X MP 2020 - Épreuve B - Éléments de correction

Denis Choimet et Jean Nougayrède

25 juin 2020

Partie 1

1. Soit $\lambda > 0$ et $t \in \mathbb{R}$. Par stricte croissance de la fonction $x \mapsto \exp(\lambda x)$, on a

$$\mathbb{P}(Z \geq t) = \mathbb{P}\left(\exp(\lambda Z) \geq \exp(\lambda t)\right)$$

d'où, par l'inégalité de Markov, applicable car $\exp(\lambda Z)$ est une v.a. positive et d'espérance finie, et $\exp(\lambda t)$ un réel strictement positif :

$$\boxed{\mathbb{P}(Z \geq t) \leq \exp(-\lambda t)\mathbb{E}\left(\exp(\lambda Z)\right) \text{ pour tous } \lambda > 0 \text{ et } t \in \mathbb{R}.}$$

2. On a

$$1 = \mathbb{P}(S_n \geq 0) + \mathbb{P}(S_n < 0) = \mathbb{P}(S_n \geq 0) + \mathbb{P}(-S_n > 0) \leq \mathbb{P}(S_n \geq 0) + \mathbb{P}(-S_n \geq 0).$$

Or, les vecteurs aléatoires $(X_1, \ldots, X_n)$ et $(-X_1, \ldots, -X_n)$ ont même loi car
— pour chaque $i \in [\![1, n]\!]$, X_i et $-X_i$ ont même loi,
— les v.a. $X_1, \ldots, X_n$ d'une part, et $-X_1, \ldots, -X_n$ d'autre part, sont indépendantes.
Définissons alors la fonction $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, (x_1, \ldots, x_n) \mapsto x_1 + \cdots + x_n$. On a

$$S_n = f(X_1, \ldots, X_n) \text{ et } -S_n = f(-X_1, \ldots, -X_n),$$

donc S_n et $-S_n$ ont même loi. En particulier, $\mathbb{P}(-S_n \geq 0) = \mathbb{P}(S_n \geq 0)$. De là, $1 \leq 2\mathbb{P}(S_n \geq 0)$, d'où

$$\boxed{\mathbb{P}(S_n \geq 0) \geq \frac{1}{2}.}$$

3. Soit $t \in \mathbb{R}$ et $\lambda > 0$.

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(S_n \geq t) &= \mathbb{P}(nS_n \geq nt) \\
&\leq \exp(-\lambda nt)\mathbb{E}\left(\exp(\lambda(X_1 + \cdots + X_n))\right) \text{ par la question 1} \\
&= \exp(-\lambda nt)\mathbb{E}\left(\exp(\lambda X_1)\right) \cdots \mathbb{E}\left(\exp(\lambda X_n)\right) \\
&\qquad\qquad \text{puisque les } X_i \text{, donc aussi les } \exp(\lambda X_i) \text{, sont indépendantes} \\
&= \exp(-\lambda nt)\mathbb{E}\left(\exp(\lambda X_1)\right)^n \\
&\qquad\qquad \text{car les } X_i \text{, donc aussi les } \exp(\lambda X_i) \text{, sont identiquement distribuées} \\
&= \exp(-\lambda nt)\left(\frac{e^{\lambda} + e^{-\lambda}}{2}\right)^n \text{ par le théorème de transfert} \\
&= \exp(-\lambda nt)\left(\exp(\psi(\lambda))\right)^n \\
&= \exp(n\psi(\lambda) - \lambda nt).
\end{aligned}$$

De là, par croissance de la fonction $\log$ (prolongée à $\mathbb{R}_+$) :

$$\log \mathbb{P}(S_n \geq t) \leq n\psi(\lambda) - \lambda nt,$$

donc
$$\frac{1}{n}\log \mathbb{P}(S_n \geq t) \leq \psi(\lambda) - \lambda t.$$
Cette inégalité est évidemment vérifiée aussi si $\lambda = 0$ puisque le membre de gauche est négatif. Par définition de la borne inférieure, on en déduit que

$$\boxed{\frac{1}{n}\log \mathbb{P}(S_n \geq t) \leq \inf_{\lambda \geq 0}\,(\psi(\lambda) - \lambda t) \text{ pour tout } t \in \mathbb{R}.}$$

4. Par le théorème de transfert, on a, pour tout $\lambda \geq 0$:
$$m(\lambda) = \frac{e^{\lambda} - e^{-\lambda}}{e^{\lambda} + e^{-\lambda}} = \text{th}\,\lambda.$$
La fonction m est donc dérivable et, pour tout $\lambda \geq 0$,
$$m'(\lambda) = \frac{1}{\text{ch}^{\,2}\lambda} > 0,$$
ce qui prouve que
$$\boxed{\text{la fonction } m \text{ est strictement croissante sur } \mathbb{R}_+.}$$
Ainsi, la fonction m est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$, $m(0) = 0$ et $\lim\limits_{\lambda \to +\infty} m(\lambda) = 1$, donc m induit une bijection de $\mathbb{R}_+$ sur $[0, 1[$. En conséquence,

$$\boxed{\text{pour tout } t \in [0,1[\text{, il existe un unique } \lambda \in \mathbb{R}_+ \text{ tel que } m(\lambda) = t.}$$

5. (a) Soit $n \geq 2$ et $\lambda \geq 0$. Posons $T_n = X_2 + \cdots + X_n$. On a
$$\mathbb{E}\Big((X_1 - m(\lambda))(X_2 - m(\lambda))D_n(\lambda)\Big) = \mathbb{E}\Big((X_1 - m(\lambda))(X_2 - m(\lambda))\exp(\lambda X_1)\exp(\lambda T_n - n\psi(\lambda)\Big).$$
Or, comme $X_1, \ldots, X_n$ sont mutuellement indépendantes, il en est de même des v.a. $(X_1 - m(\lambda))\exp(\lambda X_1)$ et $(X_2 - m(\lambda))\exp(\lambda T_n - n\psi(\lambda))$ (« lemme des coalitions »), d'où
$$\mathbb{E}\Big((X_1 - m(\lambda))(X_2 - m(\lambda))D_n(\lambda)\Big) = \mathbb{E}\Big((X_1 - m(\lambda))\exp(\lambda X_1)\Big)\mathbb{E}\Big((X_2 - m(\lambda))\exp(\lambda T_n - n\psi(\lambda)\Big).$$
Enfin, par linéarité de l'espérance, on a
$$\mathbb{E}\Big((X_1 - m(\lambda))\exp(\lambda X_1)\Big) = \mathbb{E}(X_1\exp(\lambda X_1)) - m(\lambda)\mathbb{E}(\exp(\lambda(X_1)) = 0$$
par définition de $m(\lambda)$. Ainsi,
$$\boxed{\mathbb{E}\Big((X_1 - m(\lambda))(X_2 - m(\lambda))D_n(\lambda)\Big) = 0 \text{ pour tous } n \geq 2 \text{ et } \lambda \geq 0.}$$
Remarque. On montre, exactement de la même façon, que
$$\mathbb{E}\Big((X_i - m(\lambda))(X_j - m(\lambda))D_n(\lambda)\Big) = 0 \text{ pour tous } 1 \leq i < j \leq n.$$
Cela va nous être utile dans un instant.

