Fusée

I_{27}. Propulsion par moteur fusée (d'après centrale 2002 MP).

On étudie une fusée de masse totale (à l'instant t) $m(t)$ et de vitesse $\vec{V}(t)$ dans un référentiel galiléen R ; soit D_m le débit massique (constant) de gaz éjectés, et $\vec{u}$ leur vitesse d'éjection dans le référentiel R$'$ lié à la fusée. La résultante des forces extérieures exercées sur la fusée est notée $\vec{R}$.

1) En effectuant un bilan de quantité de mouvement entre les instants t et $t+dt$ *sur un système fermé*, montrer que, $m(t)\dfrac{d\vec{V}(t)}{dt}=\vec{R}+\vec{T}$ où $\vec{T}=-D_m\vec{u}$ est la force de poussée.

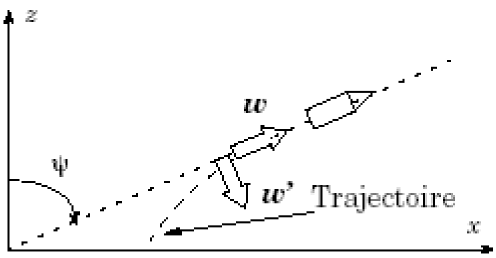
2) On considère une fusée se déplaçant dans le vide, en l'absence de pesanteur ; les masses initiale et finale de cette fusée sont m_i et m_f ; $\vec{u}$ et $\vec{V}(t)$ ont la même direction fixe. Exprimer l'accroissement de vitesse $\Delta V=V_f-V_i$ en fonction de m_i, m_f et u où u est la norme de $\vec{u}$ supposée constante.

Dans les questions suivantes, le référentiel $\mathscr{R}$ (muni du repère $Oxyz$) est lié au sol.

3) À $t=0$, une fusée initialement immobile située à l'altitude $z=0$ est mise à feu. Supposons dans un premier temps que la fusée s'élève verticalement, dans un champ de pesanteur $\vec{g}$ supposé constant, avec un débit massique D_m constant. La planète est supposée sans atmosphère. Établir les expressions de la vitesse $V(t)$ et de l'altitude $z(t)$ en fonction du temps, de $m(0)$, g , u et D_m .

On donne $\int \ln(x)\,dx = x\ln(x)-x$.

4) On considère maintenant un modèle très simplifié de vol non vertical. La fusée est censée s'élever au-dessus d'un plan horizontal (on néglige donc la courbure de la surface...). L'intensité de la pesanteur est supposée constante. On néglige toujours la résistance de l'air. Soit ψ l'angle entre la verticale et le vecteur vitesse de la fusée.



On note $\vec{T}$ la « force de poussée » associée à l'éjection de gaz vers l'arrière et $m(t)$ la masse instantanée.

L'accélération du vaisseau par rapport au référentiel R ($Oxyz$) est $\vec{a}=\dfrac{dV}{dt}\vec{w}+V\dfrac{d\psi}{dt}\vec{w}'$, où $\vec{w}$ est le vecteur unitaire tangent et $\vec{w}'$ le vecteur unitaire normal à la trajectoire.

En projetant le principe fondamental de la dynamique sur $\vec{w}$ et $\vec{w}'$, écrire les deux équations différentielles scalaires du mouvement. Les paramètres intervenant seront V , T , m , ψ et g .

5) On suppose dans la suite que le rapport T/m est constant dans le temps. Cette approximation vous paraît-elle réaliste ?

6) On pose $q=\dfrac{T}{mg}$. Établir dans ce cas l'équation différentielle liant q , V et ψ .

7) Résoudre l'équation précédente, en imposant que V soit égal à V_0 quand ψ est égal à $\pi/2$. On donne : $\displaystyle\int\frac{1}{\sin\psi}d\psi=\ln\left|\tan(\psi/2)\right|$.

8) Déduire de cette étude une stratégie pour envoyer un vaisseau spatial sur une orbite circulaire (encore une fois, l'étude proposée est très simplifiée). Quelle autre méthode proposeriez-vous pour obtenir la même orbite ? Quel est, à votre avis, l'intérêt de la méthode proposée ?

Réponses

I. 2) $V=-gt-u\ln[1-D_mt/m(0)]$; $z=ut-\dfrac{1}{2}gt^2+u\left(\dfrac{m(0)}{D_m}-t\right)\ln\left(1-\dfrac{D_mt}{m(0)}\right)$; 4) $m\dfrac{dV}{dt}=-mg\cos\psi+T$; $mV\dfrac{d\psi}{dt}=mg\sin\psi$; 5) non ; 6) $\dfrac{1}{V}\dfrac{dV}{d\psi}=\dfrac{q-\cos\psi}{\sin\psi}$; 7) $V=V_0\dfrac{\tan^q(\psi/2)}{\sin\psi}$.

