DEVOIR DE RÉDACTION N°1

Fusée et propulsion

Vous êtes invités à porter une attention particulière à la rédaction et au soin de votre copie. Les numéros des questions doivent être mis en évidence et les résultats encadrés.

Travailler avec le cours et les exercices de travaux dirigés ouverts sous les yeux est chaudement recommandé : un devoir de rédaction est un entraînement, pas une évaluation. En cas de besoin, n'hésitez pas à me contacter ou à venir me poser des questions à la fin d'une séance.

SCAN ME

Ce devoir de rédaction est à rendre le jeudi 26 septembre.

L'exploration spatiale repose sur la capacité du moteur fusée, seule technologie à ce jour capable de propulser des systèmes mécaniques au-delà de l'atmosphère terrestre.

Vue d'artiste d'Ariane 6.

Dans un référentiel galiléen $\mathcal{R}$, on étudie le mouvement d'une fusée dont la masse et la vitesse sont respectivement notées $m(t)$ et $v(t)$ et sont toutes deux des fonctions du temps. L'évolution de la masse est liée à la consommation du carburant pendant la phase de décollage : la perte de masse est significative par rapport à la masse totale de la fusée et ne peut donc pas être négligée. On introduit le débit massique de gaz éjectés D_m, que l'on supposera constant, et l'on appelle $\vec{u}$ le vecteur vitesse d'éjection des gaz dans le référentiel $\mathcal{R}'$ lié à la fusée. Enfin, on note $\vec{R}$ la résultante des forces extérieures s'appliquant sur la fusée.

1. En vous appuyant sur un bilan de quantité de mouvement entre les instants t et $t + \mathrm{d}t$ sur un système fermé approprié, montrer que l'on peut établir l'équation suivante :

$$m(t)\frac{\mathrm{d}\vec{v}(t)}{\mathrm{d}t} = \vec{R} + \vec{T}$$

où $\vec{T} = -D_m\vec{u}$ correspond à une force de poussée.

Le référentiel $\mathcal{R}$ sera par la suite muni d'un repère cartésien $(Oxyz)$ lié au sol.

— *Premier cas :* trajectoire verticale.

On considère une fusée se déplaçant dans le vide en l'absence de champ de pesanteur. On note m_i et m_f les masses initiale et finale de la fusée et l'on suppose que $\vec{u}$ et $\vec{v}(t)$ ont la même direction fixe.

2. Exprimer l'accroissement de vitesse $\Delta v = v_f - v_i$ en fonction de m_i, m_f et $u = ||\vec{u}||$ (norme supposée constante). En déduire une estimation de la fraction de masse de la fusée à dédier au stockage du carburant étant donnés les ordres de grandeurs suivants : $||\vec{u}|| = 4$ km.s^{-1} et $||v_{\vec{\text{orbite}}}|| = 10$ km.s^{-1}.

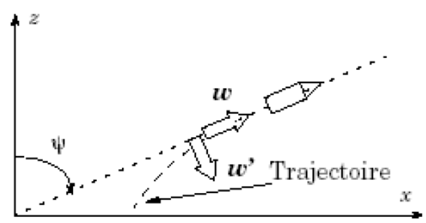
3. Une fusée initialement immobile à l'altitude $z = 0$ est mise à feu à l'instant $t = 0$. Considérons dans un premier temps que la fusée s'élève verticalement dans le champ de pesanteur $\vec{g}$ supposé constant avec un débit massique D_m (constant lui aussi). En l'absence d'atmosphère, établir les expressions de la vitesse $v(t)$ et de l'altitude $z(t)$ en fonction de t, $m(0)$, g, u et D_m.

Formulaire : $\int \ln(x)\, \mathrm{d}x = x\ln(x) - x$

— *Second cas :* trajectoire diagonale.

On considère désormais un modèle simplifié de vol non vertical. La fusée est censée s'élever au-dessus d'un plan horizontal (on néglige donc la courbure de surface). Comme précédemment, l'intensité de la pesanteur est supposée constante et la planète sera considérée sans atmosphère.

On introduit l'angle Ψ entre la verticale et le vecteur vitesse de la fusée. On note toujours $\vec{T}$ la force de poussée associée à l'éjection des gaz vers l'arrière et $m(t)$ la masse totale instantanée de la fusée. En introduisant les vecteurs unitaires ω et $\vec{\omega}'$ respectivement tangent et normal à la trajectoire, l'accélération du vaisseau par rapport au référentiel $\mathcal{R}$ s'exprime :



$$\vec{a} = \frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t}\vec{\omega} + \vec{v}\frac{\mathrm{d}\Psi}{\mathrm{d}t}\vec{\omega}'$$

4. Par projection du principe fondamental de la dynamique sur ω et $\vec{\omega}'$, écrire les deux équations différentielles scalaires du mouvement en fonction des paramètres v, T, m, Ψ et g.

5. On suppose dans la suite que le rapport T/m est constant dans le temps. Commenter le réalisme de cette approximation.

6. En posant $q = \frac{T}{mg}$, établir une équation différentielle liant q, v et Ψ.

7. Résoudre l'équation obtenue dans la question précédente en imposant $v = v_0$ lorsque $\psi = \frac{\pi}{2}$.

Formulaire : $\int \frac{1}{\sin\Psi}\, \mathrm{d}Psi = \ln|\tan\frac{\Psi}{2}|$

— *Conclusion :* choix d'une stratégie de lancement.

8. Déduire de cette étude une stratégie (extrêmement simpliste comparativement aux stratégies réelles) pour envoyer un vaisseau spatial sur une orbite circulaire. Proposer une méthode alternative pour arriver sur la même orbite. Comparer les deux options et justifier de l'intérêt de la méthode proposée.

Bonus. Expliquer qualitativement en quoi la séparation d'étages permet une amélioration de la propulsion.

- Fin de l'énoncé -

Source : philatelie-pour-tous.fr

Le saviez-vous ?

Autodidacte en raison d'une surdité qui l'empêche de fréquenter l'école, Konstantin Tsiolkovski (1857-1935) acquit de vastes connaissances par la lecture. Tout en gagnant sa vie comme instituteur, il consacra ses heures de liberté à l'étude de la locomotion aérienne. Universellement considéré comme le précurseur de l'ère spatiale, il publia en 1903 un article exposant le principe de propulsion par réaction, son efficacité dans le vide et l'expression de la vitesse d'une fusée à la fin de la phase de propulsion en fonction de la vitesse d'éjection des gaz, base de toute réalisation astronautique.

Timbres russes à l'effigie de Tsiolkovski