(b) Soit $n \geq 1$ et $\lambda \geq 0$. Il sera commode de poser $Y_i = X_i - m(\lambda)$ pour $1 \leq i \leq n$. On a alors

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left((S_n - m(\lambda))^2 D_n(\lambda)\right) &= \mathbb{E}\left(\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} Y_i\right)^2 D_n(\lambda)\right) \\
&= \frac{1}{n^2}\mathbb{E}\left(\sum_{i=1}^{n} Y_i^2 D_n(\lambda) + 2\sum_{1\leq i<j\leq n} Y_i Y_j D_n(\lambda)\right) \\
&= \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}\mathbb{E}\left(Y_i^2 D_n(\lambda)\right) + 2\sum_{1\leq i<j\leq n}\underbrace{\mathbb{E}\left(Y_i Y_j D_n(\lambda)\right)}_{=0 \text{ par la question 5.a}} \text{ par linéarité de l'espérance} \\
&= \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}\mathbb{E}\left(Y_i^2 D_n(\lambda)\right).
\end{aligned}$$

Or, d'une part, on a

$$|Y_i| \leq |X_i| + m(\lambda) \leq 1 + 1 = 2,$$

d'où

$$Y_i^2 \leq 4.$$

Par croissance de l'espérance et positivité de la v.a. $D_n(\lambda)$, on en déduit que

$$\mathbb{E}\left((S_n - m(\lambda))^2 D_n(\lambda)\right) \leq \frac{4}{n^2}\sum_{i=1}^{n}\mathbb{E}\left(D_n(\lambda)\right).$$

Pour terminer, on calcule l'espérance de $D_n(\lambda)$ en réutilisant les calculs faits à la question 3 :

$$\mathbb{E}\left(D_n(\lambda)\right) = \exp(-n\psi(\lambda))\mathbb{E}\left(\exp(\lambda n S_n)\right) = \exp(-n\psi(\lambda))\left(\frac{e^{\lambda}+e^{-\lambda}}{2}\right)^n = 1, \tag{1}$$

d'où finalement

$$\boxed{\mathbb{E}\left((S_n - m(\lambda))^2 D_n(\lambda)\right) \leq \frac{4}{n} \text{ pour tous } n \geq 1 \text{ et } \lambda \geq 0.}$$

6. Soit $n \geq 1$, $\varepsilon > 0$ et $\lambda \geq 0$. Fixons également $\omega \in \Omega$ tel que $|S_n(\omega) - m(\lambda)| \leq \varepsilon$. On a alors

$$\underbrace{I_n(\lambda,\varepsilon)(\omega)}_{\geq 0}\underbrace{\exp\Big(\underbrace{\lambda n(S_n(\omega) - m(\lambda) - \varepsilon)}_{\leq 0}\Big)}_{\leq 1} \leq I_n(\lambda,\varepsilon)(\omega),$$

cette majoration étant évidemment vraie aussi si $|S_n(\omega) - m(\lambda)| > \varepsilon$, car alors les deux membres sont nuls. On a donc

$$I_n(\lambda,\varepsilon)\exp\Big(n(S_n - m(\lambda) - \varepsilon)\Big) \leq I_n(\lambda,\varepsilon)$$

d'où, par croissance de l'espérance :

$$\mathbb{E}\Big(I_n(\lambda,\varepsilon)\exp\Big(\lambda n(S_n - m(\lambda) - \varepsilon)\Big)\Big) \leq \mathbb{E}\left(I_n(\lambda,\varepsilon)\right),$$

soit

$$\boxed{\mathbb{P}\left(|S_n - m(\lambda)| \leq \varepsilon\right) \geq \mathbb{E}\Big(I_n(\lambda,\varepsilon)\exp\Big(\lambda n(S_n - m(\lambda) - \varepsilon)\Big)\Big).}$$

7. Partons de l'inégalité
$$1 - I_n(\lambda, \varepsilon) = \mathbf{1}_{|S_n - m(\lambda)| > \varepsilon} \leq \frac{(S_n - m(\lambda))^2}{\varepsilon^2}.$$
En effet, cette majoration est vraie sur l'événement $|S_n - m(\lambda)| > \varepsilon$, et aussi, évidemment, sur son complémentaire. Comme $D_n(\lambda) \geq 0$, on en déduit que
$$D_n(\lambda) - I_n(\lambda, \varepsilon) D_n(\lambda) \leq \frac{(S_n - m(\lambda))^2}{\varepsilon^2} D_n(\lambda)$$
d'où, par croissance de l'espérance :
$$\underbrace{\mathbb{E}(D_n(\lambda))}_{= 1 \text{ par } (1)} - \mathbb{E}\left(I_n(\lambda, \varepsilon) D_n(\lambda)\right) \leq \frac{1}{\varepsilon^2} \mathbb{E}\left((S_n - m(\lambda))^2 D_n(\lambda)\right) \overset{5.b}{\leq} \frac{4}{n\varepsilon^2},$$
d'où finalement
$$\boxed{\mathbb{E}\left(I_n(\lambda, \varepsilon) D_n(\lambda)\right) \geq 1 - \frac{4}{n\varepsilon^2}.}$$

