TRAVAUX DIRIGÉS

Référentiels non galiléens

Les différents exercices de ce recueil sont agencés selon la progression des différents paragraphes du cours. Le niveau de difficulté approximatif est mentionné pour chacun d'eux à travers un nombre d'étoiles (★), sauf pour les exercices type résolution de problème (♧♥♤♦). La résolution d'un exercice nécessite un temps de lecture, un temps de recherche et un temps de rédaction. Aucun de ces trois ne doit être négligé. Pour favoriser votre apprentissage, il est vivement recommandé de réaliser les phases de lecture et de recherche en amont de la séance, le minimum exigé étant un schéma de situation et les lois à mettre en œuvre qui devront apparaître en regard des énoncés.

Travail préliminaire

Composition des mouvements

Exercice n°1 - Neige dans le train ★ ☆ ☆

Le passager d'un train observe que la neige tombe en formant un angle de 80° par rapport à la verticale lorsque le train se déplace à 110 km.h^{-1}.

1. Établir une représentation graphique de la vitesse de la neige dans le référentiel du train.

2. Exprimer puis calculer la vitesse de la neige par rapport au sol.

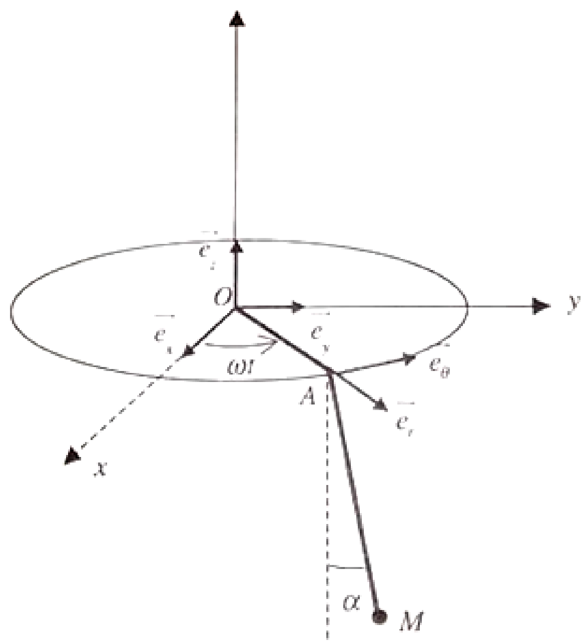
3. Exprimer puis calculer la vitesse de la neige par rapport au train.

Exercice n°2 - Bille, fil et rotation ★☆☆

Soit un référentiel galiléen $\mathcal{R}_0(O|\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$ où (Oz) est l'axe vertical ascendant. Le repère local cylindrique $\mathcal{R}_1(A|\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_z)$ est animé d'un mouvement de rotation de vitesse angulaire ω autour de l'axe (Oz). Le champ de pesanteur, supposé uniforme, sera noté :

$$\vec{g} = -g\vec{e}_z$$

On se propose d'étudier le mouvement d'une nacelle de manège suspendue par des câbles. On modélise cette nacelle par un point matériel M, de masse m, et les câbles sont assimilés à un fil inextensible de longueur ℓ. Le point d'attache supérieur du fil est le point A. Ce point est animé d'un mouvement circulaire de rayon a. On constate que si le manège tourne assez longtemps à vitesse angulaire ω constante, le fil de suspension de la nacelle fait un angle α par rapport à la verticale, dans le plan verticale $(\vec{e}_r, \vec{e}_z)$. On étudie cette situation particulière.



1. Exprimer les coordonnées du point M dans la base locale $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_z)$.

2. Exprimer la vitesse relative du point M dans son mouvement par rapport à $\mathcal{R}_1$.

3. Exprimer la vitesse d'entraînement du point M.

4. En déduire la vitesse absolue du point M, c'est-à-dire par rapport au référentiel galiléen $\mathcal{R}_0$.

5. Exprimer la vitesse et l'accélération du point M dans $\mathcal{R}_0$ par dérivation directe du vecteur position puis vérifier la cohérence avec les résultats précédents.

Exercice n°3 - Insecte sur une aiguille ★★☆

Un insecte se déplace sur l'aiguille des secondes d'une horloge qui a une longueur $L = 20$ cm. L'insecte est initialement au centre de l'horloge. Lorsque l'aiguille indique quinze secondes, l'insecte se déplace le long de l'aiguille à vitesse constante. Une minute plus tard, l'insecte a atteint l'extrémité de l'aiguille, où il s'arrête. On munit l'espace d'une base polaire (r, θ) dont l'origine O est au centre de l'horloge et on définit l'angle $\theta = 0$ comme la position de la verticale ascendante ; et d'une base cartésienne (x, y) d'origine O dont l'axe (Ox) correspond à celui de l'aiguille.

— Étude dans le référentiel de l'horloge

1. Exprimer les coordonnées r et θ en fonction du temps.

2. Représenter graphiquement la trajectoire de l'insecte.

3. Établir les expressions de la vitesse et de l'accélération de l'insecte par dérivation.

