]\!]$:

$$\forall k \in [\![1, m]\!],\ \mathrm{Y}_{m,k}^{(i)} \sim \mathrm{Y}_{m,1}^{(i)} \text{ et } \sum_{k=1}^{m} \mathrm{Y}_{m,k}^{(i)} \sim \mathrm{X}_i$$

Posons alors : $\mathrm{Z}_{m,k} = \displaystyle\sum_{i=1}^{r} i\mathrm{Y}_{m,k}^{(i)}$, pour $k \in [\![1, m]\!]$,
les variables $\mathrm{Z}_{m,1}, \ldots, \mathrm{Z}_{m,m}$ sont mutuellement indépendantes (lemme des coalitions)
Pour $i \in [\![1, r]\!]$ et $k \in [\![1, m]\!]$, on a : $i\mathrm{Y}_{m,k}^{(i)} \sim i\mathrm{Y}_{m,1}^{(i)}$, en utilisant : pour f une fonction et pour $\mathrm{A} \sim \mathrm{B}$ deux variables aléatoires discrètes telles que $f \circ \mathrm{A}$ et $f \circ \mathrm{B}$ existent, alors $f(\mathrm{A}) \sim f(\mathrm{B})$ et
d'après le lemme des coalitions, les variables $1\mathrm{Y}_{m,k}^{(1)}, \ldots, r\mathrm{Y}_{m,k}^{(r)}$ sont mutuellement indépendantes donc

$$\mathrm{G}_{\mathrm{Z}_{m,k}} = \mathrm{G}_{1\mathrm{Y}_{m,k}^{(1)}+\cdots+r\mathrm{Y}_{m,k}^{(r)}} = \prod_{i=1}^{r} \mathrm{G}_{i\mathrm{Y}_{m,k}^{(i)}} = \prod_{i=1}^{r} \mathrm{G}_{i\mathrm{Y}_{m,1}^{(i)}} = \mathrm{G}_{1\mathrm{Y}_{m,1}^{(1)}+\cdots+r\mathrm{Y}_{m,1}^{(r)}} = \mathrm{G}_{\mathrm{Z}_{m,1}}$$

donc les $\mathrm{Z}_{k,m}$ suivent la même loi pour $k \in [\![1, m]\!]$.
De plus $\displaystyle\sum_{k=1}^{m} \mathrm{Z}_{k,m} = \sum_{k=1}^{m}\sum_{i=1}^{r} i\mathrm{Y}_{m,k}^{(i)} = \sum_{i=1}^{r} i \sum_{k=1}^{m} \mathrm{Y}_{m,k}^{(i)}$ or pour tout $i \in [\![1, r]\!]$, $i\mathrm{X}_i \sim i\displaystyle\sum_{k=1}^{m} \mathrm{Y}_{m,k}^{(i)}$
par le lemme des coalitions : $(i\mathrm{X}_i)_{1\leqslant i\leqslant r}$ et $\left(i\displaystyle\sum_{k=1}^{m} \mathrm{Y}_{m,k}^{(i)}\right)_{1\leqslant i\leqslant r}$ sont deux familles de variables aléatoires mutuellement indépendantes. En utilisant les fonctions génératrices on a :

$$\sum_{i=1}^{r} i \sum_{k=1}^{m} \mathrm{Y}_{m,k}^{(i)} \sim \sum_{i=1}^{r} i\mathrm{X}_i$$

donc on a trouvé : $\mathrm{Z}_{1,m}, \ldots \mathrm{Z}_{m,m}$ mutuellement indépendantes et de même loi telle que : $\mathrm{Z} \sim \displaystyle\sum_{k=1}^{m} \mathrm{Z}_{m,k}$

ainsi $\boxed{\mathrm{Z} = \displaystyle\sum_{i=1}^{r} i\mathrm{X}_i \text{ est une variable aléatoire infiniment divisible}}$

II.C - Séries de variables aléatoires à valeurs entières

1. (a) On a $\mathrm{A} \subset \mathrm{B} \cup (\mathrm{A} \cap \overline{\mathrm{B}})$ (réunion disjointe)
donc $\mathbb{P}(\mathrm{A}) \leqslant \mathbb{P}(\mathrm{B}) + \mathbb{P}(\mathrm{A} \cap \overline{\mathrm{B}})$ ainsi $\mathbb{P}(\mathrm{A}) - \mathbb{P}(\mathrm{B}) \leqslant \mathbb{P}(\mathrm{A} \cap \overline{\mathrm{B}}) + \mathbb{P}(\overline{\mathrm{A}} \cap \mathrm{B})$
de façon analogue $\mathbb{P}(\mathrm{B}) - \mathbb{P}(\mathrm{A}) \leqslant \mathbb{P}(\mathrm{A} \cap \overline{\mathrm{B}}) + \mathbb{P}(\overline{\mathrm{A}} \cap \mathrm{B})$
d'où $\boxed{|\mathbb{P}(\mathrm{A}) - \mathbb{P}(\mathrm{B})| \leqslant \mathbb{P}(\mathrm{A} \cap \overline{\mathrm{B}}) + \mathbb{P}(\overline{\mathrm{A}} \cap \mathrm{B})}$

