

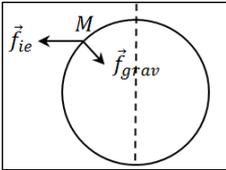
PREMIÈRE PARTIE

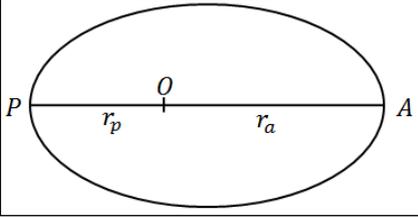
ATTERRISSAGE DU MODULE PHILAE

A1	$V_{com} = \frac{m_{com}}{\mu_{com}}$ <p>On en déduit : $\frac{4}{3}\pi r_{com}^3 = V_{com} = \frac{m_{com}}{\mu_{com}} \Rightarrow r_{com} = \left(\frac{3m_{com}}{4\pi\mu_{com}}\right)^{1/3} = 1,8 \text{ km}$.</p>
A2	<p>On considère un point $M(r, \theta, \varphi)$ de l'espace, tel que $r > r_{com}$.</p> <p>Analyse des invariances : la distribution des masses ne dépend que de la distance au centre O de la comète, soit $\vec{g}_{com}(r, \theta, \varphi) = \vec{g}_{com}(r)$.</p> <p>Analyse des symétries : tout plan contenant \vec{OM} est un plan de symétrie de la distribution des masses (la boule est homogène), donc un plan de symétrie du champ gravitationnel. Celui-ci est donc inclus dans chacun de ces plans, soit $\vec{g}_{com}(r) = g_{com}(r)\vec{e}_r$.</p> <p>Le théorème de Gauss s'écrit $\oiint \vec{g}_{com} d\vec{S} = -4\pi G m_{int}$. On choisit une surface sphérique de rayon r, et $\oiint \vec{g}_{com} d\vec{S} = \oiint g_{com}(r)\vec{e}_r \cdot dS\vec{e}_r = g_{com}(r) \times 4\pi r^2$. D'autre part, comme $r > r_{com}$, $m_{int} = m_{com}$. Ainsi, $4\pi r^2 g_{com} = -4\pi G m_{com}$ et $\vec{g}_{com} = -G \frac{m_{com}}{r^2} \vec{e}_r$.</p>
A3	$\left[\frac{Gm_{com}}{r^2}\right] = \frac{L^3 \cdot M^{-1} \cdot T^{-2} \cdot M}{L^2} = L \cdot T^{-2}$, ce qui est bien la dimension de l'intensité de la pesanteur (exprimée en $m \cdot s^{-2}$).
A4	<p>Lors du largage : $g_{com}(r_{larg}) = G \frac{m_{com}}{r_{larg}^2} = 1,3 \cdot 10^{-6} m \cdot s^{-2}$.</p> <p>Au moment du contact : $g_{com}(r_{com}) = \frac{Gm_{com}}{r_{com}^2} = 2,1 \cdot 10^{-4} m \cdot s^{-2}$.</p> <p>On obtient un rapport supérieur à 150 entre les deux valeurs, il est impossible de considérer le champ uniforme.</p>

B1	<p>D'après le principe fondamental de la dynamique : $m_{ph}\dot{r}\vec{e}_r = m_{ph}\vec{g}_{com}$.</p> <p>En projection sur \vec{e}_r : $\dot{r} + \frac{Gm_{com}}{r^2} = 0$.</p>
B2	<p>Par lecture graphique, on trouve $\tau_0 \approx 145000 \text{ s} \approx 1 \text{ j } 16 \text{ h}$.</p>
B3	<p>Graphiquement, une durée de chute $\tau = 7 \text{ h}$ correspond à une vitesse initiale $\dot{r}(0) \approx -0,75 m \cdot s^{-1}$.</p>
B4	<p>Avec la trajectoire de phase correspondant à $\dot{r}(r = r_{larg}) = -0,75 m \cdot s^{-1}$, on lit $\dot{r}(r = r_{com}) = -1,1 m \cdot s^{-1}$.</p>