— Étude dans le référentiel de l'aiguille

4. Exprimer les coordonnées x et y en fonction du temps.

5. Représenter graphiquement la trajectoire de l'insecte.

6. Établir les expressions de la vitesse et l'accélération par application des lois de composition.

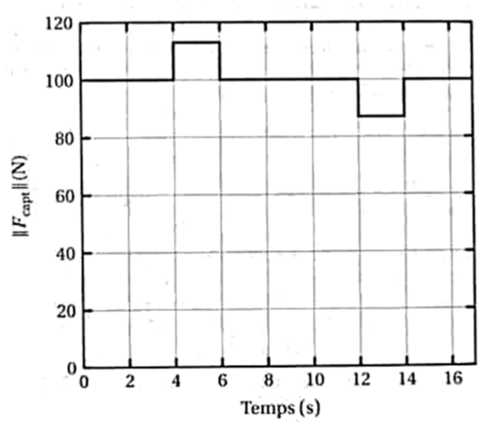
— Application numérique

7. Calculer la vitesse et l'accélération de l'insecte à l'instant $t = 52,5$ s.

Forces d'inertie d'entraînement linéaire

Exercice n°4 - Parpaing dans un ascenseur ★ ☆ ☆

On considère un parpaing posé sur un capteur de force dans une cabine d'ascenseur. On utilise le capteur pour suivre l'évolution de la valeur de la force au cours du temps, notée F_{capt}. La cabine est initialement au deuxième étage d'un immeuble et elle se met en mouvement à l'instant $t = 4$ s après avoir démarré l'enregistrement.
On constate que la valeur maximale de la force s'exerçant sur le capteur est $F_{\text{capt,max}} = 113$ N et la force minimale est $F_{\text{capt,min}} = 87$ N.



1. Déterminer la masse du parpaing.

2. Identifier les cinq phases du mouvement en précisant les instants initiaux et finaux de chacune d'elles.

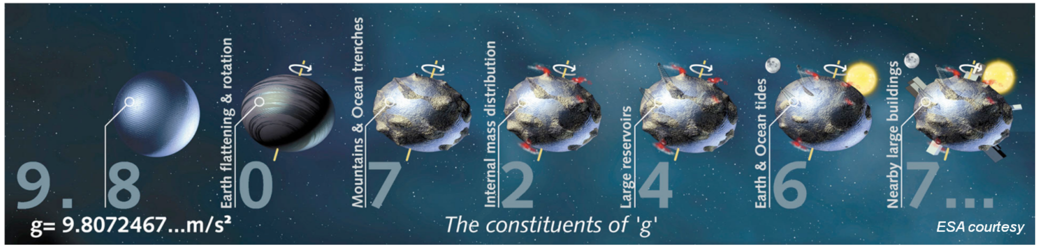
3. Pour chacune des phases, déterminer l'équation horaire régissant le mouvement du parpaing.

4. Déterminer le nombre d'étages traversés et le numéro de l'étage atteint à l'instant $t = 17$ s.

Forces d'inertie d'entraînement centrifuge

Exercice n°5 - Champ de pesanteur apparent ★ ★ ☆

On s'intéresse au champ de pesanteur $\vec{g}(P)$ en un point P de la surface d'un astre, ce dernier étant considéré comme une sphère de rayon R et de masse M. Par rapport au référentiel centré sur le centre $\mathcal{R}_{\text{geo}}$, l'astre est animé d'un mouvement de rotation à la vitesse angulaire constante $\omega = 2\pi/T$ autour de l'axe des pôles noté (Oz). Comme on néglige toute influence géodésique (forme réelle) et astronomique (interaction avec d'autres astres), cela revient à ne considérer que les deux termes principaux du champ $\vec{g}(P)$ qui permettent une détermination de la valeur avec une précision au centième, comme l'illustre l'infographie ci-après.



1. Citer le paramètre physique principal qui domine la valeur de la première et la deuxième décimale de l'accélération de pesanteur sur Terre.

2. Réaliser un schéma de coupe de la Terre où figure une masse ponctuelle M immobile à la latitude λ ainsi que les différentes forces (réelles et inertielles) qui s'appliquent en considérant le référentiel terrestre.

Le poids apparent correspond à la différence entre le poids réel et l'accélération d'entraînement subie.

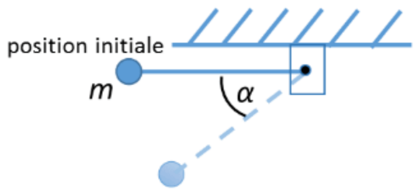
3. Exprimer le vecteur poids apparent que subit le point M en fonction de sa masse m et de la vitesse angulaire de rotation de la Terre que l'on notera ω.

4. Calculer la norme de $\vec{g}(P)$ en un point P situé à l'équateur de la Terre puis de l'astéroïde Sisyphe. Comparer les valeurs obtenues et commenter l'influence de la vitesse de rotation sur le poids.