(b) On a $(\mathrm{X} \neq \mathrm{Y}) = \displaystyle\bigcup_{k=0}^{+\infty} (\mathrm{X} = k, \mathrm{Y} \neq k)$ (réunion dénombrable disjointe)
d'où l'existence des membres et l'égalité : $\mathbb{P}(\mathrm{X} \neq \mathrm{Y}) = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}(\mathrm{X} = k, \mathrm{Y} \neq k)$
de même $\mathbb{P}(\mathrm{X} \neq \mathrm{Y}) = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}(\mathrm{Y} = k, \mathrm{X} \neq k)$
Soit $t \in [-1, 1]$. On a pour $k \in \mathbb{N}$, $\left|(\mathbb{P}(\mathrm{X} = k) - \mathbb{P}(\mathrm{Y} = k))\, t^k\right| \leqslant \mathbb{P}(\mathrm{X} = k, \mathrm{Y} \neq k) + \mathbb{P}(\mathrm{X} \neq k, \mathrm{Y} = k)$
d'où la convergence absolue de la série $\displaystyle\sum_{k \geqslant 0} (\mathbb{P}(\mathrm{X} = k) - \mathbb{P}(\mathrm{Y} = k))\, t^k$
car $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} (\mathbb{P}(\mathrm{X} = k, \mathrm{Y} \neq k) + \mathbb{P}(\mathrm{X} \neq k, \mathrm{Y} = k)) = 2\mathbb{P}(\mathrm{X} \neq \mathrm{Y})$
d'où $\boxed{|\mathrm{G_X}(t) - \mathrm{G_Y}(t)| \leqslant \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \left|(\mathbb{P}(\mathrm{X} = k) - \mathbb{P}(\mathrm{Y} = k))\, t^k\right| \leqslant 2\mathbb{P}(\mathrm{X} \neq \mathrm{Y})}$

2. (a) On a pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathrm{Z}_n = \displaystyle\bigcup_{i=n}^{+\infty} (\mathrm{U}_i \neq 0)$ donc $\mathrm{Z}_{n+1} \subset \mathrm{Z}_n$ d'où $\boxed{\text{la décroissance de la suite } (\mathrm{Z}_n)}$
par théorème $0 \leqslant \mathbb{P}(\mathrm{Z}_n) \leqslant \displaystyle\sum_{i=n}^{+\infty} \mathbb{P}(\mathrm{U}_i \neq 0) \in [0, +\infty[$, par convergence de la série $\displaystyle\sum_{i \geqslant 0} \mathbb{P}(\mathrm{U}_i \neq 0)$
et on a aussi $\displaystyle\sum_{i=n}^{+\infty} \mathbb{P}(\mathrm{U}_i \neq 0) \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} 0$ ainsi selon les gendarmes $\boxed{\lim_{n \to \infty} \mathbb{P}(\mathrm{Z}_n) = 0}$

(b) Une partie de $\mathbb{N}$ est infinie si et seulement si elle est non majorée.
Ainsi $\{\omega \in \Omega \mid \{i \in \mathbb{N}^* \mid \mathrm{U}_i(\omega) \neq 0\} \text{ est infini } \} = \displaystyle\bigcap_{n=1}^{+\infty} \left(\bigcup_{i=n}^{+\infty} (\mathrm{U}_i \neq 0)\right) = \bigcap_{n=1}^{+\infty} \mathrm{Z}_n$ c'est donc un événement
Or selon la question précédente, la famille (Z_n) étant décroissante et $\mathbb{P}\left(\displaystyle\bigcap_{n=1}^{+\infty} \mathrm{Z}_n\right) = \lim_{n \to \infty} \mathbb{P}(\mathrm{Z}_n) = 0$
par le théorème de continuité décroissante
donc $\mathbb{P}(\{\omega \in \Omega \mid \{i \in \mathbb{N}^* \mid \mathrm{U}_i(\omega) \neq 0\} \text{ est fini } \}) = 1 - \mathbb{P}(\{\omega \in \Omega \mid \{i \in \mathbb{N}^* \mid \mathrm{U}_i(\omega) \neq 0\} \text{ est infini } \}) = 1$
On en déduit que $\boxed{\text{l'ensemble } \{i \in \mathbb{N}^* \mid \mathrm{U}_i \neq 0\} \text{ est presque sûrement fini}}$

(c) Je note $\mathrm{FS} = \{\omega \in \Omega \mid \{i \in \mathbb{N}^* \mid \mathrm{U}_i(\omega) \neq 0\} \text{ est fini } \}$ qui est un événement presque sûr d'après (b)
Pour $\omega \in \mathrm{FS}$, la série $\displaystyle\sum_{i \geqslant 1}^{\infty} \mathrm{U}_i(\omega)$ converge et à valeur dans $\mathbb{N}$ car la suite est presque nulle
donc la série $\displaystyle\sum_{i \geqslant 1}^{\infty} \mathrm{U}_i$ converge simplement sur l'événement presque sûr FS
ainsi $\boxed{\text{S est définie presque sûrement}}$

