

# DEVOIR SURVEILLÉ N° 1

Classe MPI - Promotion 2025



## Composition de Physique

---

**Durée : 4 heures**

---

*Le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction. Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.*

- *Utiliser uniquement un stylo noir ou bleu foncé pour la rédaction de votre composition ; d'autres couleurs peuvent être utilisées, mais exclusivement pour les schémas et la mise en évidence des résultats.*
- *Écrire le mot FIN à la fin de votre composition.*

**Les calculatrices sont autorisées.**

---

**Les différentes parties sont indépendantes.**

► **Données :**

→ constantes :  $R = 8,31 \text{ J}\cdot\text{mol}^{-1}\cdot\text{K}^{-1}$     $N_a = 6,022 \times 10^{23} \text{ mol}^{-1}$     $\mathcal{F} = 96\,500 \text{ C}\cdot\text{mol}^{-1}$   
 $c = 3,00 \times 10^8 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$     $h = 6,63 \times 10^{-34} \text{ J}\cdot\text{s}^{-1}$     $G = 6,67 \times 10^{-11} \text{ m}^3\cdot\text{kg}^{-1}\cdot\text{s}^{-2}$

→ La planète Terre :  $g = 9,81 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$

► **Formulaire :**

→ Conversion :  $1 \text{ eV} = 1,602 \times 10^{-19} \text{ J}$     $T(\text{K}) = t(^{\circ}\text{C}) + 273$

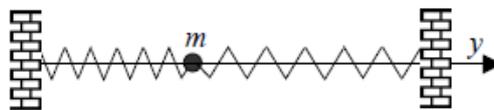
**Partie I - Modélisation d'un oscillateur**

(ENSTIM - 2008)

Soit un point matériel de masse  $m$ , en mouvement dans le champ de pesanteur  $\vec{g}$  uniforme.

1. Définir l'énergie potentielle associée à une force  $\vec{F}$ . Pour une force de rappel élastique de constante  $k$ , déterminer l'expression de l'énergie potentielle en fonction de l'écart  $x$  à la position d'équilibre, à une constante additive près.

2. On considère un mouvement conservatif de  $m$  sur l'axe horizontal ( $Oy$ ), autour d'une position d'équilibre  $Y_0$ , avec l'énergie potentielle  $E_p(y) = E_0 + \alpha \cdot (y - Y_0)^2$ , où  $\alpha$  est une constante positive. Établir l'équation différentielle du mouvement et en déduire qu'il s'agit d'oscillations harmoniques dont on précisera l'expression de la période. Application : considérons le dispositif horizontal de la figure suivante. Les ressorts sont identiques, de raideur  $k$  et de longueur à vide  $L_0$ , tandis que les points d'attache sont distants de  $2L_0$ .



3. Exprimer  $E_p(y)$  si  $y$  désigne l'écart à la position d'équilibre, et calculer la période  $T_0$  des oscillations de  $m$  si  $m = 200 \text{ g}$  et  $k = 40 \text{ N}\cdot\text{m}^{-1}$ .

4. On envisage l'existence d'un frottement fluide d'intensité proportionnelle à la vitesse de  $m$  par rapport à l'axe du mouvement :  $\vec{F} = -\beta m \vec{v}$  où  $\beta$  est une constante positive. Donner la dimension ou l'unité SI de  $\beta$ .

5. Établir l'équation différentielle du mouvement. Quelle est la valeur numérique maximale de  $\beta$  permettant les oscillations de  $m$  ?

**Partie II - Condensateur plan**

(CCINP - 2021)

Parmi les méthodes possibles pour mesurer une accélération, il existe une méthode électrostatique basé sur l'emploi d'un condensateur. On considère un plan infini (assimilé au plan  $yOz$ ) uniformément chargé en surface, avec une densité surfacique positive de charges notée  $\sigma$  (figure 1). On cherche à déterminer le champ électrostatique engendré par ce plan dans tout l'espace.

6. Déterminer le sens et la direction du champ électrostatique en un point M de coordonnées cartésiennes  $(x, y, z)$ . De quelle variable ( $x, y$  ou  $z$ ) peut dépendre ce champ ?