Corrigé

I. Propulsion par moteur fusée (d'après centrale 2002 MP).

1) Considérons le système constitué à l'instant t par la fusée de masse m et de vitesse $\vec{V}$ et à l'instant $t+dt$ par l'ensemble de la fusée de masse $m+dm$ et de vitesse $\vec{V}+\overrightarrow{dV}$ et des gaz éjectés pendant dt , de masse $-dm$ et de

vitesse $\vec{V}+\vec{u}$. Le théorème de la quantité de mouvement s'écrit :

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{(m+dm)(\vec{V}+d\vec{V}) - dm(\vec{V}+\vec{u}) - m\vec{V}}{dt} = \vec{R}$$

En simplifiant et en supprimant le terme quadratique par rapport aux différentielles, qui correspond à un terme négligeable devant les termes linéaires par rapport aux différentielles, on obtient : $\frac{d\vec{p}}{dt} = m\frac{d\vec{V}}{dt} - \vec{u}\frac{dm}{dt} = \vec{R}$ qu'on peut écrire : $m\frac{d\vec{V}}{dt} = \vec{R}+\vec{T}$ où $\vec{T} = \vec{u}\frac{dm}{dt} = -D_m\vec{u}$.

2) $m\frac{d\vec{V}}{dt} = \vec{u}\frac{dm}{dt} \Rightarrow d\vec{V} = \vec{u}\frac{dm}{m} \Rightarrow \vec{V}_f - \vec{V}_i = \vec{u}\int\frac{dm}{m} = \vec{u}\ln\frac{m_f}{m_i}$.

3) Sous réserve que le débit des gaz soit constant et suffisant pour que la poussée soit supérieure au poids :

$$\frac{dm}{dt} = -D_m \qquad m = m(0) - D_m t$$

$$m\frac{dV}{dt} = -mg - u\frac{dm}{dt} \quad dV = -gdt - u\frac{dm}{m} \quad \boxed{V =} - gt - u\ln\frac{m}{m(0)} = \boxed{-gt - u\ln[1 - D_m t / m(0)]}$$

$$z = \int Vdt = -\tfrac{1}{2}gt^2 + ut\ln(m(0)) - u\int dt\ln m$$

Or

$$\int dt\ln m = -\frac{1}{D_m}\int dm\ln m = -\frac{1}{D_m}[m\ln m - m]_{m(0)}^{m(0)-D_m t} = -\frac{1}{D_m}[(m(0)-D_m t)\ln(m(0)-D_m t) - m(0)\ln m(0) - D_m t]$$

$$= -\frac{m(0)}{D_m}\ln[1 - D_m t / m(0)] + t[1 + \ln(m(0) - D_m t)]$$

$$\boxed{z = ut - \frac{1}{2}gt^2 + u\left(\frac{m(0)}{D_m} - t\right)\ln\left(1 - \frac{D_m t}{m(0)}\right)}.$$

4) Justifions l'expression de l'accélération donnée par l'énoncé : l'accélération est $\vec{a} = \frac{d}{dt}(V\vec{w}) = \frac{dV}{dt}\vec{w} + V\frac{d\vec{w}}{dt}$; or, $\vec{w}$ est une fonction de $\psi(t)$: $\frac{d\vec{w}}{dt} = \frac{d\vec{w}}{d\psi}\frac{d\psi}{dt} = \frac{d\psi}{dt}\vec{w}'$; d'où $\vec{a} = \frac{dV}{dt}\vec{w} + V\frac{d\psi}{dt}\vec{w}'$.

Projetons sur la base de Frenet la loi fondamentale de la dynamique $m\vec{a} = m\vec{g} + \vec{T}$:

$$\boxed{\begin{aligned} &m\frac{dV}{dt} = -mg\cos\psi + T \\ &mV\frac{d\psi}{dt} = mg\sin\psi \end{aligned}}$$

5) L'idée que le rapport T/m est constant dans le temps est peu réaliste, car le débit des gaz est souvent constant et la masse varie d'un facteur de l'ordre de 3 pendant la combustion d'un étage. Le rôle de cette idée est seulement de donner un calcul simple.

6) Prenons le rapport membre à membre des équations de 4) : $\boxed{\frac{1}{V}\frac{dV}{d\psi} = \frac{q - \cos\psi}{\sin\psi}}$.

7)

$$\ln\frac{V}{V_0} = \int_{V_0}^{V}\frac{dV}{V} = \int_{\pi/2}^{\psi}\frac{q-\cos\psi}{\sin\psi}d\psi = \left[q\ln\left|\tan\frac{\psi}{2}\right| - \ln|\sin\psi|\right]_{\pi/2}^{\psi} = q\ln\tan\frac{\psi}{2} - \ln\sin\psi \Rightarrow \boxed{V = V_0\frac{\tan^q(\psi/2)}{\sin\psi}}$$

.

8) On pourrait faire basculer un peu de la verticale la fusée au moyen d'ailerons ; ensuite, le poids amplifierait cette inclinaison, ce qui permettrait de prendre naturellement l'orbite de transfert. La fusée suit ensuite cette orbite de façon balistique jusqu'à son apogée qui est à l'altitude recherchée. Alors une nouvelle accélération permet de prendre l'orbite circulaire.

Une autre stratégie est de tirer verticalement pour traverser l'atmosphère. Une fois l'atmosphère traversée, la fusée bascule et accélère horizontalement, prenant l'orbite de transfert.

La première méthode paraît plus simple que la seconde, elle ne nécessite pas de manœuvre de basculement. Mais elle consomme plus d'ergols, car, pour faire varier la vitesse d'une fusée, il est plus économique d'éjecter les gaz dans une direction fixe : en effet, $\Delta\vec{V} = \int\vec{u}\frac{dm}{m}$ montre que la même variation de vitesse en module consomme moins d'ergols si $\vec{u}$ a une direction fixe.