On considérera que $\mathrm{S}(\omega)=0$ pour $\omega \notin \mathrm{FS}$.
Soit $t \in [-1,1]$. On a $|\mathrm{G}_{\mathrm{S}_n}(t)-\mathrm{G}_{\mathrm{S}}(t)| \leqslant \mathbb{P}(\mathrm{S}_n \neq \mathrm{S})$ d'après II.C.b
et pour tout $\omega \in \Omega \setminus \mathrm{FS}$, la suite croissante $(\mathrm{S}_n(\omega))_{n\geqslant 1}$ à valeurs dans $\mathbb{N}$ converge vers $\mathrm{S}(\omega)$ (stationnaire)
donc la suite $((\mathrm{S}_n \neq \mathrm{S}))_{n\geqslant 1}$ est une suite décroissante d'événements décroissante pour l'inclusion
la continuité décroissante nous donne alors $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathbb{P}((\mathrm{S}_n \neq \mathrm{S})) = \mathbb{P}\left(\bigcap\limits_{n=1}^{+\infty}(\mathrm{S}_n \neq \mathrm{S})\right)$
or $\bigcap\limits_{n=1}^{+\infty}(\mathrm{S}_n \neq \mathrm{S}) \subset \overline{\mathrm{FS}}$ donc $\mathbb{P}\left(\bigcap\limits_{n=1}^{+\infty}(\mathrm{S}_n \neq \mathrm{S})\right)=0$
d'oû $\forall t \in [-1,1]$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $|\mathrm{G}_{\mathrm{S}_n}(t)-\mathrm{G}_{\mathrm{S}}(t)| \leqslant \mathbb{P}(\mathrm{S}_n \neq \mathrm{S})$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathbb{P}(\mathrm{S}_n \neq \mathrm{S})=0$
ainsi $\boxed{\mathrm{G}_{\mathrm{S}_n} \text{ converge uniformément vers } \mathrm{G}_{\mathrm{S}} \text{ sur } [-1,1]}$

3. (a) Soit $i \in \mathbb{N}^*$. $\sum \mathbb{P}(\mathrm{X}_i \neq 0) = 1 - \sum \mathbb{P}(\mathrm{X}_i = 0) = 1 - \dfrac{\mathrm{e}^{-\lambda_i}\lambda_i^0}{0!} = 1-\mathrm{e}^{-\lambda_i}$
On remarque que le loi de probabilité est valable même si $\lambda_i = 0$, car dans ce cas :

$$\mathbb{P}(\mathrm{X}_i = k) = \frac{\mathrm{e}^{-\lambda_i}\lambda^k}{k!} = \frac{0^k}{k!} = \delta_{k,0} \text{ symbole de Kronecker}$$

Pour tout $i \in \mathbb{N}^*$ $0 \leqslant \lambda_i$ donc $\left|1-\mathrm{e}^{-\lambda_i}\right| = 1-\mathrm{e}^{-\lambda_i} \leqslant \lambda_i$ par inégalité de convexité
donc $\mathbb{P}(\mathrm{X}_i \neq 0) \leqslant \lambda_i$ et la série $\sum \lambda_i$ est convergente,
Par comparaison entre séries à termes positifs, $\boxed{\text{la série } \sum \mathbb{P}(\mathrm{X}_i \neq 0) \text{ est convergente}}$

(b) La suite (X_i) vérifie les hypothèses de la suite (U_i) de la 2. par indépendance mutuelle et selon a ainsi les résultats de 2. s'appliquent
En particulier : $\boxed{\text{la série } \sum\limits_{i\geqslant 1} \mathrm{X}_i \text{ est presque sûrement convergente}}$
On note alors $\mathrm{S}_n = \sum\limits_{i=1}^{n} \mathrm{X}_i$ et $\mathrm{S} = \sum\limits_{i=1}^{\infty} \mathrm{X}_i$ comme en 2. en substituant U_n par X_n
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. La variable aléatoire S_n suit une loi de Poisson de paramètre $\sum\limits_{i=1}^{n}\lambda_i$
selon II..B.2 car les X_i sont mutuellement indépendantes sous réserve de vérification pour $\lambda_i = 0$
Soit $t \in [-1,1]$. On a $\mathrm{G}_{\mathrm{S}_n}(t) = \exp\left(\left(\sum\limits_{i=1}^{n}\lambda_i\right)(t-1)\right)$
La suite de fonction $(\mathrm{G}_{\mathrm{S}_n})_{n\geqslant 1}$ converge uniformément donc simplement vers G_{S} sur $[-1,1]$ d'après 2. sous réserve d'avoir vérifier que
si $\lambda_i = 0$ alors $\mathrm{G}_{\mathrm{X}_i} : t \mapsto \mathrm{e}^{0(t-1)} = 1 = \sum\limits_{k=0}^{+\infty}\mathbb{P}(\mathrm{X}_i = k)t^k$; ce qui est bien le cas
donc par passage à la limite : $\mathrm{G}_{\mathrm{S}}(t) = \exp(\lambda(t-1))$ car $\sum\limits_{i=1}^{+\infty}\lambda_i = \lambda$
donc en utilisant I.A.1, $\boxed{\mathrm{S} = \sum\limits_{i=1}^{\infty} \mathrm{X}_i \text{ suit une loi de Poisson de paramètre } \lambda}$

(c) Nous allons procéder par étapes :

Fonction génératrice de $i\mathrm{X}_i$: Soit $i \in \mathbb{N}^*$.

La fonction génératrice de $i\mathrm{X}_i$ est $\mathrm{G}_{i\mathrm{X}_i} : t \mapsto \exp(\lambda_i(t^i - 1)) = \mathrm{G}_{\mathrm{X}_i}\left(t^i\right)$

<u>Démonstration :</u> Pour $t \in [-1, 1]$, on a :

$$\mathrm{G}_{i\mathrm{X}_i}(t) = \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}(i\mathrm{X}_i = k)t^k = \sum_{k\in i\mathbb{N}} \mathbb{P}(i\mathrm{X}_i = k)t^k = \sum_{l\in\mathbb{N}} \mathbb{P}(i\mathrm{X}_i = il)t^{il} = \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}(\mathrm{X}_i = k)t^{ik}$$

Ce calcul est correct car il s'agit de somme de séries absolument convergentes, que l'on peut donc interpréter comme des sommes de familles sommables de réels.