7. En utilisant le théorème de Gauss, donner l'expression du champ électrostatique  $\vec{E}(M)$  en fonction de  $\sigma$ , de la constante  $\epsilon_0$  et d'un vecteur unitaire à préciser.

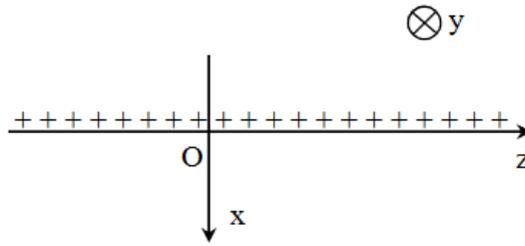


FIGURE 1 – Plan infini chargé.

On modélise à présent un condensateur par deux plans infinis uniformément chargés : le plan A d'équation  $x = 0$  porte une densité surfacique de charges  $+\sigma$  et le plan B d'équation  $x = e$  porte une densité surfacique de charge  $-\sigma$ ,  $\sigma$  et  $e$  étant des constantes positives.

8. Déterminer l'expression du champ électrostatique  $\vec{E}$  qui existe entre les plaques en fonction de  $\sigma$  et de la constante  $\epsilon_0$ . Que peut-on dire du champ électrostatique à l'extérieur des plaques ?

9. Établir l'expression de la différence de potentiel  $U_{AB} = V_A - V_B$  en fonction de  $\sigma$ ,  $e$  et de la constante  $\epsilon_0$ .

On considère à présent un condensateur réel (figure 2), constitué de deux plaques identiques de surface  $S$  placées parallèlement l'une à l'autre et séparées par une distance  $e$ . Elles portent des charges égales en valeur absolue et opposées en signe. La différence de potentiel entre ces plaques est notée  $U$ . La distance  $e$  étant faible au regard de la taille des plaques, on peut supposer que le champ électrostatique entre les plaques est le même que celui engendré par deux plans infinis portant des densités surfaciques de charges équivalentes.

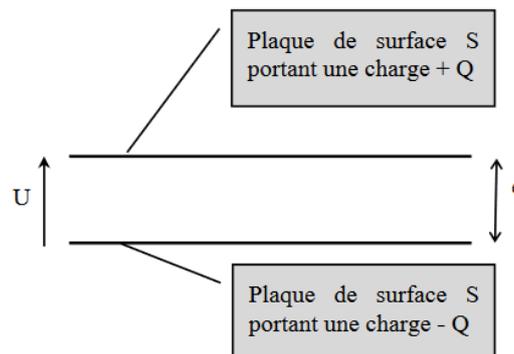


FIGURE 2 – Condensateur réel.

10. Définir la capacité  $C$  de ce condensateur. Donner son expression en fonction de  $S$ ,  $e$  et  $\epsilon_0$ .

11. Avec quelle unité exprime-t-on la capacité d'un condensateur ?

### Partie III - Le sismographe

(e3a - 2022)

Le sismographe est un instrument chargé d'enregistrer les mouvements de l'écorce terrestre par rapport au référentiel du laboratoire supposé galiléen. Il peut être modélisé par un ressort de constante de raideur  $k$  dont l'extrémité supérieure est solidaire d'un boîtier posé sur le sol (voir Figure 3). Une masse  $m$  de centre d'inertie  $G$  attachée à l'autre extrémité du ressort est reliée à un amortisseur exerçant une force de frottement visqueux que l'on écrira  $\vec{f} = -\lambda\vec{v}$ . Une partie non présentée permet d'enregistrer les mouvements de la masse. Lorsque l'appareil détecte un tremblement de terre, le boîtier est animé d'un mouvement de translation rectiligne par rapport au référentiel du laboratoire. L'axe  $(Oz)$  est un axe lié au référentiel  $\mathcal{R}$ . L'axe  $(O'z')$  est un axe lié au référentiel  $\mathcal{R}'$ .

