



Samedi 8 avril 2023

OPTION : PHYSIQUE

MP - MPI - PC - PSI - PT - TSI

Durée : 2 heures

Conditions particulières

Calculatrice interdite
Documents interdits

Concours CPGE EPITA-IPSA-ESME

Option Physique

Parc d'attraction

- Calculatrices interdites.
- Les différentes parties sont indépendantes.
Les sous-parties le sont également en grande partie.
- On donne : $\cos a \cos b = \frac{1}{2} [\cos(a + b) + \cos(a - b)]$, $10^{-1,25} \simeq 0,056$ $(80/3,6)^2 \simeq 5 \times 10^2$
 $(80 \times 3,6)^2 \simeq 8 \times 10^4$

I Toboggan aquatique

Un toboggan aquatique est un type de toboggan dans lequel un mince filet d'eau assure un glissement du passager avec de faibles frottements. Il en existe de diverses formes, et cette première partie propose d'étudier leur dimensionnement.

I.1 Étude d'un toboggan rectiligne

On s'intéresse à un toboggan rectiligne, comme celui de la figure 1. La différence de hauteur entre le point de départ et le point d'arrivée est notée h , et le passager démarre en haut (au point A) avec une vitesse initiale nulle. On note g l'intensité de la pesanteur et m la masse du passager. On note v_B la vitesse du passager à l'arrivée (au point B).

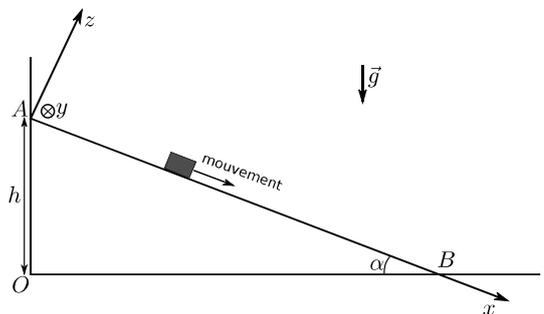


Figure 1. Gauche : photographie du toboggan "le géant" du parc de Wavelsland. Pour ce toboggan, qui est le plus haut de France, $h = 33$ m et $\alpha \simeq 45^\circ$. Droite : modélisation retenue pour l'étude du toboggan.

Dans un premier temps, on néglige tout frottement.

- 1 - En utilisant une approche énergétique, exprimer la vitesse atteinte au point B par le passager, en fonction de h et de g .

On admet que l'application numérique donne $v_B = 92$ km/h.

- 2 - Ce résultat dépend-il de la forme du toboggan, à h constant ?

On prend maintenant en compte les frottements. On utilisera le repère cartésien indiqué sur la figure 1 (droite), avec \vec{e}_x , \vec{e}_y et \vec{e}_z les vecteurs unitaires de la base. Le mouvement a lieu selon \vec{e}_x seulement.

La résultante exercée par le toboggan sur le passager s'écrit :

$$\vec{R} = N\vec{e}_z - T\vec{e}_x,$$

où $T > 0$ représente les frottements. On utilise la loi de Coulomb : tout au long du mouvement, on a la relation $T = \mu \times N$ avec μ une constante positive appelée coefficient de frottement. On suppose l'inclinaison du toboggan suffisante pour qu'il y ait mouvement.

- 3 - À l'aide du principe fondamental de la dynamique (aussi appelé seconde loi de Newton), établir l'expression de N en fonction de m , g , et de l'angle α .
- 4 - Exprimer le travail de la force \vec{R} , pour le mouvement entre les points A et B, d'abord en fonction de la longueur AB et de T . Dans un second temps, l'exprimer en fonction de μ , h , m , g et de l'angle α .
- 5 - À l'aide de ce qui précède, établir l'expression de la vitesse atteinte par le passager en B, en fonction de μ , h , g et de l'angle α .

