Devoir de Rédaction n°2

Fonctionnement d'un vélo

Vous êtes invités à porter une attention particulière à la rédaction et au soin de votre copie. Les numéros des questions doivent être mis en évidence et les résultats encadrés.

Travailler avec le cours et les exercices de travaux dirigés ouverts sous les yeux est chaudement recommandé : un devoir de rédaction est un entraînement, pas une évaluation. En cas de besoin, n'hésitez pas à me contacter ou à venir me poser des questions à la fin d'une séance.

SCAN ME

Ce devoir de rédaction est à rendre le jeudi 10 octobre.

Le vélo est un véhicule à deux roues permettant, à l'aide d'une chaîne de transmission, de convertir le mouvement de rotation d'un pédalier en un mouvement de translation global du vélo par adhérence des roues.

Photographie d'un cycliste en Guadeloupe.

Dans un référentiel galiléen $\mathcal{R}$, on étudie le mouvement d'un vélo constitué d'un cadre de masse M (incluant la masse d'un éventuel cycliste), d'une roue arrière motrice de centre O_2 et d'une roue avant de centre O_1 en posant $\ell = O_1O_2$. Les deux roues sont de rayon a et de masse m. On suppose que l'action mécanique du cycliste sur le pédalier se traduit par un couple moteur $\overrightarrow{\Gamma_m} = \Gamma\overrightarrow{e_y}$ qui s'applique sur l'axe de rotation de la roue arrière. On introduit les points de contacts des roues avant et arrière avec le sol, notés respectivement I_1 et I_2. On note G le centre de masse du système mécanique constitué du cadre (dont un cycliste éventuel) et des deux roues. Le point G est à une hauteur h du sol et sera supposé être à la verticale du segment O_1O_2.

Si chacun des sous-systèmes est un solide indéformable, le système total est un solide déformable en raison de l'articulation des roues autour de leurs axes de rotation. On suppose que les liaisons des roues au cadre sont des liaisons pivots parfaites.

1. Montrer que pour tout point O de l'espace le centre de masse G vérifie :

$$\overrightarrow{OG} = \frac{1}{M+2m}\left(M\,\overrightarrow{OC} + m\,\overrightarrow{OO_1} + m\,\overrightarrow{OO_2}\right)$$

avec C le point correspondant au centre de masse du cadre et du cycliste éventuel.

Le référentiel $\mathcal{R}$ sera par la suite muni d'un repère cartésien $(Oxyz)$ lié au sol.

— *Première partie :* condition d'adhérence d'une roue.

On considère l'une des roues du vélo, à géométrie circulaire de rayon a. La roue est animée par rapport à son axe principal d'un mouvement de rotation à la vitesse angulaire constante ω. On note $I(t)$ le point de contact roue/sol et $\mathcal{R}_O$ le référentiel attaché au centre O de la roue.

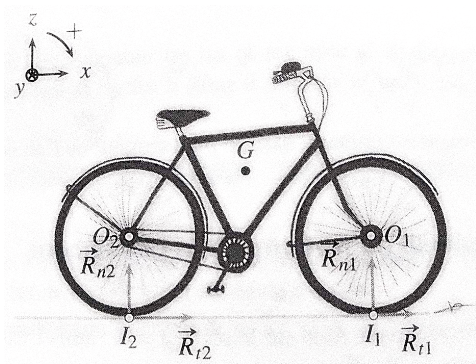
2. En l'absence de glissement, exprimer la vitesse $v(I)|_{\mathcal{R}_O}$ en fonction du rayon a et de la vitesse angulaire ω.

3. Exprimer la vitesse de glissement v_g de la roue sur le sol à partir de la loi de composition des vitesse, puis justifier que cette vitesse est indépendante du référentiel d'étude choisi. En déduire la condition entre les grandeurs V, a et ω assurant roulement sans glissement de la roue.

On se place par la suite en situation de roulement sans glissement (adhérence de la roue).

— *Deuxième partie :* expression des forces.

On suppose que le centre de masse G est animé d'une vitesse constante. Dans le référentiel $\mathcal{R}$ lié au sol : $\overrightarrow{v(G)}|_{\mathcal{R}} = V\overrightarrow{e_x}$. Les composantes normales et tangentielles de réaction du sol sur les roues sont notées R_{t1}, R_{t2}, R_{n1} et R_{n2} conformément au schéma ci-contre. Les frottements de l'air ne sont pas négligés : on admettra une dépendance quadratique de la force (norme notée F) vis-à-vis de la vitesse de déplacement.