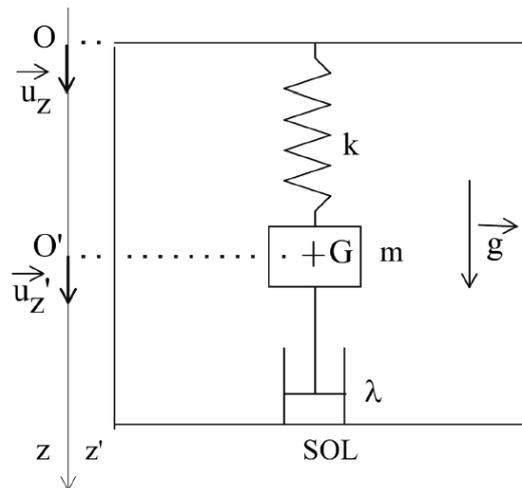


FIGURE 3 – Modèle de sismographe.

La cote de l'origine  $O'$  du repère  $\mathcal{R}'$  représentée sur le schéma correspond à la position d'équilibre du centre d'inertie de la masse lorsque le boîtier est immobile, c'est-à-dire en absence de mouvement de l'écorce terrestre.

12. Que représente le coefficient  $\lambda$  dans l'expression de  $\vec{f}$  ? Quelle est son unité ?
13. La longueur à vide du ressort est notée  $l_0$ . On considère dans cette question que le sol ne vibre pas. Appliquer la seconde loi de Newton à la masse  $m$  dans le référentiel  $\mathcal{R}'$  lié au boîtier qui est alors galiléen. Quelle est la longueur à l'équilibre  $l_1$  du ressort en fonction des données ?
14. Lorsque le sol vibre, le référentiel lié au boîtier n'est plus galiléen. Rappeler les expressions des forces d'inertie à prendre en compte et donner leurs expressions dans le cas du sismographe étudié.
15. Effectuer un bilan des forces s'exerçant sur la masse dans  $\mathcal{R}'$  et les représenter en supposant que les valeurs de l'allongement du ressort, de la vitesse du point  $G$  et de l'accélération d'entraînement sont positives.
16. Appliquer la seconde loi de Newton à la masse dans le référentiel  $\mathcal{R}'$  lié au boîtier. On notera  $z'_G$  la cote du point  $G$  dans le repère  $\mathcal{R}'$ . Projeter cette relation sur l'axe vertical.
17. On supposera que l'expression de  $z_S(t)$  décrivant le mouvement du sol est :

$$z_S(t) = E_m \cos(\omega t + \Phi)$$

On écrit la relation sous la forme :

$$\frac{d^2 z'_G}{dt^2} + \frac{\omega_0}{Q} \frac{dz'_G}{dt} + \omega_0^2 z'_G = E_m \omega^2 \cos(\omega t + \Phi)$$

18. Comment appelle-t-on  $\omega_0$  et  $Q$  ? Donner leurs expressions littérales.
19. Pour un sismographe, le facteur de qualité est toujours très élevé. Quelle est alors l'équation obtenue en simplifiant la relation précédente si on se place dans le cas idéal où le facteur de qualité est infini ?
20. En régime permanent, la solution de cette équation s'écrit  $z'_G(t) = Z_m \cos(\omega t + \Phi')$  avec  $Z_m > 0$ . Quelle est l'expression de  $Z_m$  ?
21. On donne la représentation graphique de  $Z_m(u)$  avec  $u = \frac{\omega}{\omega_0}$  (Figure 4). Justifier l'allure de cette courbe à partir des résultats de la question précédente.
22. Il faut distinguer trois zones sur cette courbe : zone I ( $u \ll 1$ ), zone II ( $u$  tend vers 1) et zone III ( $u \gg 1$ ). Comment appelle-t-on le phénomène mis en évidence pour  $u = 1$  ? À quelle partie de la courbe correspond la zone de fonctionnement du sismographe ? Citer un exemple de la vie courante correspondant à la zone restante de cette courbe.

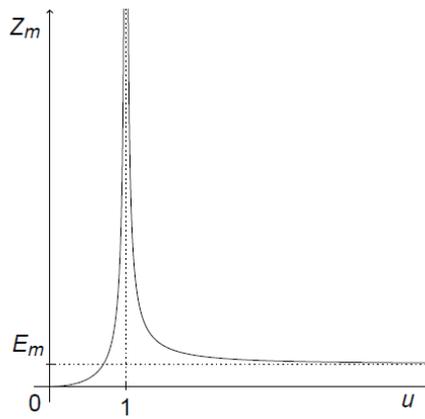


FIGURE 4 – Représentation graphique de  $Z_m(u)$ .