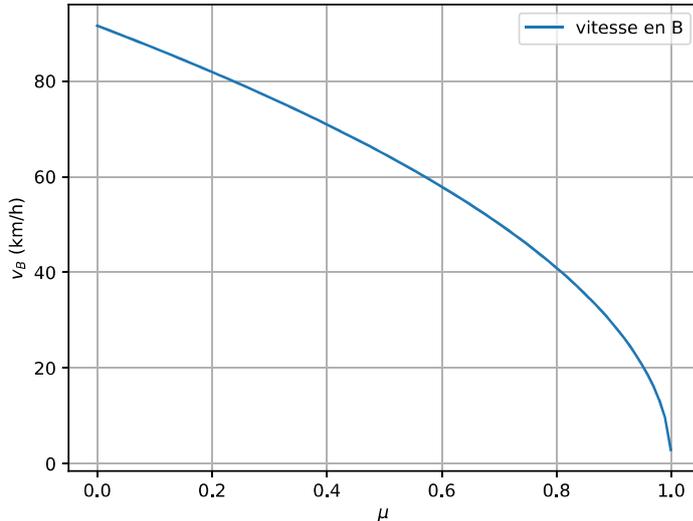


Figure 2 : tracé de l'expression de v_B obtenue dans l'énoncé en fonction du coefficient de frottement μ , pour $\alpha = 45^\circ$.

- 6 - La figure 2 montre un tracé de l'expression précédente de v_B en fonction de μ . La direction du parc d'attraction indique que la vitesse maximale atteinte dans son toboggan est de 80 km/h. En déduire une estimation de la valeur du coefficient de frottement passager-toboggan.

En bas du toboggan se trouve une longue piste horizontale, dans laquelle le passager va ralentir jusqu'à atteindre une vitesse nulle. On souhaite dimensionner la longueur de cette piste.

- 7 - À l'aide des données précédentes et d'un raisonnement énergétique, indiquer quelle doit être la longueur L de la piste. On attend une expression et une valeur numérique.

1.2 Étude d'un virage

On s'intéresse maintenant à un toboggan possédant un virage. Il est d'abord nécessaire d'établir quelques résultats préliminaires.

1.2.1 Préliminaire : étude des oscillations dans une cuvette

Cette sous-partie est indépendante du reste.

On considère une masse m (point M) astreinte à glisser dans une cuvette de rayon a . Le mouvement a lieu dans le plan Oxy de la figure 3. On néglige tout frottement. On note \vec{g} le vecteur pesanteur et g sa norme. On utilise les coordonnées polaires représentées sur la figure 3, avec les vecteurs unitaires \vec{e}_r et \vec{e}_θ .

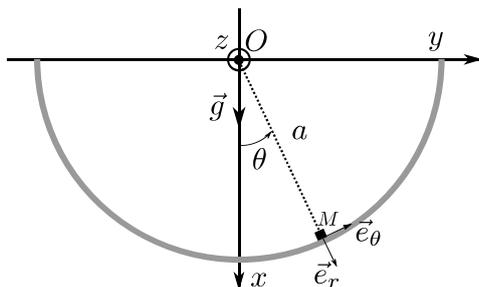


Figure 3 : le point M glisse sans frottement le long d'un support cylindrique (arc de cercle grisé). Il n'y a pas de mouvement selon Oz .

- 8 - Donner l'expression du moment cinétique σ_{Oz} de la masse m selon l'axe Oz , en fonction de m , a et $\dot{\theta} = \frac{d\theta}{dt}$.
- 9 - Donner les expressions du moment du poids et du moment de la réaction du support par rapport à l'axe Oz , en fonction de m , g , a et θ .
- 10 - En utilisant le théorème du moment cinétique, établir une équation différentielle qui porte sur $\theta(t)$.
- 11 - Proposer une approximation qui permet de résoudre cette équation.
Sous cette hypothèse, résoudre l'équation. On supposera qu'initialement $\theta(0) = \theta_0 > 0$ et $\dot{\theta}(0) = 0$.
- 12 - Tracer l'allure de la solution $\theta(t)$. On fera apparaître les valeurs maximales et minimales atteintes.
- 13 - Toujours sous l'hypothèse précédente, donner l'expression de la période des oscillations en fonction de a et de g .

1.2.2 Retour au cas du virage dans le toboggan

On étudie un cas où le passager du toboggan arrive avec une vitesse v_0 à l'entrée d'un virage de rayon R_0 . Le toboggan a une forme de gouttière, et l'effet du virage va être de faire monter le passager le long de la gouttière. La question est de savoir jusqu'où il va monter : il faut en effet dimensionner la gouttière pour que le passager ne soit pas éjecté !