B5	$\delta W = -dE_{p_{com}}$, avec $\delta W = -G \frac{m_{com}m}{r^2} dr = -d\left(-\frac{Gm_{com}m}{r}\right)$. On obtient $dE_{p_{com}} = d\left(-\frac{Gm_{com}m}{r}\right) \Rightarrow E_{p_{com}} = -\frac{Gm_{com}m}{r} + cte$. Comme $E_{p_{com}}(r \rightarrow \infty) = 0$, $E_{p_{com}}(r) = -\frac{Gm_{com}m}{r}$.
B6	Philae n'est soumis qu'à des forces conservatives, son énergie mécanique est constante pendant le chute.
B7	$E_m(r = r_{larg}) = E_m(r = r_{com}) \Rightarrow \frac{1}{2}m_{ph}v_i^2 - \frac{Gm_{com}m_{ph}}{r_{larg}} = \frac{1}{2}m_{ph}v_f^2 - \frac{Gm_{com}m_{ph}}{r_{com}}$. Ainsi, $\frac{1}{2}m_{ph}v_f^2 = \frac{1}{2}m_{ph}v_i^2 + Gm_{com}m_{ph}\left(\frac{1}{r_{com}} - \frac{1}{r_{larg}}\right)$ $\Rightarrow v_f = \sqrt{v_i^2 + 2Gm_{com}\left(\frac{1}{r_{com}} - \frac{1}{r_{larg}}\right)}$. Numériquement, $v_f = 1,1 m \cdot s^{-1}$. On retrouve la valeur déterminée par analyse du portrait de phase.

C1	La masse de Philae est identique sur Terre et à la surface de la comète, c'est son poids qui est moins important. $P = m_{ph}g_{com} = m_{ph} \frac{Gm_{com}}{r_{com}^2} = 2,0 \cdot 10^{-2} N$. Un objet à la surface de la Terre dont le poids est identique a une masse $m_{\acute{e}q} = \frac{P}{g_0} = 2,0 g$.
C2	Le référentiel lié à la comète n'est pas galiléen, il faut ajouter les forces d'inertie. Comme Philae est posé sur la comète, sa vitesse relative est nulle et $\vec{f}_{i_{cor}} = \vec{0}$. C'est donc la force d'inertie d'entraînement qui intervient, couramment nommée force centrifuge (référentiel en rotation par rapport au référentiel galiléen).
C3	 <p>La force d'inertie d'entraînement est orthogonale à l'axe de rotation, dirigée vers l'extérieur (selon $+\vec{e}_\rho$), elle vient donc diminuer la valeur du poids calculée en prenant en compte la seule attraction gravitationnelle.</p>
C4	Pour un référentiel en rotation par rapport à un référentiel galiléen, $\vec{a}_{ent} = -\omega^2 r_{com} \vec{e}_\rho$ avec $\omega = \frac{2\pi}{T_{com}}$, soit $\vec{a}_{ent} = -\frac{4\pi^2}{T_{com}^2} r_{com} \vec{e}_\rho$ et $\vec{f}_{ient} = -m_{ph} \vec{a}_{ent} = m_{ph} \frac{4\pi^2}{T_{com}^2} r_{com} \vec{e}_\rho$. Comme Philae est dans le plan équatorial, $\vec{e}_\rho = \vec{e}_r$. Le poids réel s'écrit $\vec{P}_{réel} = -m_{ph}g_{com} \vec{e}_r + m_{ph} \frac{4\pi^2}{T_{com}^2} r_{com} \vec{e}_r = -m_{ph} \left(g_{com} - \frac{4\pi^2 r_{com}}{T_{com}^2} \right) \vec{e}_r$, et la variation relative : $\frac{\Delta P}{P} = \frac{m_{ph}g_{com} - m_{ph} \left(g_{com} - \frac{4\pi^2 r_{com}}{T_{com}^2} \right)}{m_{ph}g_{com}} = 1 - \left(1 - \frac{4\pi^2 r_{com}}{T_{com}^2 g_{com}} \right) = \frac{4\pi^2 r_{com}}{T_{com}^2 g_{com}}$. Numériquement, $\frac{\Delta P}{P} = 17 \%$. Malgré une vitesse angulaire de rotation faible, la force d'inertie d'entraînement joue un rôle non négligeable par rapport à la force gravitationnelle, en raison de la très faible intensité du champ de pesanteur.