8. (a) Fixons $\lambda \geq 0$ et $\varepsilon > 0$. Pour $n \geq 1$, l'inclusion d'événements
$$(|S_n - m(\lambda)| \leq \varepsilon) \subset (S_n \geq m(\lambda) - \varepsilon)$$
donne
$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\left(S_n \geq m(\lambda) - \varepsilon\right) &\geq \mathbb{P}\left(|S_n - m(\lambda)| \leq \varepsilon\right) \\
&\geq \mathbb{E}\left(I_n(\lambda, \varepsilon) \exp\left(\lambda n (S_n - m(\lambda) - \varepsilon)\right)\right) \text{ par la question 6} \\
&= \mathbb{E}\left(I_n(\lambda, \varepsilon) \exp\left(\lambda n S_n - n\psi(\lambda) + n\psi(\lambda) - n\lambda m(\lambda) - \lambda n \varepsilon\right)\right) \\
&= \exp\left(n\psi(\lambda) - n\lambda m(\lambda) - \lambda n \varepsilon\right) \mathbb{E}\left(I_n(\lambda, \varepsilon) D_n(\lambda)\right) \\
&\geq \exp\left(n\psi(\lambda) - n\lambda m(\lambda) - \lambda n \varepsilon\right) \left(1 - \frac{4}{n\varepsilon^2}\right).
\end{aligned}$$
De là, au moins à partir d'un certain rang $N(\varepsilon)$:
$$\log \mathbb{P}\left(S_n \geq m(\lambda) - \varepsilon\right) \geq n\psi(\lambda) - n\lambda m(\lambda) - \lambda n \varepsilon + \log\left(1 - \frac{4}{n\varepsilon^2}\right)$$
et donc
$$\frac{1}{n} \log \mathbb{P}\left(S_n \geq m(\lambda) - \varepsilon\right) \geq \psi(\lambda) - \lambda m(\lambda) - \lambda \varepsilon + \frac{1}{n} \log\left(1 - \frac{4}{n\varepsilon^2}\right).$$
Posons alors
$$u_n(\varepsilon) = \frac{1}{n} \log\left(1 - \frac{4}{n\varepsilon^2}\right) \text{ pour } n \geq N(\varepsilon).$$
On a
$$\boxed{\frac{1}{n} \log \mathbb{P}\left(S_n \geq m(\lambda) - \varepsilon\right) \geq \psi(\lambda) - \lambda m(\lambda) - \lambda \varepsilon + u_n(\varepsilon) \text{ pour } n \geq N(\varepsilon), \text{ et } u_n(\varepsilon) \to 0 \text{ quand } n \to +\infty.}$$

(b) Fixons $t \in [0,1[$ et $\varepsilon_0 > 0$ à ajuster, tel que $t + \varepsilon_0 < 1$. D'après la question 4, il existe un unique $\lambda_0 \geq 0$ tel que $m(\lambda_0) = t + \varepsilon_0$. La question 8.a donne alors

$$\begin{aligned}
\frac{1}{n} \log \mathbb{P}(S_n \geq t) &= \frac{1}{n} \log \mathbb{P}(S_n \geq m(\lambda_0) - \varepsilon_0) \\
&\geq \psi(\lambda_0) - \lambda_0 m(\lambda_0) - \lambda_0 \varepsilon_0 + u_n(\varepsilon_0) \text{ pour } n \geq N(\varepsilon_0) \\
&= \psi(\lambda_0) - \lambda_0 t - 2\lambda_0 \varepsilon_0 + u_n(\varepsilon_0) \\
&\geq \inf_{\lambda \geq 0} (\psi(\lambda) - \lambda t) - 2\lambda_0 \varepsilon_0 + u_n(\varepsilon_0) \\
&= \inf_{\lambda \geq 0} (\psi(\lambda) - \lambda t) - 2\varepsilon_0 m^{-1}(t + \varepsilon_0) + u_n(\varepsilon_0)
\end{aligned}$$

(rappelons que m est une bijection de $\mathbb{R}_+$ sur $[0,1[$).

Fixons alors $\varepsilon > 0$.

- Par continuité de la fonction m^{-1}, on a
$$m^{-1}(t + \varepsilon_0) \to m^{-1}(t) \text{ quand } \varepsilon_0 \to 0^+,$$
donc
$$2\varepsilon_0 m^{-1}(t + \varepsilon_0) \to 0 \text{ quand } \varepsilon_0 \to 0^+.$$
Cela permet de fixer $\varepsilon_0 > 0$ vérifiant les deux conditions
$$2\varepsilon_0 m^{-1}(t + \varepsilon_0) \leq \varepsilon \text{ et } t + \varepsilon_0 < 1.$$
On a alors
$$\frac{1}{n} \log \mathbb{P}(S_n \geq t) \geq \inf_{\lambda \geq 0} (\psi(\lambda) - \lambda t) - \varepsilon + u_n(\varepsilon_0) \text{ pour } n \geq N(\varepsilon_0).$$
- Ensuite, comme $u_n(\varepsilon_0) \to 0$, il existe un rang $N'(\varepsilon_0) \geq N(\varepsilon_0)$ tel que
$$|u_n(\varepsilon_0)| \leq \varepsilon \text{ pour } n \geq N'(\varepsilon_0).$$

En nous souvenant de la question 3, nous obtenons finalement

$$\inf_{\lambda \geq 0} (\psi(\lambda) - \lambda t) - 2\varepsilon \leq \frac{1}{n} \log \mathbb{P}(S_n \geq t) \leq \inf_{\lambda \geq 0} (\psi(\lambda) - \lambda t) \text{ pour } n \geq N'(\varepsilon_0),$$

ce qui prouve que

$$\boxed{\frac{1}{n} \log \mathbb{P}(S_n \geq t) \to \inf_{\lambda \geq 0} (\psi(\lambda) - \lambda t) \text{ quand } n \to +\infty.}$$

(c) Pour $n \geq 1$, on a, puisque $S_n \leq 1$:

$$\mathbb{P}(S_n \geq 1) = \mathbb{P}(S_n = 1) = \mathbb{P}(X_1 = \ldots = X_n = 1) = \mathbb{P}(X_1 = 1) \cdots \mathbb{P}(X_n = 1) = 2^{-n},$$

donc

$$\frac{1}{n} \log \mathbb{P}(S_n \geq 1) = -\log 2.$$

Par ailleurs, comme

$$\frac{d}{d\lambda} (\psi(\lambda) - \lambda) = \text{th } \lambda - 1 \leq 0,$$

la fonction $\lambda \mapsto \psi(\lambda) - \lambda$ décroît sur $\mathbb{R}_+$. De plus, quand $\lambda \to +\infty$, on a

$$\psi(\lambda) - \lambda = \log\left(\frac{e^\lambda + e^{-\lambda}}{2}\right) - \lambda = -\log 2 + \log\left(1 + e^{-2\lambda}\right) \to -\log 2,$$