Astre	rayon équatorial	masse (kg)	période de rotation
Terre	6378 km	$5{,}99\times10^{24}$ kg	23h56min
Sisyphe	1,2 km	$1{,}80\times10^{12}$ kg	2h24min

Exercice n°6 - Tension d'un fil dans un pendule ★★☆

Une bille de masse m est suspendue a un fil, supposé non flexible. Celle-ci est lâchée sans vitesse initiale, le fil étant alors horizontal conformément au schéma ci-contre On note g l'intensité de pesanteur et T la norme de la force de tension qu'exerce le fil sur la bille.



1. Établir l'équation du mouvement de la masse m dans le référentiel $\mathcal{R}$ lié au bâti.

2. Établir l'équation du mouvement de la masse m dans le référentiel $\mathcal{R}'$ lié au fil. Commenter.

3. Établir l'expression de la vitesse angulaire par intégration de l'équation du mouvement.

4. Exprimer la norme de l'accélération dans le référentiel $\mathcal{R}$ lié au bâti en fonction de g et de l'angle α. Justifier la cohérence du résultat obtenu.

5. Déterminer la loi d'évolution $T(\theta)$ de la force de tension du fil sur la bille en fonction de l'angle α et en donner une représentation graphique pour $\alpha \in [\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$.

Problème ouvert - Les chaises volantes

♧♥♤♦

▶ *Déterminer la vitesse angulaire de rotation du manège.*

Exercice n°7 - Anneau sur un cerceau (objectif concours) ★★☆

Un guide circulaire de centre O et de rayon r est en rotation uniforme à la vitesse ω autour de son diamètre vertical (Ox) dans le référentiel terrestre $\mathcal{R}$ supposé galiléen. Le vecteur rotation est donc de la forme $\overrightarrow{\Omega} = \omega\,\overrightarrow{e_x}$. On note $\mathcal{R}'$ le référentiel d'étude lié au cercle, et on le muni d'une base cartésienne $(Oxyz)$. Un anneau de masse m, assimilé à une masse ponctuelle M, est astreint à coulisser sans frottement sur la circonférence. Son mouvement dans $\mathcal{R}'$ est repéré par l'angle θ entre le vecteur unitaire vertical descendant et le vecteur $\overrightarrow{OM}$, le point A étant le. On note $\overrightarrow{g} = +g\overrightarrow{e_x}$ l'accélération de pesanteur.

1. Réaliser le bilan des forces s'exerçant sur le point M dans le référentiel $\mathcal{R}'$ et exprimer chacune des forces dans la base cylindriques $(\overrightarrow{e_r}, \overrightarrow{e_\theta}, \overrightarrow{e_z})$.

2. Établir l'équation différentielle vérifiée par la fonction $\theta(t)$ puis l'expression de la force de réaction $\overrightarrow{R}$.

3. Déterminer les position(s) d'équilibre du point M.

Problème ouvert - Usure des rails ♧♥♤♦

Sur les lignes de TGV entre le nord et le sud de la France, on constate une usure différentielle sur d'un des deux rails, et en l'occurrence toujours le même.

- ▶ *Proposer une modélisation simple permettant de rendre compte de ce phénomène.*

Exercice n°8 - Bol en rotation (objectif concours) ★★★

Une bille assimilée à un point matériel M de masse m est astreinte à se déplacer sans frottement sur la surface intérieure d'une demi-sphère creuse $\mathcal{S}$ de centre O. Cette surface tourne uniformément à la vitesse angulaire constante ω autour de son axe de révolution vertical (Oz). On appelle r_0 le rayon intérieur de la sphère et on pose $\omega_0 = \sqrt{2g/r_0}$ où g est l'accélération de pesanteur. On note $\mathcal{R}_\mathcal{L}$ le référentiel lié au laboratoire et $\mathcal{R}_\mathcal{S}$ celui lié à la demi-sphère. On se place dans le référentiel $\mathcal{R}_\mathcal{S}$ que l'on munit d'une base cylindrique (ρ, θ, z) d'axe (Oz).

1. Montrer que l'énergie potentielle du point M dans $\mathcal{R}_\mathcal{S}$ s'exprime :

$$E_p = \frac{1}{2}m\omega^2 z\left(\frac{\omega_0^2}{\omega^2} r_0 + z\right)$$

2. Déterminer les cotes z_e des positions d'équilibre du point M dans $\mathcal{R}_\mathcal{S}$ et étudier leur stabilité.

3. Représenter graphiquement z_e en fonction de $\dfrac{\omega}{\omega_0}$.

4. Représenter graphiquement E_p en fonction de z pour $\dfrac{\omega_0}{\omega} = 0,2$.

5. Discuter qualitativement le mouvement de la bille en fonction de son énergie mécanique lorsque celle-ci est lâchée sans vitesse initiale dans le référentiel $\mathcal{R}_\mathcal{S}$.