D1	<p>Le vecteur position en coordonnées polaires est : $\vec{OM} = r\vec{e}_r$.</p> <p>Dans le référentiel cométocentrique, $\vec{v} = \frac{d\vec{OM}}{dt} = \frac{d(r\vec{e}_r)}{dt} = \dot{r}\vec{u}_r + r\frac{d\vec{e}_r}{dt} = \dot{r}\vec{e}_r + r\dot{\theta}\vec{e}_\theta$ et $\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d(\dot{r}\vec{e}_r + r\dot{\theta}\vec{e}_\theta)}{dt} = \frac{d(\dot{r}\vec{e}_r + r\dot{\theta}\vec{e}_\theta)}{dt} = \ddot{r}\vec{e}_r + \dot{r}\frac{d\vec{e}_r}{dt} + (\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta})\vec{e}_\theta + r\dot{\theta}\frac{d\vec{e}_\theta}{dt} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\vec{e}_r + (2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta})\vec{e}_\theta$.</p> <p>Pour un mouvement circulaire, $\dot{r} = 0$ et $\ddot{r} = 0$, soit $\vec{v} = r\dot{\theta}\vec{e}_\theta$ et $\vec{a} = -r\dot{\theta}^2\vec{e}_r + r\ddot{\theta}\vec{e}_\theta$.</p>
D2	<p>D'après le principe fondamental de la dynamique dans le référentiel cométocentrique supposé galiléen : $m_{ros}\vec{a} = m_{ros}\vec{g}_{com}$.</p> <p>En projection sur \vec{e}_r, $-m_{ros}r_1\dot{\theta}^2 = -m_{ros}g_{com} \Rightarrow r_1\dot{\theta}^2 = \frac{Gm_{com}}{r_1^2}$.</p> <p>Comme $v_1 = r_1\dot{\theta}$, $v_1^2 = r_1^2\dot{\theta}^2 = \frac{Gm_{com}}{r_1}$ et $v_1 = \sqrt{\frac{Gm_{com}}{r_1}}$. Numériquement, $v_1 = 15 \text{ cm} \cdot \text{s}^{-1}$.</p>
D3	<p>$T_1 = \frac{2\pi r_1}{v_1} \Rightarrow T_1 = 2\pi\sqrt{\frac{r_1^3}{Gm_{com}}}$. Numériquement, $T_1 = 1,26 \cdot 10^6 \text{ s} \approx 14,6 \text{ j}$.</p>
D4	
D5	<p>Comme $r_A + r_p = 2a$, le demi-grand axe de l'ellipse est $a = \frac{r_a + r_p}{2}$.</p> <p>L'énergie mécanique de la sonde est alors $E_m = -\frac{Gm_{com}m_{ros}}{2a} \Rightarrow E_m = -\frac{Gm_{com}m_{ros}}{r_a + r_p}$.</p>
D6	<p>Au péricentre, $E_m = E_c + E_p \Rightarrow -\frac{Gm_{com}m_{ros}}{r_a + r_p} = \frac{1}{2}m_{ros}v_p^2 - \frac{Gm_{com}m_{ros}}{r_p} \Rightarrow v_p = \sqrt{2Gm_{com}\left(\frac{1}{r_p} - \frac{1}{r_a + r_p}\right)}$.</p> <p>Numériquement, $v_p = 30 \text{ cm} \cdot \text{s}^{-1}$.</p>
D7	<p>Sur l'orbite circulaire de rayon r_p, la vitesse de la sonde est $v'_p = \sqrt{\frac{Gm_{com}}{r_p}} = 26 \text{ cm} \cdot \text{s}^{-1}$.</p> <p>Les propulseurs doivent donc ralentir la sonde de $\Delta v = 4,0 \text{ cm} \cdot \text{s}^{-1}$ lorsque celle-ci est au péricentre de l'orbite elliptique</p>