### Partie IV - Phénomène de Slip-Stick

(CCINP - 2020)

**Consignes :** on notera systématiquement  $N$  et  $T$  les normes des composantes normale et tangentielle de la réaction d'un support. On supposera l'appui du solide 1 uniformément réparti avec une même valeur du coefficient de frottement en tout point de la surface de contact.

Le phénomène « slip-stick » (littéralement glisser-coller) intervient quand les coefficients de frottement statique et dynamique ont des valeurs très différentes. Il s'agit d'un mouvement saccadé qui contient des phases de glissement et d'adhérence successives dont on décrit ci-dessous une modélisation.

Le solide 1 de masse  $M = 50$  mg est relié par un ressort de raideur  $k$  à un point fixe A. Il se déplace sur un tapis roulant horizontal caractérisé par un coefficient de frottement dynamique nul et par un coefficient statique  $f_s = 0,6$ . La situation est représentée figure 6. On note  $X(t)$  l'allongement instantané du ressort. Dans la situation initiale,  $X(t = 0) = X_0 > 0$  et le solide 1 est abandonné sans vitesse initiale relativement au tapis. Celui-ci se déplace à la vitesse uniforme  $V = V\vec{e}_x$ .

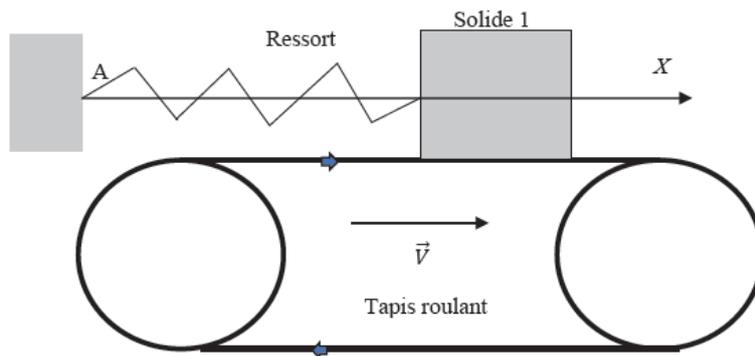


FIGURE 5 – Schéma de la situation.

**23.** Établir les expressions de l'allongement  $X_1$  puis de la date  $t_1$  associés au début de glissement du solide 1 par rapport au tapis.

**24.** Quelle est la nature du mouvement après la date  $t_1$  ? Déterminer par une méthode énergétique l'allongement maximal  $X_M$  atteint par la masse en fonction de  $X_1$ ,  $V$  et la pulsation propre de l'oscillateur  $\omega_0$ .

25. Déterminer les fonctions allongement  $X(t)$  et vitesse  $\dot{X}(t)$  pendant la phase de glissement. Pour quelle valeur de  $\dot{X}(t = t_2)$ , cette phase s'arrête-t-elle ? Représenter l'allure de  $X(t)$  et de  $\dot{X}(t)$  entre  $t = 0$  et  $t = t_1 + t_2$ .
26. À quelle condition d'inégalité entre la période propre  $\tau_0$  et  $X_1/V$  peut-on considérer que l'abscisse maximale  $X_M$  est très voisine de  $X_1$  ? On suppose cette condition vérifiée dans toute la suite de cette partie.
27. Montrer qu'alors la fréquence approchée du mouvement est donnée par :

$$\nu = \frac{\omega_0^2 V}{2g f_s}$$

Évaluer numériquement cette fréquence en supposant que la raideur vaut  $k = 4 \text{ kN.m}^{-1}$  et que la vitesse du tapis roulant vaut  $V = 6 \text{ cm.s}^{-1}$ .