d'où

$$\inf_{\lambda \geq 0} (\psi(\lambda) - \lambda) = -\log 2.$$

Par conséquent,

$$\boxed{\text{le résultat est vrai également si } t = 1.}$$

Partie 2

9. Comme f est C^2, d'après la formule de Taylor-Young il existe une fonction $\varepsilon : [a,b] \to \mathbb{R}$ de limite nulle en x_0 telle que
$$f(x) = f(x_0) + (x - x_0)f'(x_0) + \left(\frac{f''(x_0)}{2} + \varepsilon(x)\right)(x - x_0)^2 \text{ pour } x \in [a,b].$$
Comme f présente un maximum en x_0, *point intérieur à* $[a,b]$, on a $f'(x_0) = 0$. Dès lors, pour $x \in [a,b] \setminus \{x_0\}$, on a
$$\frac{f''(x_0)}{2} + \varepsilon(x) = \frac{f(x) - f(x_0)}{(x - x_0)^2} \leq 0$$
d'où, en faisant tendre x vers x_0 :
$$\frac{f''(x_0)}{2} \leq 0.$$
Comme de plus $f''(x_0) \neq 0$, on a montré que
$$\boxed{f''(x_0) < 0.}$$

10. Posons $E = [a,b] \backslash]x_0 - \delta, x_0 + \delta[$. Cet ensemble est la réunion de deux segments de $\mathbb{R}$, et il s'agit (avec un léger abus de notation) de montrer que
$$\int_E e^{tf(x)} dx = o\left(\int_a^b e^{tf(x)} dx\right) \text{ quand } t \to +\infty. \tag{2}$$
   - Tout d'abord, par continuité de f et compacité de E, on peut fixer $x_1 \in E$ tel que $f(x) \leq f(x_1)$ pour tout $x \in E$. Dès lors,
$$0 \leq \int_E e^{tf(x)} dx \leq \int_E e^{tf(x_1)} dx \leq (b-a)e^{tf(x_1)} \text{ pour tout } t \geq 0. \tag{3}$$
   - Fixons ensuite $m \in]f(x_1), f(x_0)[$ (c'est légitime puisque f atteint son maximum *uniquement* en x_0). Par continuité de f en x_0, il existe $\eta \in]0, \delta[$ tel que
$$f(x) \geq m \text{ pour tout } x \in [x_0 - \eta, x_0 + \eta].$$
     On a alors
$$\int_a^b e^{tf(x)} dx \geq \int_{x_0-\eta}^{x_0+\eta} e^{tf(x)} dx \geq \int_{x_0-\eta}^{x_0+\eta} e^{tm} dx = 2\eta e^{tm} \text{ pour } t \geq 0. \tag{4}$$

   On déduit de (3) et (4) que, pour $t \geq 0$,
$$0 \leq \frac{\displaystyle\int_E e^{tf(x)} dx}{\displaystyle\int_a^b e^{tf(x)} dx} \leq \frac{b-a}{2\eta} e^{t(f(x_1) - m)}$$
   d'où
$$\frac{\displaystyle\int_E e^{tf(x)} dx}{\displaystyle\int_a^b e^{tf(x)} dx} \to 0 \text{ quand } t \to +\infty$$
   par le théorème des gendarmes. Cela prouve que
$$\boxed{\int_a^b e^{tf(x)} dx \sim \int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta} e^{tf(x)} dx \text{ quand } t \to +\infty.}$$

11. *Une preuve par convergence dominée est présentée à la fin de ce corrigé*

Nous allons d'abord traiter dans le cas particulier où

$$\boxed{x_0 = f(x_0) = 0 \text{ et } f''(x_0) = -2,} \tag{5}$$

et nous expliquerons ensuite comment se ramener à ce cas. Soit $\varepsilon > 0$ et $\varepsilon_0 \in]0,1[$ à ajuster. D'après la formule de Taylor-Young, on a

$$f(x) = -x^2 + o(x^2) \text{ quand } x \to 0,$$

donc on peut fixer $\delta > 0$ vérifiant $[-\delta, \delta] \subset [a, b]$ et

$$-(1+\varepsilon_0)x^2 \leq f(x) \leq -(1-\varepsilon_0)x^2 \text{ pour } x \in [-\delta, \delta]. \tag{6}$$

Soit alors $t > 0$. On a

$$\int_{-\delta}^{\delta} e^{-t(1+\varepsilon_0)x^2} dx \leq \int_{-\delta}^{\delta} e^{tf(x)} dx \leq \int_{-\delta}^{\delta} e^{-t(1-\varepsilon_0)x^2} dx.$$

Les changements de variable $v = x\sqrt{t(1+\varepsilon_0)}$ et $v = x\sqrt{t(1-\varepsilon_0)}$ donnent

$$\frac{1}{\sqrt{1+\varepsilon_0}} \int_{-\delta\sqrt{t(1+\varepsilon_0)}}^{\delta\sqrt{t(1+\varepsilon_0)}} e^{-v^2} dv \leq \sqrt{t} \int_{-\delta}^{\delta} e^{tf(x)} dx \leq \frac{1}{\sqrt{1-\varepsilon_0}} \int_{-\delta\sqrt{t(1-\varepsilon_0)}}^{\delta\sqrt{t(1-\varepsilon_0)}} e^{-v^2} dv.$$

Or, quand $t \to +\infty$, les intégrales

$$\int_{-\delta\sqrt{t(1+\varepsilon_0)}}^{\delta\sqrt{t(1+\varepsilon_0)}} e^{-v^2} dv \text{ et } \int_{-\delta\sqrt{t(1-\varepsilon_0)}}^{\delta\sqrt{t(1-\varepsilon_0)}} e^{-v^2} dv$$

tendent toutes deux vers

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-v^2} dv = \sqrt{\pi}.$$

On peut donc fixer $t_0 > 0$ tel que, pour tout $t \geq t_0$, l'on ait

$$\int_{-\delta\sqrt{t(1+\varepsilon_0)}}^{\delta\sqrt{t(1+\varepsilon_0)}} e^{-v^2} dv \geq \sqrt{\pi} - \varepsilon_0 \text{ et } \int_{-\delta\sqrt{t(1-\varepsilon_0)}}^{\delta\sqrt{t(1-\varepsilon_0)}} e^{-v^2} dv \leq \sqrt{\pi} + \varepsilon_0.$$