DEUXIEME PARTIE

COMMUNICATION AVEC LA TERRE

E1	<p>Les équations de Maxwell s'écrivent : $\text{div } \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$, $\text{div } \vec{B} = 0$, $\text{rot } \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$ et $\text{rot } \vec{B} = \mu_0 \vec{j} + \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$. Dans le vide ($\rho = 0$ et $\vec{j} = \vec{0}$), on obtient $\text{div } \vec{E} = 0$, $\text{div } \vec{B} = 0$, $\text{rot } \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$ et $\text{rot } \vec{B} = \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$.</p>
E2	<p>$\text{rot}(\text{rot } \vec{E}) = \text{grad}(\text{div } \vec{E}) - \Delta \vec{E} \Rightarrow \Delta \vec{E} + \text{rot} \left(-\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \right) = \vec{0} \Rightarrow \Delta \vec{E} - \frac{\partial(\text{rot } \vec{B})}{\partial t} = \vec{0} \Rightarrow \Delta \vec{E} - \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \vec{0}$.</p> <p>De même, $\Delta \vec{B} - \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} = \vec{0}$.</p>
E3	<p>Les champs électriques et magnétiques vérifient l'équation de propagation de d'Alembert, en identifiant $\frac{1}{c^2} = \epsilon_0 \mu_0 \Leftrightarrow c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}}$.</p>
E4	<p>Chacune des composantes a une structure d'onde plane progressive, avec une propagation selon \vec{e}_z.</p>
E5	<p>On peut identifier $\cos \left[\omega \left(t - \frac{z}{c} \right) \right] = \cos(\omega t - kz)$, avec $k = \frac{\omega}{c}$.</p>
E6	<p>$\text{div } \vec{E} = 0 \Rightarrow \frac{\partial (E_z \cos[\omega(t - \frac{z}{c})])}{\partial z} = 0$, puisque la composante du champ électrique selon \vec{e}_x est indépendante de la coordonnée x. On en déduit $\frac{\omega}{c} E_z \sin \left[\omega \left(t - \frac{z}{c} \right) \right] = 0 \Rightarrow E_z = 0$ puisque la fonction sinus n'est pas constamment nulle.</p> <p>Ainsi, $\vec{E} = E_x \cos \left[\omega \left(t - \frac{z}{c} \right) \right] \vec{e}_x$.</p>
E7	<p>$\vec{B} = \frac{k \wedge \vec{E}}{\omega} = \frac{k \vec{e}_z \wedge E_x \cos[\omega(t - \frac{z}{c})] \vec{e}_x}{\omega} = \frac{E_x}{c} \cos \left[\omega \left(t - \frac{z}{c} \right) \right] \vec{e}_y$.</p>
E8	<p>L'onde se propage selon \vec{e}_z, mais les composantes de \vec{E} et \vec{B} sont nulles dans cette direction, il s'agit d'une onde transverse.</p>
E9	<p>$\vec{\Pi} = \frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_0} = \frac{1}{\mu_0} \left(E_x \cos \left[\omega \left(t - \frac{z}{c} \right) \right] \right) \left(\frac{E_x}{c} \cos \left[\omega \left(t - \frac{z}{c} \right) \right] \right) \vec{e}_z = \frac{E_x^2}{\mu_0 c} \cos^2 \left[\omega \left(t - \frac{z}{c} \right) \right] \vec{e}_z$.</p> <p>On trouve $\langle \vec{\Pi} \rangle = \frac{E_x^2}{2\mu_0 c} \vec{e}_z$. Le flux du vecteur de Poynting à travers une surface représente la puissance rayonnée par l'onde. Ici, il est dirigé selon \vec{e}_z, la propagation de l'énergie se fait dans la direction de l'onde elle-même.</p>

F1	$d = c\Delta t$ avec $\Delta t = 1700$ s, soit $d = 510$ millions de km.
F2	Le maximum parcourt la distance L à partir de l'instant t_0 . Il parvient sur Terre à l'instant $t'_0 = t_0 + \frac{L}{c}$.
F3	Le 2 ^{ème} maximum est émis à l'instant $t_1 = t_0 + T = t_0 + \frac{1}{f}$. Il parcourt la distance $L' = L - v \times T \Rightarrow L' = L - \frac{v}{f}$ puisque la comète s'est rapprochée de la Terre. Le 2 ^{ème} maximum parvient sur Terre à l'instant $t'_1 = t_1 + \frac{L'}{c} \Rightarrow t'_1 = t_0 + \frac{1}{f} + \frac{L - \frac{v}{f}}{c}$.
F4	On obtient $T' = t'_1 - t'_0 = t_0 + \frac{1}{f} + \frac{L - \frac{v}{f}}{c} - \left(t_0 + \frac{L}{c}\right) \Rightarrow T' = \frac{1}{f} \left(1 - \frac{v}{c}\right)$. Ainsi, $f' = \frac{1}{T'} = \frac{f}{1 - \frac{v}{c}} \simeq f \left(1 + \frac{v}{c}\right)$ car $v \ll c$.
F5	$v = c \frac{f'_1 - f_1}{f_1} \Rightarrow v = 17,8 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1}$. On obtient aussi $f'_2 = f_2 \left(1 + \frac{v}{c}\right) \Rightarrow f'_2 = 8423,65 \text{ MHz}$.