On suppose le virage horizontal. On repère par θ la position angulaire du passager dans un plan Oxy représenté figure 4. On se place dans l'approximation où ce plan Oxy , qui se déplace avec le passager, le fait à une vitesse v_0 qui reste constante.

Les informations importantes pour la résolution du problème sont les suivantes :

- Il est possible de mener l'étude dans le plan Oxy uniquement (figure 4, droite).
- Le référentiel dans lequel le plan Oxy est fixe peut être considéré comme galiléen, à condition d'ajouter au bilan des forces qui s'exercent sur le passager une force supplémentaire (parfois appelée "force centrifuge") qui s'écrit $\vec{F} = \frac{mv_0^2}{R_0} \vec{e}_y$.
- Dans le référentiel du plan Oxy , alors considéré galiléen, le passager est donc soumis à son poids \vec{P} , à \vec{F} , et à la réaction normale \vec{N} du toboggan (on néglige tout frottement).

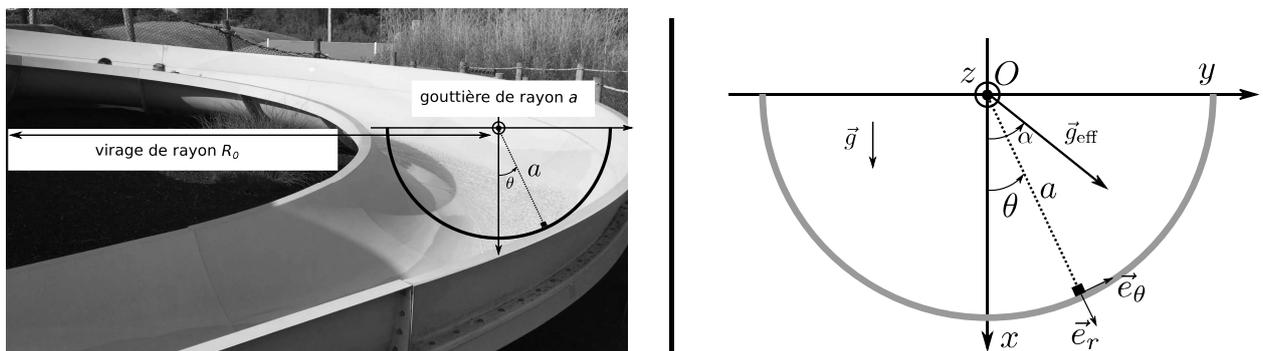


Figure 4. Gauche : photographie d'un virage. Droite : repère dans le plan de la gouttière.

- 14 - Montrer que la somme des forces qui s'exercent sur le passager s'écrit $\vec{P} + \vec{F} + \vec{N} = m\vec{g}_{\text{eff}} + \vec{N}$, avec \vec{g}_{eff} une pesanteur "effective" dont on donnera la norme en fonction de g , R_0 et v_0 .
- 15 - Donner également l'expression de l'angle α entre \vec{g}_{eff} et l'axe Ox , en fonction de g , R_0 et v_0 .

Par exemple, si $v_0 = 25 \text{ km/h}$ et $R_0 = 4 \text{ m}$, on obtient $\|\vec{g}_{\text{eff}}\| = 15,5 \text{ m/s}^2$ et $\alpha = 51^\circ$. On se place dans ce cas dans la suite.

- 16 - Le passager entre dans le virage avec $\theta(0) = 0$. En utilisant une analogie avec ce qui a été vu dans la sous partie I.2.1, indiquer entre quelles valeurs extrêmes va varier θ dans la suite du mouvement. Il n'est pas nécessaire de faire de calculs compliqués pour répondre à cette question.
Conclure alors sur le dimensionnement de la gouttière dans ce cas ci.

II Détecteur de wagons

Dans les attractions qui utilisent des wagons, il est parfois nécessaire de détecter le passage d'un wagon à un endroit donné. Ceci peut se faire à l'aide d'un capteur inductif, que nous étudions dans cette partie.
Sauf pour la toute dernière, les sous-parties de ce problème peuvent être traitées indépendamment.