28. Représenter l'allure de  $X(t)$  sur une période.
29. Ce phénomène se retrouve dans beaucoup de situations quotidiennes : craie qui crisse sur un tableau, porte qui grince, pneu qui crisse et archet de violon. Dans quel domaine de fréquences sont donc ces mouvements de "slip-stick" ? Pourquoi en cassant la craie supprime-t-on ce crissement, sachant que la raideur  $k$  d'un bâton est inversement proportionnelle au cube de sa longueur ?
30. Évaluer le travail des forces de frottement sur une période dans ce modèle. Commenter.

## Partie V - Coefficients de frottements

(CCINP - 2020)

### Lois d'Amontons-Coulomb

On note  $f_s$  et  $f_g$  les coefficients statiques et dynamiques de frottement solide entre deux matériaux et  $\vec{N}$  et  $\vec{T}$  les composantes tangentielle et normale de la réaction exercée par l'un des solides sur l'autre.

31. Définir ce qu'on appelle la vitesse de glissement  $\vec{v}_g$  d'un solide par rapport à un autre en un point de contact. Doit-on préciser dans quel référentiel elle est exprimée ?
32. Expliquer à quelle condition on passe de l'adhérence au glissement ?
33. Expliquer à quelle condition on passe du glissement à l'adhérence ?

### Mesure d'un coefficient de frottement dynamique

34. On utilise le dispositif représenté sur la figure 6. Un solide 1 de masse  $M$  est lié, par un fil inextensible et supposé sans masse, à un solide 2 de masse  $\alpha M$  ( $\alpha > 1 > f_s$ ). Le fil sans masse de longueur  $L$  passe sur la gorge d'une poulie idéale. Le solide 1 se déplace sur un support fixe  $S$  horizontal. On appelle  $H$  l'altitude du centre de masse du solide 2 au-dessus d'un support horizontal  $S'$ . À l'état initial, les solides sont tous immobiles, le solide 1 est à l'abscisse  $X(t = 0) = X_0$  et le solide 2 est à l'altitude  $H(t = 0) = H_0$ .

On veut dans cette expérience déterminer la valeur du coefficient  $f_g$  de frottement relatif au glissement entre le matériau constitutif de  $S$  et celui du solide 1. On mesure la distance  $D$  parcourue par le solide 1 sur le support  $S$ , sachant que le solide 2 touche  $S'$  avant que le solide 1 ne s'arrête.

**Consignes :** on note  $g$  l'accélération de la pesanteur. On notera systématiquement  $T$  et  $N$  les normes des composantes tangentielle et normale de la réaction du support  $S$  sur le solide 1 (figure 1), avec  $f_g$  le coefficient de frottement dynamique. On supposera l'appui du solide 1 uniformément réparti avec une même valeur du coefficient de frottement en tout point de la surface de contact.

35. Décrire qualitativement les deux phases successives du mouvement de l'ensemble en précisant pour chacune d'elles si le fil est tendu ou non tendu.

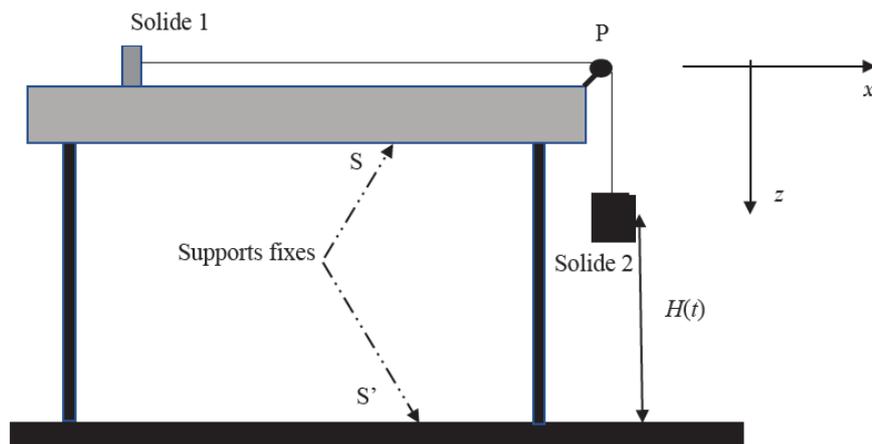


FIGURE 6 – Premier dispositif : mesure du coefficient de frottement dynamique.