On a alors

$$\frac{\sqrt{\pi} - \varepsilon_0}{\sqrt{1+\varepsilon_0}} \leq \sqrt{t} \int_{-\delta}^{\delta} e^{tf(x)} dx \leq \frac{\sqrt{\pi} + \varepsilon_0}{\sqrt{1-\varepsilon_0}} \text{ pour } t \geq t_0. \tag{7}$$

Nous y sommes presque. Revenons à notre $\varepsilon > 0$. Comme

$$\frac{\sqrt{\pi} - \varepsilon_0}{\sqrt{1+\varepsilon_0}} \text{ et } \frac{\sqrt{\pi} + \varepsilon_0}{\sqrt{1-\varepsilon_0}}$$

tendent tous deux vers $\sqrt{\pi}$ quand $\varepsilon_0 \to 0^+$, on peut choisir $\varepsilon_0 \in]0,1[$ tel que

$$\frac{\sqrt{\pi} - \varepsilon_0}{\sqrt{1+\varepsilon_0}} \geq \sqrt{\pi} - \varepsilon \text{ et } \frac{\sqrt{\pi} + \varepsilon_0}{\sqrt{1-\varepsilon_0}} \leq \sqrt{\pi} + \varepsilon$$

On associe alors à ε_0 tout d'abord δ comme en (6), puis t_0 comme en (7). On a alors

$$\sqrt{\pi} - \varepsilon \leq \sqrt{t} \int_{-\delta}^{\delta} e^{tf(x)} dx \leq \sqrt{\pi} + \varepsilon \text{ pour tout } t \geq t_0.$$

Cela prouve que

$$\sqrt{t} \int_{-\delta}^{\delta} e^{tf(x)} dx \to \sqrt{\pi} \text{ quand } t \to +\infty,$$

autrement dit que

$$\int_{-\delta}^{\delta} e^{tf(x)}dx \sim \sqrt{\frac{\pi}{t}} \text{ quand } t \to +\infty. \tag{8}$$

Expliquons maintenant comment en déduire le cas général. Soit $\lambda > 0$ à ajuster, et

$$g : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}, x \mapsto f(x_0 + \lambda x) - f(x_0),$$

où

$$\alpha = \frac{a - x_0}{\lambda} \text{ et } \beta = \frac{b - x_0}{\lambda}.$$

La fonction g est C^∞, présente un maximum absolu exactement en 0, et vérifie en outre $g''(0) = \lambda^2 f''(x_0) \neq 0$. Cela conduit à choisir

$$\lambda = \sqrt{\frac{-2}{f''(x_0)}} = \sqrt{\frac{2}{|f''(x_0)|}}.$$

Alors $g''(0) = -2$, donc d'après (8), appliqué à g au lieu de f, et $\dfrac{\delta}{\lambda}$ au lieu de δ :

$$e^{-tf(x_0)} \int_{-\delta/\lambda}^{\delta/\lambda} e^{tf(x_0+\lambda x)}dx \sim \sqrt{\frac{\pi}{t}}$$

soit, par le changement de variable $y = x_0 + \lambda x$:

$$\frac{e^{-tf(x_0)}}{\lambda} \int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta} e^{tf(y)}dy \sim \sqrt{\frac{\pi}{t}},$$

soit encore

$$\int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta} e^{tf(x)}dx \sim e^{tf(x_0)} \sqrt{\frac{2\pi}{t|f''(x_0)|}} \text{ quand } t \to +\infty,$$

d'où finalement, grâce à la question précédente :

$$\boxed{\int_a^b e^{tf(x)}dx \sim e^{tf(x_0)} \sqrt{\frac{2\pi}{t|f''(x_0)|}} \text{ quand } t \to +\infty,}$$

12. (a) Posons

$$I_n = \int_0^{+\infty} e^{-t}t^n dt \text{ pour tout } n \geq 0.$$

Cette intégrale est convergente car l'intégrande est continu, positif et $o(t^{-2})$ en $+\infty$. On a $I_0 = 1$ et, pour tout $n \geq 1$, une intégration par parties (correcte car le terme tout intégré est convergent) donne

$$I_n = \underbrace{\left[-e^{-t}t^n\right]_0^{+\infty}}_{=0} - \int_0^{+\infty} (-e^t)nt^{n-1}dt = nI_{n-1}.$$

On en déduit, par une récurrence immédiate, que $I_n = n!$ pour tout $n \geq 0$. Ainsi,

$$\boxed{\int_0^{+\infty} e^{-t}t^n dt = n! \text{ pour tout } n \geq 0.}$$

(b) Fixons $n \geq 1$. D'après la question précédente, on a

$$n! = \int_0^{+\infty} e^{-t+n\log t} dt.$$

La fonction $t \mapsto -t + n\log t$ atteint son maximum en $t = n$. On ramène ce maximum en 0 par le changement de variable $u = t - n$:

$$n! = \int_{-n}^{+\infty} e^{-n-u+n\log(u+n)} du = e^{-n} \int_{-n}^{+\infty} e^{-u+n\log(u+n)} du.$$

On fixe alors les bornes par le changement de variable $u = nx$:

$$n! = ne^{-n} \int_{-1}^{+\infty} e^{-nx+n\log(nx+n)} dx = n^{n+1} e^{-n} \int_{-1}^{+\infty} e^{n(-x+\log(x+1))} dx. \tag{9}$$

Or, la fonction

$$f :]-1, +\infty[\to \mathbb{R}, x \mapsto -x + \log(x+1)$$

est C^∞, croît (resp. décroît) strictement sur $]-1, 0]$ (resp. $[0, +\infty[$), atteint son maximum exactement en 0 et vérifie $f(0) = 0$ et $f''(0) = -1 < 0$. On déduit alors de la question 11 que

$$\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} e^{n(-x+\log(x+1))} dx \sim \sqrt{\frac{2\pi}{n}}. \tag{10}$$

Pour conclure, on a besoin des majoration suivantes :

$$0 \leq \int_{-1}^{-\frac{1}{2}} e^{nf(x)} dx \leq \int_{-1}^{-\frac{1}{2}} e^{nf\left(-\frac{1}{2}\right)} dx = \frac{1}{2} e^{nf\left(-\frac{1}{2}\right)}$$

et

$$0 \leq \int_{\frac{1}{2}}^{+\infty} e^{nf(x)} dx = \int_{\frac{1}{2}}^{+\infty} e^{\frac{nf(x)}{2}} e^{\frac{nf(x)}{2}} dx \leq e^{\frac{nf\left(\frac{1}{2}\right)}{2}} \int_{\frac{1}{2}}^{+\infty} e^{\frac{f(x)}{2}} dx$$