G1	$\vec{f} = q(\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B})$, avec $\left\ \frac{q\vec{v} \wedge \vec{B}}{q\vec{E}} \right\ \simeq \left\ \frac{q\vec{v} E_x}{qE_x} \right\ \simeq \frac{v}{c} \ll 1$ (la vitesse atteinte par les porteurs est couramment très inférieure à la vitesse de la lumière dans le vide).
G2	On écrit : $\begin{cases} m_p \frac{d\vec{v}_p}{dt} = e\vec{E} \\ m_e \frac{d\vec{v}_e}{dt} = -e\vec{E} \end{cases}$ En notation complexe, $\begin{cases} i\omega m_p \vec{v}_p = e\vec{E} \\ i\omega m_e \vec{v}_e = -e\vec{E} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \vec{v}_p = \frac{e}{i\omega m_p} \vec{E} \\ \vec{v}_e = \frac{-e}{i\omega m_e} \vec{E} \end{cases}$
G3	$\vec{j} = ne\vec{v}_p - ne\vec{v}_e \Rightarrow \vec{j} = \frac{ne^2}{i\omega} \left(\frac{1}{m_p} + \frac{1}{m_e}\right) \vec{E} \Rightarrow \vec{j} \simeq -i \frac{ne^2}{\omega m_e} \vec{E}$, car $m_p \gg m_e$.
G4	En présence d'une densité volumique de courant \vec{j} , $\text{rot} \vec{B} = \mu_0 \left(\vec{j} + \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}\right)$. En notation complexe, $\text{rot} \vec{B} = \mu_0 \left(\vec{j} + \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}\right) = \mu_0 \left(-i \frac{ne^2}{\omega m_e} \vec{E} + \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}\right) = \mu_0 \left(-\frac{ne^2}{\omega^2 m_e} + \epsilon_0\right) \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \epsilon_0 \mu_0 \left(1 - \frac{ne^2}{\omega^2 m_e \epsilon_0}\right) \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$. On obtient la relation demandée en posant $\omega_p = \sqrt{\frac{ne^2}{m_e \epsilon_0}}$.
G5	$\text{rot}(\text{rot} \vec{E}) = \text{grad}(\text{div} \vec{E}) - \Delta \vec{E} \Rightarrow \Delta \vec{E} + \text{rot} \left(-\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}\right) = \vec{0} \Rightarrow \Delta \vec{E} - \frac{\partial(\text{rot} \vec{B})}{\partial t} = \vec{0} \Rightarrow \Delta \vec{E} - \epsilon_0 \mu_0 \left(1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}\right) \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \vec{0}$. Comme $\Delta \vec{E} = \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial z^2} = -k^2 \vec{E}$ et $\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = -\omega^2 \vec{E}$, $-k^2 \vec{E} = \epsilon_0 \mu_0 \left(1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}\right) (-\omega^2 \vec{E}) \Rightarrow$

	$k^2 = \varepsilon_0 \mu_0 \left(1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}\right) \omega^2$. Avec $\varepsilon_0 \mu_0 c^2 = 1$, $k^2 = \frac{\omega^2 - \omega_p^2}{c^2}$. Il s'agit de la relation de dispersion.
G6	Pour $\omega < \omega_p$, k est imaginaire pur et l'onde ne se propage pas (onde évanescence).
G7	<p>Pour $\omega > \omega_p$, $v_\varphi = \frac{\omega}{k}$, avec $k^2 = \frac{\omega^2 - \omega_p^2}{c^2} \Rightarrow \frac{\omega^2}{k^2} = \frac{c^2 \omega^2}{\omega^2 - \omega_p^2}$. Ainsi, $v_\varphi = c \sqrt{\frac{1}{1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}}}$.</p> <p>Pour déterminer la vitesse de groupe, on différencie la relation de dispersion : $k^2 = \frac{\omega^2 - \omega_p^2}{c^2} \Rightarrow 2kdk = \frac{2\omega}{c^2} d\omega$. On en déduit $v_g = \frac{d\omega}{dk} = \frac{2kc^2}{2\omega} = \frac{c^2}{v_\varphi}$. Finalement, $v_g = c \sqrt{1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}}$.</p> <p>La vitesse de phase dépend de la pulsation, le milieu est dispersif.</p>
G8	<p>Pour $\omega \gg \omega_p$, $\frac{\omega_p^2}{\omega^2} \ll 1$ et $v_\varphi = v_g = c$: le milieu n'est plus dispersif.</p> <p>On constate $f_1 \gg 2\pi\omega_p$ et $f_2 \gg 2\pi\omega_p$. L'ionosphère est « transparente » pour ces fréquences, judicieusement choisies pour la communication spatiale.</p>