II.1 Conséquence du passage d'un objet métallique

Le détecteur comporte une bobine d'inductance L_1 , placée sur le bâti du manège et proche du lieu de passage des wagons. On note $u(t)$ la tension à ses bornes (figure 5).

Lorsqu'un wagon passe à proximité, la bobine L_1 du détecteur devient magnétiquement couplée aux éléments métalliques du wagon. Ces derniers sont décrits comme une inductance L_2 , fermée sur elle-même et de résistance électrique négligeable. On note M le coefficient de couplage entre L_1 et L_2 (cf. figure 5).

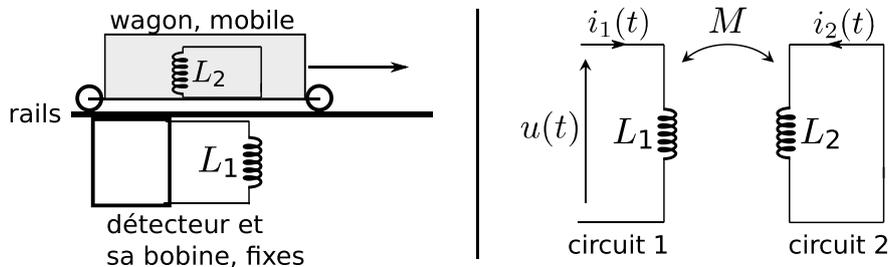


Figure 5. Gauche : schéma de principe. Droite : schéma électrique, avec les bobines 1 et 2, couplées magnétiquement.

- 17 - En étudiant le circuit 2, montrer que $i_2(t) = -\frac{M}{L_2}i_1(t) + C$ où C est une constante.

- 18 - En étudiant le circuit 1, montrer que la relation entre $u(t)$ et $i_1(t)$ se met sous la forme $u = L\frac{di_1}{dt}$. Ceci montre que le circuit 1 est équivalent à une bobine d'inductance L , non couplée magnétiquement avec un autre circuit. On donnera l'expression de L en fonction de L_1 , L_2 et M .

Ce qui précède montre que le passage du wagon modifie l'inductance équivalente à la bobine du circuit 1, qui passe de L_1 à L . Il faut donc un moyen de mesurer un changement de valeur d'inductance.

II.2 Étude d'un circuit RLC

On étudie le circuit RLC série représenté figure 6. Pour $t < 0$ le circuit est ouvert et le condensateur est chargé à la tension $U_0 > 0$. À $t = 0$ l'interrupteur est fermé. On étudie l'évolution de la tension $u_c(t)$ aux bornes du condensateur (figure 6).

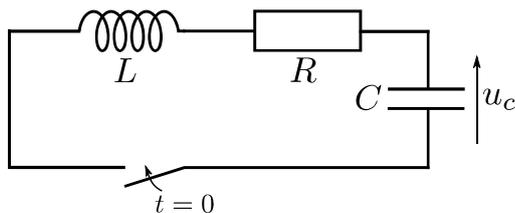


Figure 6 : circuit RLC étudié dans cette sous-partie.

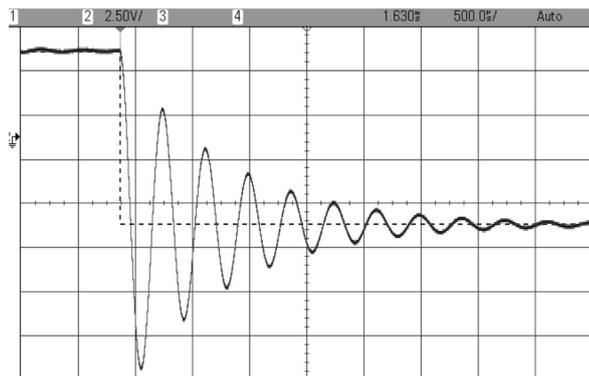


Figure 7 : relevé expérimental de la tension $u_c(t)$.

19 - Démontrer que $u_c(t)$ vérifie l'équation différentielle suivante :

$$\ddot{u}_c + \frac{\omega_0}{Q} \dot{u}_c + \omega_0^2 u_c = 0. \quad (1)$$

On donnera les expressions de ω_0 et de Q en fonction de R , L et C .