- 36.** La nature « idéale » de la poulie et du fil permet de considérer que la norme  $F$  de la tension du fil est conservée tout le long du fil. En appliquant le théorème de la résultante cinétique au solide 1 et au solide 2, écrire les 3 relations qui lient  $N$ ,  $T$ ,  $F$ ,  $g$ ,  $\alpha$ ,  $M$ , l'accélération horizontale  $\ddot{X}$  du solide 1 et l'accélération verticale  $\ddot{Z}$  du solide 2.
- 37.** Traduire la loi de Coulomb pour exprimer  $\vec{T}$
- 38.** On s'intéresse à la première phase du mouvement.
- Exprimer le lien entre  $\ddot{X}$  et  $\ddot{Z}$  en le justifiant dans cette première phase.
  - Établir dans cette phase la vitesse  $\dot{X}(t)$  en fonction de  $\alpha$ ,  $f_g$  et  $g$ .
  - Quelle est la durée  $t_1$  de cette première phase ?
  - Quelle est la vitesse correspondante atteinte  $V_1$  ?
- 39.** On s'intéresse à la deuxième phase du mouvement.
- Exprimer  $X(t)$  dans cette phase en fonction de  $t$ ,  $t_1$ ,  $V_1$ ,  $X_0$ ,  $H_0$ ,  $g$  et  $f_g$ .
  - Exprimer  $f_g$  en fonction de  $\alpha$ ,  $H_0$  et  $D$ .
- 40.** Retrouver ce résultat en appliquant le théorème de l'énergie cinétique à chacune des deux phases du mouvement.
- 41.** On réalise l'expérience plusieurs fois de suite, en partant toujours de la valeur de  $H_0 = 40,0$  cm. La masse du solide 1 vaut  $M = 50$  g et celle du solide 2 vaut  $\alpha M = 60$  g. Calculer la valeur du coefficient de frottement  $f_g$  sachant qu'on a trouvé une valeur moyenne de la distance  $\langle D \rangle$  égale à 1,50 m.

## Mesure d'un coefficient de frottement statique

On pose maintenant le solide 1 sur le support  $S$  qui fait un angle  $\theta$  avec le plan horizontal. Le dispositif est représenté sur la figure 7. On fait augmenter, à partir d'une valeur faible, l'angle  $\theta$  en déplaçant lentement un coin et on mesure pour quelle valeur  $\theta = \theta_{\text{lim}}$  le solide 1 se met à glisser.

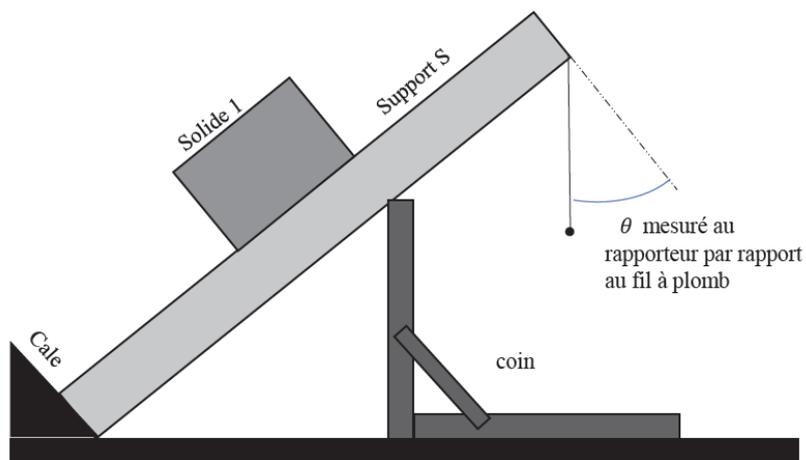


FIGURE 7 – Second dispositif : mesure du coefficient de frottement statique.

42. Montrer que cette expérience permet de mesurer le coefficient de frottement  $f_s$ .

43. On réalise plusieurs essais successifs de décrochement et la valeur moyenne de  $\theta_{\text{lim}}$  est de l'ordre de  $29,5^\circ$ . En déduire l'ordre de grandeur du coefficient de frottement mesuré.

- Fin du sujet -