TROISIÈME PARTIE

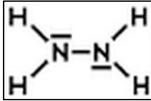
FORMATION DE LA QUEUE DE LA COMÈTE

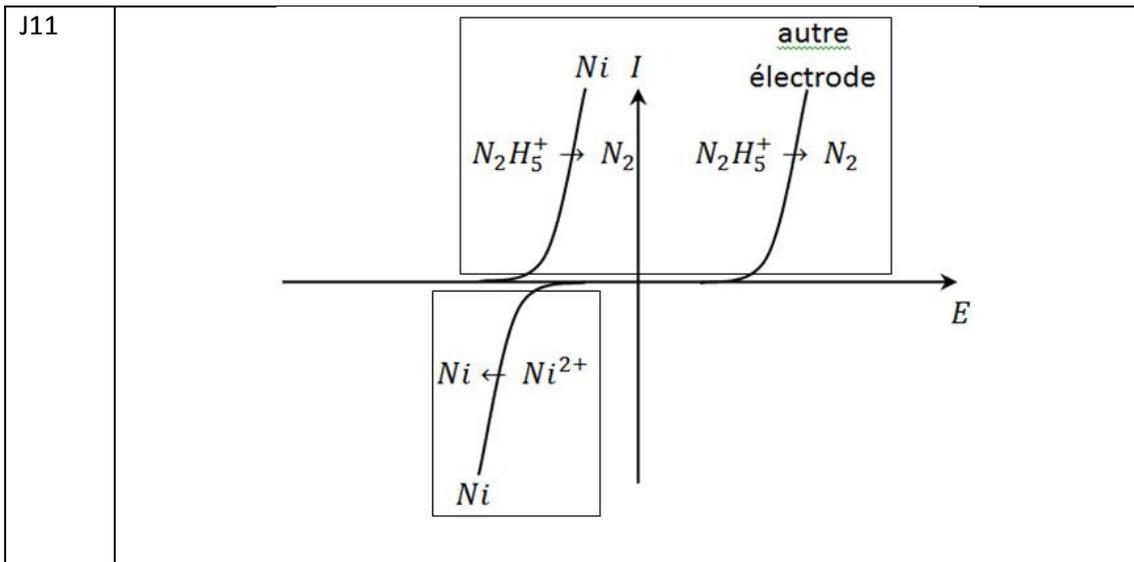
H1	Le flux thermique surfacique est dirigée vers la comète : $\vec{j}_{com} = -j_{com}\vec{e}_r$.
H2	La surface est orientée vers l'extérieur, d'où $\phi_{com} = \iint_S -j_{com}\vec{e}_r \cdot dS\vec{e}_r \Rightarrow \phi_{com} = -4\pi r_{com}^2 j_{com} = -1,2 \cdot 10^9 \text{ W}$. Le flux thermique est négatif : la comète reçoit de l'énergie de l'extérieur.
H3	L'énergie reçue est $E = -\phi_{com}\Delta t$. Elle permet la sublimation de la glace, soit $E = n_{gl}L_{sub} = \frac{m_{gl}}{M_{H_2O}}L_{sub}$. Ainsi, $m_{gl} = -\frac{M_{H_2O}\phi_{com}\Delta t}{L_{sub}}$. Numériquement, $m_{gl} = 430 \text{ kg}$.
H4	L'ordre de grandeur correspond à celui de M. Lamy. La valeur attendue, plus faible que celle calculée, laisse penser qu'une partie non négligeable de l'énergie permet le réchauffement de la comète (l'énergie disponible pour le changement d'état en est diminuée).