20 - On se place dans le régime qui est suivi sur le relevé de la figure 7. Qu'est-ce que ceci implique sur la valeur de Q ?

Toujours à l'aide de la figure 7, estimer approximativement sans calculs la valeur de Q .

21 - Toujours dans le cas du régime suivi figure 7, établir l'expression de la solution de l'équation (1). On l'exprimera en fonction de ω_0 , Q , du temps t , et de deux constantes d'intégration A et B qu'on ne cherche pas à déterminer pour l'instant.

22 - Justifier soigneusement pourquoi $u_c(0^+) = U_0$ et $i(0^+) = 0$, où i est le courant dans le circuit et où l'instant 0^+ signifie "juste après la fermeture de l'interrupteur".

23 - En déduire les expressions des constantes d'intégration A et B .

24 - Montrer que si Q est grand devant 1, alors on peut approximer la pseudo-période des oscillations par $T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0}$.

Ce qui précède montre que le circuit RLC oscille naturellement à une fréquence qui fait intervenir l'inductance L . Le relevé de la figure 7 montre que cette fréquence vaut $f_0 = 2660$ Hz. Si l'inductance L est modifiée par le passage d'un wagon (sous-partie II.1), alors la fréquence d'oscillation change. Il reste donc à obtenir un moyen de détecter un changement de fréquence.

II.3 Étude d'un multiplieur

On dispose du signal produit par le circuit RLC précédent. On néglige l'amortissement des oscillations (en réalité, on modifie le circuit pour annuler cet amortissement, d'une façon non étudiée ici), ce qui revient à considérer que le signal produit aux bornes de u_c est de la forme :

$$e_1(t) = U_0 \cos[2\pi(f_0 + \Delta f)t].$$

Ci-dessus f_0 est la fréquence d'oscillation du circuit en l'absence de wagon, et $f_0 + \Delta f$ est ce que devient cette fréquence en présence d'un wagon.

Ce signal est envoyé à l'entrée d'un multiplieur. Sur la seconde entrée du multiplieur est envoyé un signal de référence,

$$e_2(t) = U'_0 \cos(2\pi f_0 t + \varphi_0),$$

dont la fréquence est fixe, indépendamment du passage ou non d'un wagon. Le multiplieur produit à sa sortie le signal :

$$v(t) = K e_1(t) \times e_2(t),$$

avec $K > 0$ une constante.

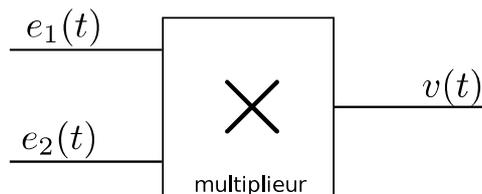


Figure 8 : multiplieur.

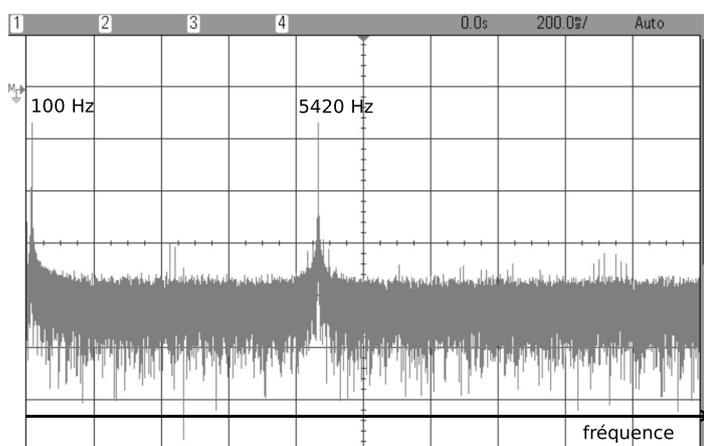


Figure 9 : relevé expérimental du spectre en amplitude de $v(t)$, en sortie du multiplieur.