X **est définie presque sûrement :** $\boxed{\text{la série } \sum_{i\geqslant 1} i\mathrm{X}_i \text{ est presque sûrement convergente}}$

<u>Démonstration :</u> Soit $i \geqslant 1$. On pose $\mathrm{U}_i = i\mathrm{X}_i$.
Selon le lemme des coalitions, $(\mathrm{U}_i)_{i\in\mathbb{N}^*}$ est une suite de variable aléatoires mutuellement indépendantes (i.e. toute sous suites finies est mutuellement indépendantes).
On remarque que $\mathbb{P}(\mathrm{U}_i \neq 0) = \mathbb{P}(\mathrm{X}_i \neq 0)$. Ainsi la série $\sum \mathbb{P}(\mathrm{U}_i \neq 0)$ converge d'après (a).
On peut donc utiliser 2, qui nous donne : $\mathrm{X} = \sum_{i\geqslant 1} i\mathrm{X}_i$ est définie presque sûrement.

Fonction génératrice de X **:** La fonction génératrice de X est $\mathrm{G}_\mathrm{X} : t \mapsto \mathrm{e}^{-\lambda} \exp\left(\sum_{i=1}^{+\infty} \lambda_i t^i\right)$.

<u>Démonstration :</u> On note $\mathrm{S}_n = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{U}_i$.
Selon 2(c), $\mathrm{G}_{\mathrm{S}_n}$ converge uniformément donc simplement vers G_S sur $[-1, 1]$.
En utilisant l'indépendance des U_i, on a pour $t \in [-1, 1]$:

$$\mathrm{G}_{\mathrm{S}_n}(t) = \prod_{i=1}^{n} \mathrm{G}_{i\mathrm{X}_i}(t) = \exp\left(-\sum_{i=1}^{n}\lambda_i\right) \exp\left(\sum_{i=1}^{n}\lambda_i t^i\right)$$

Comme on a convergence de la série de réels positifs $\sum_{i\geqslant 1}\lambda_i$ de somme λ et que $|\lambda_i t^i| \leqslant \lambda_i$,

on a convergence absolue donc convergence de la série $\sum_{i\geqslant 1}\lambda_i t^i$, ainsi on a

$$\mathrm{G}_\mathrm{X}(t) = \lim_{n\to+\infty} \mathrm{G}_{\mathrm{S}_n}(t) = \exp\left(-\sum_{i=1}^{+\infty}\lambda_i\right) \exp\left(\sum_{i=1}^{+\infty}\lambda_i t^i\right)$$

$\mathrm{X} = \sum_{i=1}^{\infty} iXi$ **définit une variable aléatoire infiniment divisible :** Soit $m \in \mathbb{N}^*$.

<u>Démonstration :</u> On considère la fonction $g_m : t \mapsto \mathrm{e}^{-\lambda/m} \exp\left(\sum_{i=1}^{+\infty} \frac{\lambda_i}{m} t^i\right)$ définie sur $[-1, 1]$
De sorte que $g_m(t)^m = \mathrm{G}_\mathrm{X}(t)$
g_m est une fonction génératrice d'une variable aléatoire ; pour s'en convaincre il suffit de reprendre 3., en substituant λ_i par $\frac{\lambda_i}{m}$, jusqu'à l'étape précédente.
donc g_m définit donc une loi notée $\mathcal{L}_m$ à valeurs dans $\mathbb{N}$.

Le résultat gentiment laissée à notre liberté par le sujet nous fournit un espace probabilisé Ω_m et des variables aléatoires $Z_{m,1}, \ldots, Z_{m,m}$ définies sur Ω_m, mutuellement indépendantes et de loi $\mathcal{L}_m$.
De sorte qu'à l'aide de la mutuelle indépendance :

$$G_{Z_{m,1}+\cdots+Z_{m,m}} = \prod_{k=1}^{m} G_{Z_{m,k}} = (g_m)^m = G_X$$

Ainsi on a trouvé : $Z_{1,m}, \ldots Z_{m,m}$ *mutuellement indépendantes et de même loi telle que :* $X \sim \sum_{k=1}^{m} Z_{m,k}$

On vient de montrer que $\boxed{X = \sum_{i=1}^{\infty} iXi \text{ définit une variable aléatoire infiniment divisible}}$

Mea culpa : *On aurait pu traiter ainsi (en plus simple) II.B.3 et surtout II.B.4 !*

III Variables entières infiniment divisibles : étude générale

III.A - Série entière auxiliaire

1. Il existe une unique suite $(\lambda_i)_{i\in\mathbb{N}^*}$ définie par : $\lambda_1 = \dfrac{\mathbb{P}(X=1)}{\mathbb{P}(X=0)}$ et la relation de récurrence

$$\forall k \geqslant 2,\ \lambda_k = \frac{k\mathbb{P}(X=k) - \sum_{j=1}^{k-1} j\lambda_j \mathbb{P}(X=k-j)}{k\mathbb{P}(X=0)}$$

Ainsi $\boxed{\text{il existe une unique suite réelle } (\lambda_i)_{i\in\mathbb{N}^*} \text{ telle que } \forall k \in \mathbb{N}^*,\ k\mathbb{P}(X=k) = \sum_{j=1}^{k} j\lambda_j \mathbb{P}(X=k-j)}$

2. Soit $k \in \mathbb{N}^*$. On a par définition de λ_k :

$$k\lambda_k \mathbb{P}(X=0) = k\mathbb{P}(X=k) - \sum_{j=1}^{k-1} j\lambda_j \mathbb{P}(X=k+-j)$$

donc avec l'inégalité triangulaire on a :

$$|\lambda_k|\,\mathbb{P}(X=0) \leqslant \mathbb{P}(X=k) + \sum_{j=1}^{k-1} \frac{j}{k} |\lambda_j|\,\mathbb{P}(X=k-j) \leqslant \mathbb{P}(X=k) + \sum_{j=1}^{k-1} |\lambda_j|\,\mathbb{P}(X=k-j)$$