I1	Le signe « - » dans la loi de Fourier rend compte d'un flux thermique dirigé des températures élevées aux températures faibles.
I2	Dans la croûte, il n'y a ni source, ni puits d'énergie, le flux thermique est le même à travers chaque sphère de centre O .
I3	$\vec{j} = -\lambda \overrightarrow{\text{grad}} T \Rightarrow -j_{com}\vec{e}_r = -\lambda \frac{dT}{dr} \vec{e}_r \Rightarrow j_{com} = \lambda \frac{dT}{dr}$. Comme $\phi_{com} = -4\pi r^2 j_{com}$, $\frac{\phi_{com}}{4\pi r^2} = -\lambda \frac{dT}{dr} \Rightarrow dT = -\frac{\phi_{com}}{4\pi\lambda r^2} dr$.
I4	$\int_{T_0}^{T(r)} dT = \int_{r_{com}}^r -\frac{\phi_{com}}{4\pi\lambda r^2} dr \Rightarrow T(r) = T_0 + \frac{\phi_{com}}{4\pi\lambda} \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_{com}} \right)$.
I5	La température au niveau de la surface sphérique interne de la croûte est T_1 , d'où $T_1 = T_0 + \frac{\phi_{com}}{4\pi\lambda} \left(\frac{1}{r_{com}-e} - \frac{1}{r_{com}} \right) \Rightarrow \frac{e}{r_{com}(r_{com}-e)} = \frac{4\pi\lambda(T_0-T_1)}{-\phi_{com}}$. Ainsi, $e = \frac{4\pi\lambda r_{com}(T_0-T_1)}{-\phi_{com}} (r_{com} - e)$ Comme $e \ll r_{com}$, $e = \frac{4\pi\lambda r_{com}^2(T_0-T_1)}{-\phi_{com}}$. Numériquement, $e = 52 \text{ cm}$.

QUATRIÈME PARTIE

PROPULSION DE LA SONDE

J1	Pour l'azote, $Z = 7$. Sa configuration électronique est $1s^2 2s^2 2p^3$.
J2	L'azote a cinq électrons de valence et l'hydrogène un seul, soit un total de 14 électrons (sept doublets) . <div style="text-align: center;">  </div>
J3	$N_2H_4 + H^+ = N_2H_5^+$ et $N_2H_5^+ + H^+ = N_2H_6^{2+}$. $N_2H_6^{2+}$ prédomine à pH faible $N_2H_5^+$ à pH intermédiaire et N_2H_4 à pH élevé. L'ion hydrazinium $N_2H_5^+$ est un amphotère.
J4	L'azote est au degré d'oxydation -II dans l'hydrazine et ses acides, alors qu'il est au degré d'oxydation 0 dans le diazote. Il s'agit d'un équilibre redox, dans lequel le diazote est l'oxydant .
J5	On peut attribuer les domaines : $A \rightarrow N_2, B \rightarrow N_2H_6^{2+}, C \rightarrow N_2H_5^+$ et $D \rightarrow N_2H_4$.
J6	Les trois espèces sont liées par des équilibres acido-basiques (même degré d'oxydation pour les atomes d'azote) : les frontières sont verticales . Les concentrations des espèces en équilibre sont les mêmes sur les frontières, soit $pK_{a_1} = 0,3$ et $pK_{a_2} = 7,9$.
J7	$N_2 + 4e^- + 6H^+ = N_2H_6^{2+}$ $N_2 + 4e^- + 5H^+ = N_2H_5^+$ $N_2 + 4e^- + 4H^+ = N_2H_4$
J8	La loi de Nernst s'écrit : $E_{N_2/N_2H_4} = E_{N_2/N_2H_4}^0 + \frac{0,06}{4} \log \left(\frac{[H^+]^4 P_{N_2}}{[N_2H_6^{2+}] P^0} \right) = E_{N_2/N_2H_6^{2+}}^0 - 0,06 pH + 0,015 \log \left(\frac{P_{N_2}}{[N_2H_6^{2+}] P^0} \right)$. On obtient une pen te de $-0,06 V/pH$. Pour la frontière $N_2/N_2H_5^+$, la demi-équation électronique met en jeu 4 électrons pour 5 protons. On obtient une pen te de $-\frac{0,06}{4} \times 5 pH = -0,075 V/pH$. Pour la frontière $N_2/N_2H_6^{2+}$, la demi-équation électronique met en jeu 4 électrons pour 6 protons. On obtient une pen te de $-\frac{0,06}{4} \times 6 pH = -0,09 V/pH$.
J9	Pour le couple $N_2/N_2H_5^+$, à $pH = 0$ et avec $P_{N_2} = P^0 = 1 \text{ bar}$, $0,015 \log \left(\frac{1}{[N_2H_6^{2+}]} \right) = E_{N_2/N_2H_5^+} - E_{N_2/N_2H_6^{2+}}^0 \Rightarrow [N_2H_6^{2+}] = 10^{\frac{E_{N_2/N_2H_6^{2+}}^0 - E_{N_2/N_2H_5^+}}{0,015}}$. Graphiquement, $E_{N_2/N_2H_5^+}(pH = 0) = -0,17 V$. Ainsi, les frontières sont tracées pour une concentration $c = 10^{-2} \text{ mol. L}^{-1}$ des espèces en solution.
J10	Graphiquement, $E_{N_2/N_2H_4} = -0,29 V$ à $pH = 0$, avec $P_{N_2} = P^0$ et $[N_2H_4] = c = 10^{-2} \text{ mol. L}^{-1}$. On en déduit $E_{N_2/N_2H_4}^0 = E_{N_2/N_2H_4} + 0,015 \log c = -0,32 V$.