(l'intégrale $\displaystyle\int_{\frac{1}{2}}^{+\infty} e^{\frac{f(x)}{2}} dx$ étant convergente), qui montrent que les intégrales

$$\int_{-1}^{-\frac{1}{2}} e^{nf(x)} dx \text{ et } \int_{\frac{1}{2}}^{+\infty} e^{nf(x)} dx$$

tendent vers 0 à vitesse exponentielle, donc sont négligeables devant $\dfrac{1}{\sqrt{n}}$ quand $n \to +\infty$. On déduit alors de (10) que

$$\int_{-1}^{+\infty} e^{n(-x+\log(x+1))} dx \sim \sqrt{\frac{2\pi}{n}}.$$

puis de (9) que

$$\boxed{n! \sim \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n} \text{ quand } n \to +\infty.}$$

Partie 3

13. Posons pour tout $a > 0$

$$f(a) = \int_0^a |\sin(x^2)| \, \mathrm{d}x$$

Effectuons le changement de variable C^1 strictement croissant $u = x^2$.

$$\forall a > 0, f(a) = \int_0^{a^2} \frac{|\sin(u)|}{2\sqrt{u}} \, \mathrm{d}u$$

Posons ensuite

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = \int_{2n\pi+\pi/6}^{2n\pi+\pi/2} \frac{|\sin(u)|}{2\sqrt{u}} \, \mathrm{d}u$$

Alors,

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n \geq \frac{1}{4}\frac{\pi}{3}\frac{1}{\sqrt{2n\pi+\pi/2}}$$

Comme l'intégrande est positif ou nul, que $\sum u_n$ est une série divergente dont la suite des sommes partielles tend vers $+\infty$ et que les intervalles $\left[2n\pi + \frac{\pi}{6}, 2n\pi + \frac{\pi}{2}\right]$ sont deux à deux disjoints (et inclus dans $\mathbb{R}_+$), on peut conclure :

$$\boxed{f(a) \underset{a\to+\infty}{\to} +\infty}$$

14. Soit $a \in \mathbb{R}$.
$x \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{4n+2}}{(2n+1)!}$ est une série entière de rayon de convergence infini et de somme $x \mapsto \sin(x^2)$.
Par théorème, cette série entière converge normalement sur tout segment donc sur le segment $[\min(0,a), \max(0,a)]$ ce qui justifiera l'interversion série-intégrale qui suit :

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{a^{4n+3}}{(2n+1)!(4n+3)} &= \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^a (-1)^n \frac{x^{4n+2}}{(2n+1)!} \, \mathrm{d}x \\
&= \int_0^a \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(x^2)^{2n+1}}{(2n+1)!} \, \mathrm{d}x \\
&= \int_0^a \sin(x^2) \, \mathrm{d}x
\end{aligned}$$

15. Posons pour tout $a > 1$:

$$g(a) = \int_1^a e^{ix^2} \, \mathrm{d}x$$

et montrons que g admet une limite en $+\infty$, ce qui permettra de conclure simultanément pour les deux convergences demandées par l'énoncé.
Effectuons dans un premier temps le changement de variable $u = x^2$.

$$\forall a > 1, g(a) = \int_1^{a^2} \frac{1}{2\sqrt{u}} e^{iu} \, \mathrm{d}u$$

Ensuite, on effectue une intégration par parties ($u \mapsto \frac{1}{2\sqrt{u}}$ et $u \mapsto \frac{e^{iu}}{u}$ sont de classe C^1 sur $[1, +\infty[$) :

$$\begin{aligned}
\forall a > 1, g(a) &= \left[\frac{1}{2\sqrt{u}}\frac{e^{iu}}{i}\right]_1^{a^2} - \int_1^{a^2} \frac{-1}{4u^{3/2}}\frac{e^{iu}}{i} \, \mathrm{d}u \\
&= \frac{e^{ia^2}}{2ia} - \frac{e^i}{2i} + \frac{1}{4i}\int_1^{a^2} \frac{e^{iu}}{u^{3/2}} \, \mathrm{d}u
\end{aligned}$$

$u \mapsto \frac{e^{iu}}{u^{3/2}}$ est intégrable sur $[1, +\infty[$ par comparaison à un exemple de Riemann.
Il existe donc $L \in \mathbb{C}$ tel que

$$g(a) \underset{a\to+\infty}{\to} L$$

Ainsi, $\int_0^a \cos(x^2) \, \mathrm{d}x \underset{a\to+\infty}{\to} \int_0^1 \cos(x^2) \, \mathrm{d}x + Re(L)$ et $\int_0^a \sin(x^2) \, \mathrm{d}x \underset{a\to+\infty}{\to} \int_0^1 \sin(x^2) \, \mathrm{d}x + Im(L)$ ce qui achève cette question.

16. Poursuivons avec la fonction g (les intégrations par parties sont plus agréables à réaliser) :
Au fur et à mesure du calcul, on nommera C_1, C_2, etc. les constantes qui apparaitront.

$$\begin{aligned}
g(a) &= \frac{-i}{2}\frac{e^{ia^2}}{a} - \frac{e^i}{2i} - \frac{i}{4}\Big(\Big[\frac{1}{u^{3/2}}\frac{e^{iu}}{i}\Big]_1^{a^2} - \int_1^{a^2} \frac{-3}{2u^{5/2}}\frac{e^{iu}}{i}\,\mathrm{d}u\Big) \\
&= C_1 - \frac{i}{2}\frac{e^{ia^2}}{a} - \frac{1}{4}\frac{e^{ia^2}}{a^3} - \frac{3}{8}\int_1^{a^2} \frac{e^{iu}}{u^{5/2}}\,\mathrm{d}u \\
&= C_1 - \frac{i}{2}\frac{e^{ia^2}}{a} - \frac{1}{4}\frac{e^{ia^2}}{a^3} - \frac{3}{8}\Big(\Big[\frac{1}{u^{5/2}}\frac{e^{iu}}{i}\Big]_1^{a^2} - \int_1^{a^2} \frac{-5}{2u^{7/2}}\frac{e^{iu}}{i}\,\mathrm{d}u\Big) \\
&= C_2 - \frac{i}{2}\frac{e^{ia^2}}{a} - \frac{1}{4}\frac{e^{ia^2}}{a^3} + O\left(\frac{1}{a^5}\right) - \frac{15i}{16}\int_{a^2}^{+\infty} \frac{e^{iu}}{u^{7/2}}\,\mathrm{d}u \\
&= C_2 - \frac{i}{2}\frac{e^{ia^2}}{a} - \frac{1}{4}\frac{e^{ia^2}}{a^3} + O\left(\frac{1}{a^5}\right) \text{ par conséquence de l'inégalité triangulaire}
\end{aligned}$$