Ce qui donne la première inégalité voulue.
de plus pour tout $j \in \mathbb{N}^*$, $\mathbb{P}(X=j) \leqslant 1 - \mathbb{P}(X=0)$ car $\mathbb{P}(X \in \{0,j\}) \leqslant 1$ donc

$$\mathbb{P}(X=k) + \sum_{j=1}^{k-1} |\lambda_j|\,\mathbb{P}(X=k-j) \leqslant (1-\mathbb{P}(X=0)) + \sum_{j=1}^{k-1} |\lambda_j|\,(1-\mathbb{P}(X=0))$$

On a bien : $\boxed{|\lambda_k|\mathbb{P}(X=0) \leqslant \mathbb{P}(X=k) + \sum_{j=1}^{k-1} |\lambda_j|\mathbb{P}(X=k-j) \leqslant (1-\mathbb{P}(X=0)) \left(1 + \sum_{j=1}^{k-1} |\lambda_j|\right)}$

3. On va montrer par récurrence que sur $k \in \mathbb{N}$ que : $1 + \sum_{j=1}^{k} |\lambda_j| \leqslant \dfrac{1}{\mathbb{P}(X=0)^k}$

   La propriété est évidente pour $k = 0$ car $1 + 0 \leqslant 1$ (initialisation)

   Pour l'hérédité on se donne $k \in \mathbb{N}$ tel que $1 + \sum_{j=1}^{k} |\lambda_j| \leqslant \dfrac{1}{\mathbb{P}(X=0)^k}$.

   On veut montrer que : $1 + \sum_{j=1}^{k+1} |\lambda_j| \leqslant \dfrac{1}{\mathbb{P}(X=0)^{k+1}}$.

   Or d'après la question précédente : $|\lambda_{k+1}| \leqslant \dfrac{(1-\mathbb{P}(X=0))\left(1 + \sum_{j=1}^{k} |\lambda_j|\right)}{\mathbb{P}(X=0)}$ car $\mathbb{P}(X=0) > 0$

   donc $|\lambda_{k+1}| \leqslant \dfrac{\dfrac{1-\mathbb{P}(X=0)}{\mathbb{P}(X=0)^k}}{\mathbb{P}(X=0)} = \dfrac{1-\mathbb{P}(X=0)}{\mathbb{P}(X=0)^{k+1}}$ par hypothèse de récurrence car $1 - \mathbb{P}(X=0) \geqslant 0$

   donc $1 + \sum_{j=1}^{k+1} |\lambda_j| \leqslant \dfrac{1}{\mathbb{P}(X=0)^k} + \dfrac{1-\mathbb{P}(X=0)}{\mathbb{P}(X=0)^{k+1}} = \dfrac{1}{\mathbb{P}(X=0)^{k+1}}$

   En conclusion $\boxed{\text{pour tout } k \in \mathbb{N}^*, \text{ montrer : } 1 + \sum_{j=1}^{k} |\lambda_j| \leqslant \dfrac{1}{\mathbb{P}(X=0)^k}}$

4. On pose $t = \mathbb{P}(X=0)$ et on a $\left|\lambda_k t^k\right| \leqslant \left(1 + \sum_{j=1}^{k} |\lambda_j|\right) t^k = 1$

   donc la suite $\left(\lambda_k t^k\right)_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée

   Ainsi $\boxed{\text{la série entière } \sum \lambda_k t^k \text{ a un rayon de convergence } \rho(X) \text{ supérieur ou égal à } \mathbb{P}(X=0)}$

5. H'_X est somme de la série entière $\sum_{k \geqslant 1} k \lambda_k t^{k-1}$ de rayon $\rho(X)$ d'après le cours ou encore de $\sum_{p \geqslant 0} (p+1)\lambda_{p+1} t^p$

   G_X est somme de la série entière $\sum_{k \geqslant 0} \mathbb{P}(X=k) t^k$ de rayon noté r_X

   G'_X est somme de la série entière $\sum_{k \geqslant 1} k\mathbb{P}(X=k) t^{k-1}$ ou $\sum_{p \geqslant 0} (p+1)\mathbb{P}(X=p+1) t^p$ de rayon r_X d'après le cours

   On note $\alpha_X = \min(\rho(X), r_X)$.
   En effectuant un produit de Cauchy de série entières, on obtient pour $t \in]-\alpha_X, \alpha_X[$:

$$H'_X(t)G_X(t) = \sum_{k=0}^{+\infty} \left(\sum_{p=0}^{k} (p+1)\lambda_{p+1}\mathbb{P}(X=k-p)\right) t^k = \sum_{k=0}^{+\infty} \left(\sum_{j=1}^{k+1} j\lambda_j \mathbb{P}(X=k+1-j)\right) t^k$$

   donc par définition des λ_i pour $i = k+1 \geqslant 1$

$$\forall t \in]-\alpha_X, \alpha_X[, \quad H'_X(t)G_X(t) = \sum_{k=0}^{+\infty} (k+1)\mathbb{P}(X=k+1) t^k = G'_X(t)$$

   Pour $t \in]-\rho(X), \rho(X)[$, il semblerait qu'il y ait un soucis d'énoncé si $\rho(X) > r_X$

   On remarque que G_X est solution sur $]-\alpha_X, \alpha_X[$ du problème de Cauchy : $\begin{cases} y' = H'_X(t)y \\ y(0) = \mathbb{P}(X=0) \end{cases}$

Or la fonction $t \mapsto \exp(\mathrm{H_X}(t))$ est également solution de ce problème de Cauchy.