- 25 - Le spectre du signal $v(t)$ comporte deux composantes, l'une de fréquence f_1 et l'autre de fréquence f_2 . En écrivant $v(t)$ d'une autre manière, établir l'expression de f_1 et de f_2 en fonction de f_0 et de Δf .
- 26 - Donner également les expressions des amplitudes de chacune des deux composantes du spectre.
- 27 - La figure 9 est un enregistrement du spectre en amplitude de $v(t)$. En déduire les valeurs de Δf et de f_0 dans ce cas-ci.

II.4 Filtre passe-bas

L'avant dernière étape est de réaliser un filtre passe-bas qui ne laisse passer que la composante basse fréquence du signal $v(t)$. On considère ainsi le circuit de la figure 10. On note $s(t)$ sa sortie.

On note $\underline{v}(t)$ et $\underline{s}(t)$ les grandeurs complexes associées à $v(t)$ et $s(t)$.

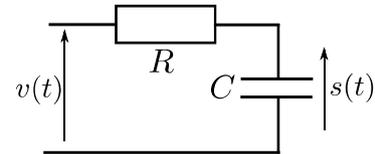


Figure 10 : circuit RC étudié dans cette sous-partie.

- 28 - Par une étude asymptotique du circuit, montrer qu'il s'agit bien d'un filtre passe-bas.
- 29 - Établir l'expression de la fonction de transfert $\underline{H} = \frac{\underline{s}}{\underline{v}}$ de ce circuit, en fonction de R et de C (et de la pulsation ω du signal d'entrée).
- 30 - Établir l'expression de $|\underline{H}|$, ainsi que l'expression du déphasage $\Delta\varphi$ induit par ce filtre, en fonction de R , C et ω .
- 31 - Démontrer, en partant de l'expression de \underline{H} ou de $|\underline{H}|$, que l'asymptote haute fréquence dans le diagramme de Bode en amplitude a pour pente -20 dB/décade.

On donne dans la figure 11 le diagramme de Bode en amplitude et en phase du filtre.

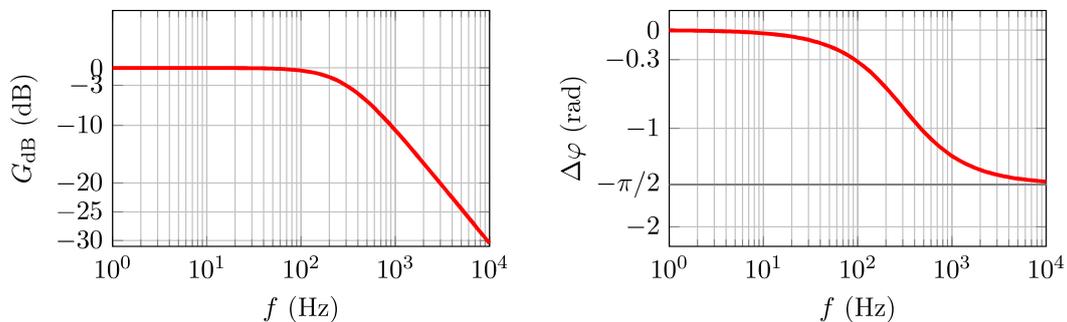


Figure 11 : diagramme de Bode en amplitude et en phase du filtre.

- 32 - À l'aide de la figure 11, estimer la valeur de la fréquence de coupure de ce filtre.

On considère en entrée du filtre le signal

$$e(t) = E_0 \cos(2\pi ft)$$

avec $E_0 = 1$ V et $f = 100$ Hz. Pour les deux questions qui suivent, on ne raisonne pas à partir des expressions théoriques de $|\underline{H}|$ ou de $\arg(\underline{H})$, mais en utilisant la figure 11.

- 33 - Donner l'expression du signal de sortie qui correspond à $e(t)$ en entrée. On donnera les valeurs numériques de l'amplitude et de la phase à l'origine de ce signal de sortie.
- 34 - Même question, avec cette fois une fréquence $f = 5$ kHz pour le signal d'entrée (et toujours $E_0 = 1$ V).

II.5 Chaîne complète

Si on résume : le passage d'un wagon modifie l'expression de l'inductance L du circuit RLC, qui devient $L = L_1 - \frac{M^2}{L_2}$. Sa fréquence d'oscillation passe alors de $f_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{L_1C}}$ à $f_0 + \Delta f = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}$.