K1	L'état gazeux est l'état standard de référence du diazote. L'enthalpie standard de formation est donc nulle.
K2	D'après la loi de Hess, $\Delta_r H^0 = 4\Delta_f H_{NH_3(g)}^0 + \Delta_f H_{N_2(g)}^0 - 3\Delta_f H_{N_2H_4(l)}^0 = -337 \text{ kJ} \cdot \text{mol}^{-1}$.
K3	Comme $\Delta_r H^0 < 0$, la réaction est exothermique.
K4	La quantité de matière d'hydrazine dans un volume V_0 s'écrit : $n_{N_2H_4} = \frac{m_{N_2H_4}}{M_{N_2H_4}} = \frac{\rho_{N_2H_4}}{M_{N_2H_4}} V_0$. Lorsque la décomposition est totale, l'avancement final est $\xi = \frac{n_{N_2H_4}}{3}$. Ainsi, l'enthalpie libérée par la décomposition de l'hydrazine est l'opposé de celle nécessaire à la réaction : $\Delta H_0 = -\xi \Delta_r H^0 = -\frac{\rho_{N_2H_4} V_0}{3M_{N_2H_4}} \Delta_r H^0$. Numériquement, $\Delta H_0 = 3,5 \cdot 10^6 \text{ J}$.
K5	Le volume à embarquer, exprimée en litres, est $V = \frac{E}{\Delta H_0} = 6,9 \text{ L}$.

L1	$CH_6N_2 + \frac{5}{4} N_2O_4 \rightarrow \frac{9}{4} N_2 + 3 H_2O + CO_2$ $C_2H_8N_2 + 2 N_2O_4 \rightarrow 3 N_2 + 4 H_2O + 2 CO_2$
L2	On détermine la quantité n_1 de monométhylhydrazine dans une masse $m_0 = 1 \text{ g}$ de mélange : $n_1 M_{CH_6N_2} + \frac{5}{4} n_1 M_{N_2O_4} = m_0 \Rightarrow n_1 = \frac{m_0}{M_{CH_6N_2} + \frac{5}{4} M_{N_2O_4}} = 6,21 \text{ mmol}$.
L3	On en déduit la quantité de produits gazeux émis par la combustion : $n_{1,gaz} = \left(\frac{9}{4} + 3 + 1\right) n_1 = 38,8 \text{ mmol}$.

L4	<p>De même, on cherche la quantité n_2 de diméthylhydrazine dans une masse $m = 1 \text{ g}$ de mélange : $n_2 M_{C_2H_8N_2} + 2n_2 M_{N_2O_4} = m_0 \Rightarrow n_2 = \frac{m_0}{M_{C_2H_8N_2} + 2M_{N_2O_4}} =$ $\boxed{4,10 \text{ mmol}}$.</p> <p>On en déduit la quantité de produits gazeux émis par la combustion : $n_{2,gaz} =$ $\boxed{(3 + 4 + 2)n_2 = 36,9 \text{ mmol}}$.</p>
L5	<p>En considérant le rapport $\frac{n_{1,gaz}}{n_{2,gaz}} = 1,05$, la monométhylhydrazine constitue le meilleur propergol.</p>