Le théorème de Cauchy linéaire, nous donne alors : $\boxed{\forall t \in]-\alpha_X, \alpha_X[, \quad \mathrm{G_X}(t) = \exp(\mathrm{H_X}(t))}$

6. On note $\beta = \min(\alpha_X, \alpha_Y)$

   Soit $t \in]-\beta, \beta[$. Par indépendance de X et Y et d'après ce qui précède, on a

$$\exp(\mathrm{H_{X+Y}}(t)) = \mathrm{G_{X+Y}}(t) = \mathrm{G_X}(t)\mathrm{G_Y}(t) = \exp(\mathrm{H_X}(t))\exp(\mathrm{H_Y}(t)) = \exp(\mathrm{H_X}(t) + \mathrm{H_Y}(t))$$

   donc appliquant ln : $\forall t \in]-\beta, \beta[$, $\mathrm{H_{X+Y}}(t) = \mathrm{H_X}(t) + \mathrm{H_Y}(t)$

   Par unicité du développement en série entières les coefficients de $\mathrm{H_{X+Y}}$ et $\mathrm{H_X} + \mathrm{H_Y}$ sont les mêmes d'où $\boxed{\mathrm{H_{X+Y}}(t) = \mathrm{H_X}(t) + \mathrm{H_Y}(t) \text{ pour tout réel } t \text{ vérifiant } |t| < \min(\rho(\mathrm{X}), \rho(\mathrm{Y}))}$

III.B - Variables aléatoires entières λ-positives

1. En utilisant III.A.2, on a : $\lambda_k \mathbb{P}(\mathrm{X} = 0) \leqslant \mathbb{P}(\mathrm{X} = k) + \sum_{j=1}^{k-1} \lambda_j \mathbb{P}(\mathrm{X} = k - j)$ par $\lambda-$ positivité

   Comme $\mathbb{P}(\mathrm{X} = 0) > 0$, $\boxed{\text{Pour tout } k \in \mathbb{N}^*, \ \lambda_k \leqslant \dfrac{\mathbb{P}(\mathrm{X} = k)}{\mathbb{P}(\mathrm{X} = 0)}}$

   La série $\sum_{k \geqslant 0} \dfrac{\mathbb{P}(\mathrm{X} = k)}{\mathbb{P}(\mathrm{X} = 0)}$ converge et a pour somme $\dfrac{1}{\mathbb{P}(\mathrm{X} = 0)}$

   Par comparaison entre séries à termes positifs $\boxed{\sum \lambda_k \text{ converge}}$

2. On a $\forall t \in [-1, 1]$, $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $\left|\lambda_k t^k\right| \leqslant \lambda_k$ or $\sum \lambda_k$ converge

   donc la série entière définissant $\mathrm{H_X}$ converge normalement sur $[-1, 1]$ et les fonctions $t \mapsto \lambda_k t^k$ y sont continues donc $\rho(\mathrm{X}) \geqslant 1$ et $\mathrm{H_X}$ admet un prolongement continue en 1 et en -1 si $\rho(\mathrm{X}) = 1$

   Encore un petit soucis d'énoncé dans le cas où $\rho(\mathrm{X}) = 1$ car la fonction $\mathrm{H_X}$ n'est définie que sur $]-1, 1[$ dans ce cas. Ici il eût été préférable de définir $\mathrm{H_X}$ là où la série entière converge.

   Dans le cas où $\rho(\mathrm{X}) = 1$, je choisis de noter encore $\mathrm{H_X}$ le prolongement continue de $\mathrm{H_X}$ sur $[-1, 1]$

   Donc on sait que pour $t \in]-1, 1[$, $\mathrm{G_X}(t) = \exp(\mathrm{H_X}(t))$

   ainsi les fonctions continues sur $[-1, 1]$; $\mathrm{G_X}$ et $\exp \circ \mathrm{H_X}$ coincide sur la partie dense $]-1, 1[$

   ainsi $\boxed{\forall t \in [-1, 1], \ \mathrm{G_X}(t) = \exp(\mathrm{H_X}(t))}$

   De plus $1 = \mathrm{G_X}(1) = \exp(\mathrm{H_X}(1)) = \exp\left(\ln(\mathbb{P}(\mathrm{X} = 0)) + \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k\right)$

   en appliquant ln on obtient : $\boxed{\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k = -\ln(\mathbb{P}(\mathrm{X} = 0))}$

3. On peut appliquer II.C.3.car la série de réels positifs $\sum \lambda_i$ converge.

   Ensuite on vérifie que si un $\lambda_i = 0$, on a bien la cohérence avec les formules :

   si X_i est la variable aléatoire nulle on a bien $\mathbb{P}(\mathrm{X}_i = k) = \dfrac{\mathrm{e}^{-0} 0^k}{k!}$ pour $k \in \mathbb{N}$ et $\mathrm{G_{X_i}} : t \mapsto 1 = \exp(0(t-1))$

   On trouve alors que $\sum_{i=1}^{\infty} i\mathrm{X}_i$ est presque sûrement définie

   De plus admet comme fonction génératrice (voir II.C.3.(c)) vérifiant

$$\forall t \in [-1,1],\ \mathrm{G}_{\sum_{i=1}^{\infty} i\mathrm{X}_i}(t) = \exp\left(-\sum_{i=1}^{+\infty} \lambda_i\right) \exp\left(\sum_{i=1}^{+\infty} \lambda_i t^i\right) = \exp\left(-\ln\left(\mathbb{P}(\mathrm{X}=0)\right) + \sum_{i=1}^{+\infty} \lambda_i t^i\right) = \exp\left(\mathrm{H}_{\mathrm{X}}(t)\right)$$

donc la fonction génératrice de $\sum_{i=1}^{\infty} i\mathrm{X}_i$ est G_{X}. D'où avec I.A.1, $\boxed{\mathrm{X} \sim \sum_{i=1}^{\infty} i\mathrm{X}_i}$

III.C - Caractérisation des variables entières infiniment divisibles

1. (a) On suppose $\mathrm{X}_{n,1}$ n'est pas presque sûrement positive ou nulle.