On passe à la partie imaginaire :

$$\int_0^a \sin(x^2)\,\mathrm{d}x = C_3 - \frac{1}{2}\frac{\cos(a^2)}{a} - \frac{1}{4}\frac{\sin(a^2)}{a^3} + O(1/a^5)$$

Cette dernière constante C_3 est précisément la limite donnée par l'énoncé (par unicité de la limite) donc $C_3 = \dfrac{\sqrt{2\pi}}{4}$ et on peut conclure :

$$\boxed{\int_0^a \sin(x^2)\,\mathrm{d}x = \frac{\sqrt{2\pi}}{4} - \frac{1}{2}\frac{\cos(a^2)}{a} - \frac{1}{4}\frac{\sin(a^2)}{a^3} + O(1/a^5)}$$

17. On pose $\varphi = g - g(x_0)$.
Notons que φ est de classe C^∞ et s'annule en x_0.
Montrons (par intégration par parties) que

$$\int_{x_0}^1 \varphi(x)\sin(tf(x))\,\mathrm{d}x = O(1/t)$$

On va commencer par vérifier que $\dfrac{\varphi}{f'}$, définie et infiniment dérivable sur $[0,1]\setminus\{x_0\}$ est prolongeable par continuité en x_0 et que le prolongement est de classe C^1.
Par un théorème conséquence du théorème de limite de la dérivée, il suffit de vérifier que (φ/f') et $(\varphi/f')'$ admettent une limite finie en x_0.
Déjà, par équivalents simples,

$$\frac{\varphi(x)}{f'(x)} \underset{x\to x_0}{\sim} \frac{\varphi'(x_0)(x-x_0)}{f''(x_0)(x-x_0)} = \frac{\varphi'(x_0)}{f''(x_0)}$$

Ensuite,

$$\forall x \in [0,1]\setminus\{x_0\}, (\varphi/f')'(x) = \frac{\varphi'(x)f'(x) - \varphi(x)f''(x)}{f'(x)^2}$$

Le dénominateur se contrôle directement :

$$f'(x)^2 \sim f''(x_0)^2(x-x_0)^2$$

Pour le numérateur, on fait un DL en utilisant la formule de Taylor-Young :
$\varphi'(x)f'(x) - \varphi(x)f''(x)$
$= \Big(\varphi'(x_0) + \varphi''(x_0)(x-x_0) + o((x-x_0))\Big) \times \Big(f''(x_0)(x-x_0) + o((x-x_0))\Big)$
$- \Big(\varphi'(x_0)(x-x_0) + \dfrac{\varphi''(x_0)}{2}(x-x_0)^2 + o((x-x_0)^2)\Big) \times \Big(f''(x_0) + f^{(3)}(x_0)(x-x_0) + o((x-x_0))\Big)$

ce qui donne après simplification l'existence d'une constante C telle que

$$\varphi'(x)f'(x) - \varphi(x)f''(x) = C(x-x_0)^2 + o((x-x_0)^2)$$

Puis, par quotient,

$$(\varphi/f')'(x) \underset{x\to x_0}{\to} \frac{C}{f''(x_0)^2}$$

Notons ψ le prolongement C^1 de $\dfrac{\varphi}{f'}$ sur $[0,1]$ et calculons :

$$\begin{aligned} \forall t>0, \int_{x_0}^1 \varphi(x)\sin(tf(x))\,\mathrm{d}x &= \int_{x_0}^1 \psi(x)f'(x)\sin(tf(x))\,\mathrm{d}x \\ &= \left[\psi(x)\frac{-\cos(tf(x))}{t}\right]_{x_0}^1 - \int_{x_0}^1 \psi'(x)\frac{-\cos(tf(x))}{t}\,\mathrm{d}x \end{aligned}$$

$\cos(-)$ étant bornée, on peut conclure : $\displaystyle\int_{x_0}^1 \varphi(x)\sin(tf(x))\,\mathrm{d}x = O(1/t)$ puis

$$\boxed{\int_{x_0}^1 g(x)\sin(tf(x))\,\mathrm{d}x = g(x_0)\int_{x_0}^1 \sin(tf(x))\,\mathrm{d}x + O(1/t)}$$

18. (a) $f''(x_0)>0$ et $f'(x_0)=0$ donc au voisinage de x_0^+, $f'(x)>0$.
Par ailleurs, f' est continue et ne s'annule pas sur l'intervalle $]x_0,1]$ donc par une conséquence du théorème des valeurs intermédiaires, f' est de signe constant strict sur $]x_0,1]$.
D'après la première observation,

$$\forall x\in\left]x_0,1\right],\, f'(x)>0$$

Continue et strictement croissante sur $[x_0,1]$, $f-f(x_0)$ induit une bijection de $[x_0,1]$ vers $[0,f(1)-f(x_0)]$.
Notons ici que

$$\forall x\in[x_0,1]\,, h(x)=\sqrt{f(x)-f(x_0)}$$

De plus, $\sqrt{-}$ induit une bijection de $[0,f(1)-f(x_0)]$ vers $[0,h(1)]$.
Par composée de bijections, h induit une bijection de $[x_0,1]$ vers $[0,h(1)]$.

(b) On procède par équivalent simple :

$$h(x)-h(x_0)=h(x) \underset{x\to x_0^+}{\sim} \sqrt{\frac{|f''(x_0)|}{2}(x-x_0)^2} \sim \sqrt{\frac{f''(x_0)}{2}}(x-x_0)$$

On en déduit que $\boxed{h \text{ est dérivable à droite en } x_0 \text{ et que } h'(x_0)=\sqrt{\frac{f''(x_0)}{2}}}$

19. Déjà, on remarque que

$$\forall x\in[x_0,1]\,, f(x)=f(x_0)+h(x)^2$$

Ensuite, par les formules d'additions,

$$\int_{x_0}^1 \sin(tf(x))\,\mathrm{d}x = \sin(tf(x_0))\int_{x_0}^1 \cos(th(x)^2)\,\mathrm{d}x + \cos(tf(x_0))\int_{x_0}^1 \sin(th(x)^2)\,\mathrm{d}x$$