35 - Montrer que si $M \ll \sqrt{L_1L_2}$, alors $\Delta f = f_0 \times \frac{M^2}{2L_1L_2}$.

Le signal de fréquence $f_0 + \Delta f$, précédemment noté $e_1(t)$, est envoyé dans le multiplieur. La sortie $v(t)$ du multiplieur est envoyée dans le filtre passe-bas (cf. figure 12). Le signal $e_2(t)$ est le signal de référence de fréquence f_0 .

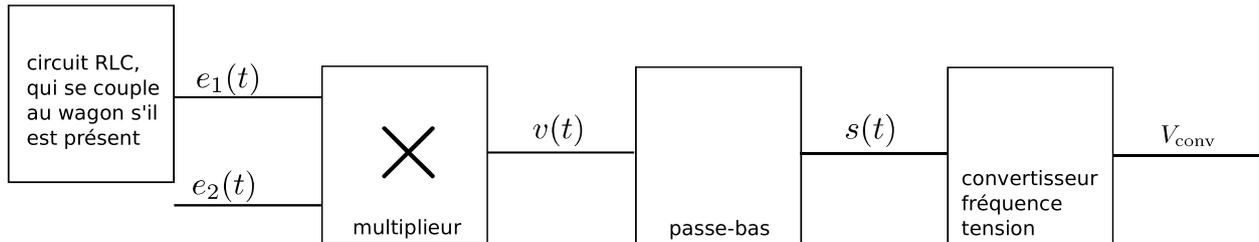


Figure 12 : chaîne complète de traitement du signal.

36 - Indiquer alors l'expression du signal $s(t)$ observé en sortie du filtre passe-bas, en supposant que celui-ci coupe entièrement tout signal de fréquence supérieure ou égale à f_0 . On notera son amplitude S_0 sans chercher à la déterminer.

L'écart Δf varie lors du passage du wagon. Pour simuler ceci, nous remplaçons le wagon par une bobine, que l'on fait passer devant la bobine du circuit 1 (figure 13 à gauche). Il en résulte le signal $s(t)$ enregistré sur la figure 13 à droite.

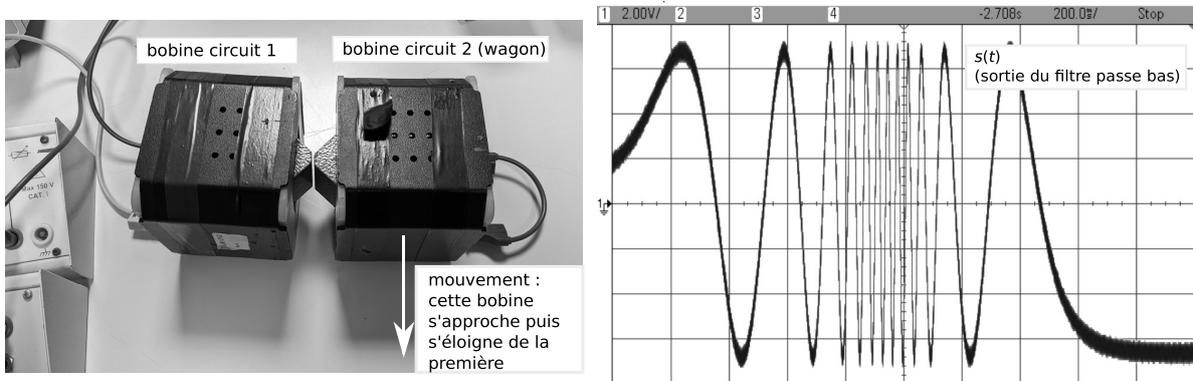


Figure 13. Gauche : passage de la bobine L_2 à proximité de la bobine L_1 . Droite : signal correspondant en sortie du filtre passe-bas.

Le convertisseur fréquence-tension délivre une tension V_{conv} dont la valeur est proportionnelle à la fréquence du signal envoyé sur son entrée. On note α la constante de proportionnalité.

37 - Donner l'expression de cette tension en fonction, entre autre, de M .

38 - Conclure en traçant l'allure de $V_{\text{conv}}(t)$ lors du passage d'un wagon, sachant qu'un tel passage a pour conséquence de faire augmenter puis diminuer M .