   Alors $0 < \mathbb{P}(\mathrm{X}_{n,1} < 0) = \sum_{\substack{x \in \mathrm{X}_{n,1}(\Omega_n) \\ x<0}} \mathbb{P}(\mathrm{X}_{n,1} = x)$ où Ω_n est l'univers au départ des $\mathrm{X}_{n,k}$

   Ceci nous fournit $x \in \mathrm{X}_{n,1}(\Omega_n)$ tel que $x < 0$

   Or $\bigcap_{k=1}^{n} (\mathrm{X}_{n,k} = x) \subset (\mathrm{X}_{n,1} + \cdots + \mathrm{X}_{n,n} = nx)$

   et comme $\mathrm{X}_{n,1}, \ldots, \mathrm{X}_{n,n}$ sont indépendantes et de même loi :

   $$\mathbb{P}(\mathrm{X} = nx) = \mathbb{P}(\mathrm{X}_{n,1} + \cdots + \mathrm{X}_{n,n} = nx) \geqslant \prod_{k=1}^{n} \mathbb{P}(\mathrm{X}_{n,k} = x) = \mathbb{P}(\mathrm{X}_{n,1} = x)^n$$

   donc $\mathbb{P}(\mathrm{X} = nx) > 0$ et $x < 0$ et X est à valeurs dans $\mathbb{N}$ Absurde

   d'où $\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbb{N}^*,\ \mathrm{X}_{n,1} \text{ est presque sûrement positive ou nulle}}$

   (b) On a $(\mathrm{X}_{n,1} + \cdots + \mathrm{X}_{n,n} = 0) = \bigcap_{k=1}^{n} (\mathrm{X}_{n,k} = 0)$ presque sûrement

   car les $\mathrm{X}_{n,k}$ sont presque sûrement positives ou nulles

   donc comme précédemment $0 < \mathbb{P}(\mathrm{X} = 0) = \prod_{k=1}^{n} \mathbb{P}(\mathrm{X}_{n,k} = 0) = \mathbb{P}(\mathrm{X}_{n,1} = 0)^n$

   d'où $\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbb{N}^*, \text{ montrer que } \mathbb{P}(\mathrm{X}_{n,1} = 0) > 0}$

   (c) Par l'absurde on suppose qu'il existe $x \in \mathbb{R}^+ \setminus \mathbb{N}$ tel que $\mathbb{P}(\mathrm{X}_{n,1} = x) > 0$

   comme $(\mathrm{X}_{n,1} = x, \mathrm{X}_{n,2} = 0, \ldots \mathrm{X}_{n,n} = 0 \subset (\mathrm{X} = x)$

   on aurait $\mathbb{P}(\mathrm{X} = x) \geqslant \mathbb{P}(\mathrm{X}_{n,1} = x) \times \mathbb{P}(\mathrm{X}_{n,1} = 0)^{n-1} > 0$ absurde

   Ayant même loi que $\mathrm{X}_{n,1}$, $\boxed{\text{les variables aléatoires } \mathrm{X}_{n,i} \text{ sont presque sûrement à valeurs dans } \mathbb{N}}$

2. (a) La suite $(\mathbb{P}(\mathrm{X}_{n,1} = 0))_{n \geqslant 1}$ est à valeurs dans le compact $[0,1]$. Elle y admet donc une suite extraite $\left(\mathbb{P}\left(\mathrm{X}_{\varphi(n),1} = 0\right)\right)_{n \geqslant 1}$ qui converge vers une valeur d'adhérence $\ell \in [0,1]$

   On montre que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\mathbb{P}(\mathrm{X} = 0) = \mathbb{P}(\mathrm{X}_{n,1} = 0)^n$, voir 1.(b)

   donc si on avait $\ell \in [0,1[$, on aurait $\mathbb{P}(\mathrm{X} = 0) = \mathbb{P}\left(\mathrm{X}_{\varphi(n),1} = 0\right)^{\varphi(n)} \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0$

   ce qui est absurde car $\mathbb{P}(\mathrm{X} = 0) > 0$ donc $\lambda = 1$

   Ainsi la suite bornée $(\mathbb{P}(\mathrm{X}_{n,1} = 0))_{n \geqslant 1}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ de dimension finie, admet 1 comme unique valeur d'adhérence, elle converge donc.

   on a montré $\boxed{\lim_{n \to \infty} \mathbb{P}(\mathrm{X}_{n,1} = 0) = 1}$

   (b) Soit $i \in \mathbb{N}^*$. On a :

   $$0 \leqslant \mathbb{P}(\mathrm{X}_{n,1} = i) = 1 - \sum_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^{\infty} \mathbb{P}(\mathrm{X}_{n,1} = j) \leqslant 1 - \mathbb{P}(\mathrm{X}_{n,1} = 0)$$

On en déduit avec le théorème des gendarmes : $\boxed{\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(X_{n,1} = i) = 0}$