4. Établir la liste des actions mécaniques extérieures et intérieures s'exerçant sur le vélo, puis exprimer chacune des forces extérieures s'exerçant sur le vélo.

5. Établir deux relations scalaires entre F, R_{t1}, R_{t2}, R_{n1}, R_{n2}, m, M et g par application du théorème de la résultante cinétique au vélo dans le référentiel $\mathcal{R}$.

6. Établir une relation scalaire entre R_{t1} et a par application du théorème du moment cinétique à la roue avant du vélo dans le référentiel $\mathcal{R}_{O_1}$.

7. Établir une relation scalaire entre R_{t2}, Γ et a par application du théorème du moment cinétique à la roue arrière du vélo dans le référentiel $\mathcal{R}_{O_2}$.

8. Établir une relation scalaire entre R_{t1}, R_{t2}, R_{n1}, R_{n2}, ℓ et h par application du théorème du moment cinétique au vélo dans le référentiel $\mathcal{R}$.

9. Établir les expressions de R_{t1}, R_{t2}, R_{n1}, R_{n2} et F à partir de l'ensemble des relations précédentes.

— *Troisième partie :* condition de roulement sans décollement ni glissement.

10. Justifier que la roue avant peut éventuellement ne plus être en contact avec le sol. En déduire l'expression du couple moteur Γ_1 au delà duquel la roue avant peut décoller.

11. Justifier que la roue arrière ne peut jamais décoller du sol. En déduire l'expression du couple moteur Γ_2 au delà duquel la roue arrière peut glisser.

12. Établir la condition sur le coefficient de frottement μ pour que $\Gamma_2 < \Gamma_1$. Réaliser l'application numérique pour $\ell = 980$ mm et $h = 70$ cm.

— *Quatrième partie :* force exercée et vitesse angulaires.

La force de frottement de l'air sur le vélo peut se mettre sous la forme :

$$F = \frac{1}{2}\rho C_x A V^2$$

avec ρ la masse volumique de l'air, C_x le coefficient de traînée et A le maître-couple (surface du système projeté dans le plan orthogonal à la vitesse de déplacement) et V la vitesse de déplacement du vélo.

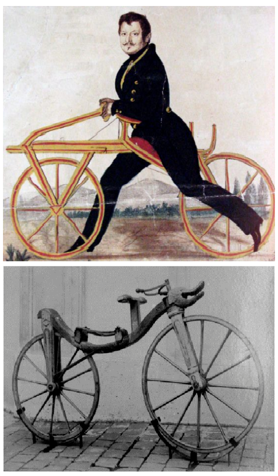
13. Estimer le couple fourni au vélo par le pédalier pour que le vélo se déplace à une vitesse de 20 km.h^{-1}. Réaliser l'application numérique pour $a = 50$ cm, $\rho = 1,3$ kg.m^{-3} et $C_x A \sim 0,3$ m^2.

14. Estimer la force moyenne f qu'applique le cycliste sur la pédale en fonction du couple Γ et de la longueur d de la manivelle. Réaliser l'application numérique pour $d = 170$ mm.

15. Estimer les vitesse angulaires de la roue ω_{roue} et celle de pédale ω_{pedale} si le vélo est configuré pour permettre au cycliste un développement 40×20, c'est-à-dire si la chaîne est maintenue par 48 dents au niveau du plateau et 20 au niveau du pignon.

Bonus. Expliquer qualitativement l'origine physique de l'effet gyroscopique qui intervient lors d'un changement de direction de la roue.

- Fin de l'énoncé -



Le saviez-vous ?

Le 12 juin 1817, Karl Drais (1785-1851) parcourut les 15 kilomètres séparant la ville de Mannheim du relais de poste de Schwetzingen en à peine plus d'une heure ! Il réalisa cet exploit grâce à une machine à courir, traduction de l'allemand "Laufmaschine". Il s'agit d'un véhicule à deux roues équipé d'un siège, la roue avant étant montée sur pivot pour faciliter la direction. L'étrange machine fit l'objet d'un brevet déposé en France en 1818 qui le baptisa vélocipède. Il est écrit qu'il s'agit d'une "machine inventée dans la vue de faire marcher une personne avec une grande vitesse, en rendant sa marche très légère et peu fatigante par l'effet du siège qui supporte le poids du corps qui est fixé sur deux roues qui cèdent avec facilité au mouvement des pieds." L'ajout ultérieur de pédales par des inventeurs anglo-saxons paracheva l'invention de ce que l'on nomme aujourd'hui le vélo.

La baron Drais sur son invention (haut) et photographie d'une draisienne (bas)
Source : histoire-pour-tous.fr