On effectue dans chacune des intégrales le changement de variable $x=h^{-1}(y)$ (C^1 d'après le résultat admis).

$$\int_{x_0}^1 \sin(tf(x))\,\mathrm{d}x = \sin(tf(x_0))\int_0^{h(1)} (h^{-1})'(y)\cos(ty^2)\,\mathrm{d}y + \cos(tf(x_0))\int_0^{h(1)} (h^{-1})'(y)\sin(ty^2)\,\mathrm{d}y$$

$y \mapsto y^2$ vérifie les hypothèses permettant d'utiliser la question 17 puisque sa dérivée ne s'annule qu'en 0 et que sa dérivée seconde en 0 est strictement positive (non nulle suffirait).
De plus $(h^{-1})'$ est infiniment dérivable (de classe C^2 suffirait).
Enfin, le résultat de la question 17 s'adapte sans difficulté en remplaçant $\sin(-)$ par $\cos(-)$.
L'énoncé aurait pu faire faire les calculs directement avec $e^{itf(x)}$ d'ailleurs.
On poursuit et on termine ce calcul asymptotique en notant que $h(1) > 0$:

$$\begin{aligned}
\int_{x_0}^1 \sin(tf(x))\,\mathrm{d}x &= \sin(tf(x_0))(h^{-1})'(0)\int_0^{h(1)} \cos(ty^2)\,\mathrm{d}y + \cos(tf(x_0))(h^{-1})'(0)\int_0^{h(1)} \sin(ty^2)\,\mathrm{d}t + O(1/t) \\
&= \frac{\sin(tf(x_0))}{h'(h^{-1}(0))}\frac{1}{\sqrt{t}}\int_0^{\sqrt{t}h(1)} \cos(x^2)\,\mathrm{d}x + \frac{\cos(tf(x_0))}{h'(h^{-1}(0))}\frac{1}{\sqrt{t}}\int_0^{\sqrt{t}h(1)} \sin(x^2)\,\mathrm{d}x + O(1/t) \\
&= \sqrt{\frac{2}{f''(x_0)}}\sin(tf(x_0)\frac{1}{\sqrt{t}}\Big(\frac{\sqrt{2\pi}}{4} + O(1/\sqrt{t})\Big) \\
&\qquad + \sqrt{\frac{2}{f''(x_0)}}\cos(tf(x_0))\frac{1}{\sqrt{t}}\Big(\frac{\sqrt{2\pi}}{4} + O(1/\sqrt{t})\Big) + O(1/t) \\
&= \sqrt{\frac{\pi}{4f''(x_0)}}\frac{1}{\sqrt{t}}\Big(\sin(tf(x_0)) + \cos(tf(x_0))\Big) + O(1/t) \\
&= \sqrt{\frac{\pi}{4f''(x_0)}}\frac{1}{\sqrt{t}}\sqrt{2}\sin\big(tf(x_0) + \pi/4\big) + O(1/t) \\
&= \sin\big(tf(x_0) + \pi/4\big)\sqrt{\frac{\pi}{2f''(x_0)}}\frac{1}{\sqrt{t}} + O(1/t)
\end{aligned}$$

20. Un travail similaire qui ne sera pas détaillé ici donne

$$\int_0^{x_0} \sin(tf(x))\,\mathrm{d}x = \sin\big(tf(x_0) + \pi/4\big)\sqrt{\frac{\pi}{2f''(x_0)}}\frac{1}{\sqrt{t}} + O(1/t)$$

et donne aussi

$$\int_0^{x_0} g(x)\sin(tf(x))\,\mathrm{d}x = g(x_0)\int_0^{x_0} \sin(tf(x))\,\mathrm{d}x + O(1/t)$$

On peut aussi envisager d'effectuer le changement de variable $y = x_0 - x$ pour appliquer plus directement les résultats des questions précédentes.
Par somme et simplification, on peut conclure :

$$\boxed{\int_0^1 g(x)\sin(tf(x))\,\mathrm{d}x = g(x_0)\sin\big(tf(x_0) + \pi/4\big)\sqrt{\frac{2\pi}{f''(x_0)}}\frac{1}{\sqrt{t}} + O(1/t)}$$

Annexe.
Voici une preuve de la question 11 par convergence dominée.
On commence par choisir $\delta > 0$ assez petit pour satisfaire les conditions de la question 10 et aussi

$$\forall x \in [x_0 - \delta, x_0 + \delta] \setminus \{x_0\}, \frac{f(x) - f(x_0)}{(x - x_0)^2} \leq \frac{1}{4}f''(x_0)$$

Ensuite, pour $t > 0$ fixé, on effectue le changement de variable $x = x_0 + \dfrac{u}{\sqrt{t}}$:

$$I(t) := \int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta} e^{tf(x)}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\sqrt{t}}\int_{-\delta\sqrt{t}}^{\delta\sqrt{t}} e^{tf\left(x_0 + \frac{u}{\sqrt{t}}\right)}\,\mathrm{d}u$$

On a donc

$$\forall t > 0, \sqrt{t}e^{-tf(x_0)}I(t) = \int_{-\delta\sqrt{t}}^{\delta\sqrt{t}} \exp\Big[t\Big(f\big(x_0 + \frac{u}{\sqrt{t}}\big) - f(x_0)\Big)\Big]\,\mathrm{d}u$$

La rédaction se passera des fonctions indicatrices qu'il est classique d'introduire dans ces situations de bornes variables.
Quand $t \to +\infty$, l'intégrande converge (simplement) vers $u \mapsto \exp\left(\frac{f''(x_0)}{2}u^2\right)$ et on a domination par

$$u \mapsto \exp\left(\frac{1}{4}f''(x_0)u^2\right)$$

d'après le choix de δ, cette fonction étant intégrable sur $\mathbb{R}$ car $f''(x_0) < 0$.
Par théorème de convergence dominée et après quelques calculs,

$$\sqrt{t}e^{-tf(x_0)}I(t) \underset{t\to+\infty}{\to} \int_{-\infty}^{\infty} e^{f''(x_0)u^2/2}\,\mathrm{d}u = \sqrt{\frac{2}{|f''(x_0)|}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\,\mathrm{d}x = \sqrt{\frac{2\pi}{|f''(x_0)|}}$$

D'après la question 10, on peut conclure :

$$\int_a^b e^{tf(x)}\,\mathrm{d}x \underset{t\to+\infty}{\sim} e^{tf(x_0)}\sqrt{\frac{2\pi}{t|f''(x_0)|}}$$