3. (a) Il suffit d'appliquer $(n-1)$ fois la question IIIA.6, le lemme des coalitions et I.A.1 pour obtenir : $\boxed{\text{Pour tout } n \in \mathbb{N}^*, \text{ montrer } n\mathrm{H}_n = \mathrm{H}_\mathrm{X}}$

   (b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Je note μ_i les coefficients de la série auxiliaire de $X_{n,1}$.
   D'après la question précédente, on a $\forall j \in \mathbb{N},\ n\mu_j = \lambda_j$
   et pour k dans $\mathbb{N}^*$, on a $k\mathbb{P}(X_{n,1} = k) = \sum_{j=1}^{k} j\mu_j \mathbb{P}(X_{n,1} = k-j)$ (selon III.A.1)
   En multipliant par n on en déduit : $\boxed{kn\mathbb{P}(X_{n,1} = k) = \sum_{j=1}^{k} j\lambda_j \mathbb{P}(X_{n,1} = k-j)}$

4. Soit $k \in \mathbb{N}^*$.
   On a $n\mathbb{P}(X_{n,1} = k) = \lambda_k \mathbb{P}(X_{n,1} = 0) + \sum_{j=1}^{k-1} \frac{j\lambda_j}{k} \mathbb{P}(X_{n,1} = k-j)$
   Or quand $n \longrightarrow +\infty$, pour $j \in [\![1, k-1]\!]$, $\mathbb{P}(X_{n,1} = k-j) \longrightarrow 0$ d'après 2.(b)
   donc par combinaison linéaire $\sum_{j=1}^{k-1} \frac{j\lambda_j}{k} \mathbb{P}(X_{n,1} = k-j) \longrightarrow 0$
   et d'après 2.(a) $\lambda_k \mathbb{P}(X_{n,1} = 0) \longrightarrow \lambda_k$
   Ainsi $\boxed{\text{la suite } (n\mathbb{P}(X_{n,1} = k))_{n\in\mathbb{N}^*} \text{ converge vers } \lambda_k}$
   donc $\lambda_k \geqslant 0$ pour tout $k \geqslant 1$ et $\mathbb{P}(X = 0) > 0$
   On en déduit que $\boxed{X \text{ est } \lambda\text{−positive}}$

5. **Conclusion**

   (a) **Ceci boucle la boucle des équivalences**
   En effet, on a montré $(i) \Rightarrow (ii)$ en III.C.(1à 4)
   $(ii) \Rightarrow (iii)$ a été vue en III.B
   et $(iii) \Rightarrow (i)$ a été traitée en II.C.3
   d'où $\boxed{\text{le résultat annoncé au début de cette sous-partie III.C.}}$

   (b) On montrer que pour $k \in \mathbb{R}$, on a :
   X à valeurs dans $\mathbb{R}$ est infiniment divisible si et seulement si $X + k$ l'est
   Il suffit de traiter une seule implication. On suppose X à valeurs dans $\mathbb{R}$ est infiniment divisible.
   Soit $m \in \mathbb{N}^*$. Ceci nous fournit m variables aléatoires indépendantes $X_{m,1}, \dots, X_{m,m}$ de même loi telles que la variable aléatoire $X_{m,1} + \cdots + X_{m,m}$ suive la loi de X
   En posant pour $k \in [\![1, n]\!]$, $\ Y_{m,k} = X_{m,k} + \frac{1}{k}$
   On a m variables aléatoires indépendantes $Y_{m,1}, \dots, Y_{m,m}$ de même loi telles que la variable aléatoire $Y_{m,1} + \cdots + Y_{m,m}$ suive la loi de $X + k$
   On suppose alors X à valeurs dans $\mathbb{N}^*$.
   On note $m = \min\{x \in \mathbb{N}^* \mid \mathbb{P}(X = x) \neq 0\}$ qui existe bien car toute partie non vide minorée de $\mathbb{N}$ admet un plus petit élément et on pose $Y = X - m$
   Alors Y est à valeurs dans $\mathbb{N}$ et $\mathbb{P}(Y = 0) \neq 0$ et on a X infiniment divisible si et seulement si Y l'est.

   (c) On applique la question précédente à X une variable aléatoire suivant la loi géométrique $\mathcal{G}(p)$, où $p \in]0, 1[$
   On pose alors $Y = X - 1$ de sorte que
   Y est à valeurs dans $\mathbb{N}$ et $\mathbb{P}(Y = 0) = p \neq 0$

On a $G_X : t \mapsto \dfrac{pt}{1-(1-p)t}$ et $G_Y : t \mapsto \dfrac{p}{1-(1-p)t}$

On note alors H_Y la série auxiliaire de Y et on pose $\alpha_Y = \min(\rho(Y), 1)$

Soit $t \in]-\alpha_Y, \alpha_Y[$. On a $G_Y(t) = \exp(H_Y(t))$.

donc $H_Y(t) = \ln(G_Y(t)) = \ln(p) - \ln(1-(1-p)t)$.

En se restreignant à $|t| < \frac{1}{p-1}$

On a $H_Y(t) = \ln(p) - \displaystyle\sum_{i=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{i-1}\left(-(1-p)t\right)^i}{i} = \ln(p) + \sum_{i=1}^{+\infty} \frac{(1-p)^i}{i} t^i$

donc Y est $\lambda-$positive, vus les coefficients de la série entière H_Y

donc Y est infiniment divisible d'après III.B

Ainsi $\boxed{\text{la variable aléatoire X est infiniment divisible}}$ selon la question précédente

• • • FIN • • •