

DEVOIR SURVEILLÉ N° 1

Classe MPI - Promotion 2025



Composition de Physique

Durée : 4 heures

Le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction. Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

- *Utiliser uniquement un stylo noir ou bleu foncé pour la rédaction de votre composition ; d'autres couleurs peuvent être utilisées, mais exclusivement pour les schémas et la mise en évidence des résultats.*
- *Écrire le mot FIN à la fin de votre composition.*

Les calculatrices sont autorisées.

Les différentes parties sont indépendantes.

► **Données :**

→ constantes : $R = 8,31 \text{ J}\cdot\text{mol}^{-1}\cdot\text{K}^{-1}$ $N_a = 6,022 \times 10^{23} \text{ mol}^{-1}$ $\mathcal{F} = 96\,500 \text{ C}\cdot\text{mol}^{-1}$
 $c = 3,00 \times 10^8 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$ $h = 6,63 \times 10^{-34} \text{ J}\cdot\text{s}^{-1}$ $G = 6,67 \times 10^{-11} \text{ m}^3\cdot\text{kg}^{-1}\cdot\text{s}^{-2}$

→ La planète Terre : $g = 9,81 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$

► **Formulaire :**

→ Conversion : $1 \text{ eV} = 1,602 \times 10^{-19} \text{ J}$ $T(\text{K}) = t(^{\circ}\text{C}) + 273$

Partie I - Prospection pétrolière

(CCS - 2021)

Avant d'être acheminé par oléoduc, le pétrole doit être détecté dans le sous-sol puis extrait. La méthode de prospection dite « sismique réflexion » est couramment employée. Cette technique indirecte passe par l'analyse de la propagation d'ondes sismiques dans le sol, permettant de découvrir des pièges, c'est-à-dire des structures géologiques susceptibles de contenir des hydrocarbures, tels les anticlinaux. On étudie dans cette partie une méthode de prospection complémentaire, qui consiste à détecter les variations du champ de pesanteur dues à la présence d'une nappe de pétrole dans le sous-sol. Cette technique est donc basée sur la gravimétrie.

On cherche à estimer la variation Δg du champ gravitationnel, qu'on suppose ici confondu avec le champ de pesanteur, détectée par un avion qui survole la région prospectée. Dans le premier cas, l'avion survole une étendue supposée plane et homogène. Le champ gravitationnel vaut alors $-g\vec{u}_z$. Dans le second cas, l'avion survole une zone identique à ceci près qu'une nappe de pétrole, assimilée à une couche plane homogène d'épaisseur H , est présente dans le sous-sol. Le champ de pesanteur mesuré est alors $-(g - \Delta g)\vec{u}_z$. On note ρ_s la masse volumique du sol et ρ_p celle du pétrole.

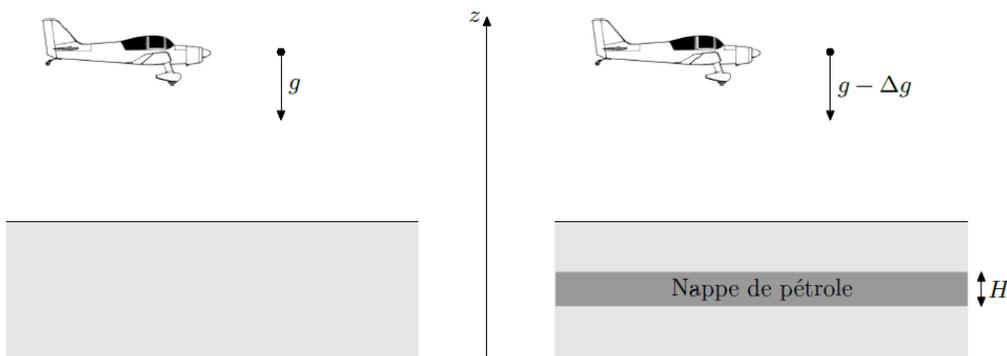


FIGURE 1 – Détection d'une nappe de pétrole

Afin d'exprimer Δg , on s'intéresse tout d'abord au calcul du champ gravitationnel \vec{g}_c créé à l'extérieur d'une couche plane homogène d'épaisseur H et de masse volumique ρ_c , supposée seule dans l'espace.

La couche plane est comprise entre les plans d'équations $z = -H/2$ et $z = +H/2$. Elle est supposée d'extension spatiale infinie selon les directions (Ox) et (Oy) (les effets de bord sont donc négligés). Le théorème de Gauss pour le champ gravitationnel \vec{g}_c s'écrit :

$$\oiint_{\Sigma} \vec{g}_c \cdot d\vec{S} = -4\pi G M_i$$

avec M_i la masse intérieure à la surface fermée Σ et $G = 6,67 \times 10^{-11}$ la constante gravitationnelle.

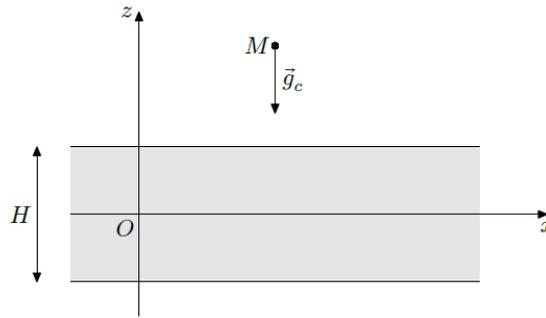


FIGURE 2 – Champ gravitationnel créé par une couche plane

1. Rappeler les expressions de la force d'interaction électrostatique \vec{F}_e subie par une charge ponctuelle q_A placée au point A de la part d'une charge ponctuelle q_B placée au point B ainsi que de la force d'attraction gravitationnelle \vec{F}_g subie par une masse ponctuelle m_A placée au point A de la part d'une masse ponctuelle m_B placée au point B .
2. En déduire par des analogies à préciser comment on passe du théorème de Gauss pour le champ électrostatique au théorème de Gauss pour le champ gravitationnel.
3. Justifier le fait que le champ gravitationnel a pour forme $\vec{g}_c = g_c(z)\vec{u}_z$.
4. Établir, en illustrant votre démonstration par une figure avec une légende explicite, que $g_c = -2\pi G\rho_c H$ dans toute la partie située au-dessus de la couche plane.
5. Exprimer l'anomalie gravitationnelle Δg en fonction de G , H , ρ_p et ρ_s . Calculer Δg . Donnée : $H = 200$ m.

Partie II - Entraînement des cosmonautes

(CCINP - 2022)

Les pilotes doivent se préparer physiquement aussi bien aux effets de forte accélération qu'à celui de l'apesanteur. On note $g_0 = 9,81 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$ l'accélération de pesanteur à la surface de la Terre. Dans la fusée, après le départ, ils subissent une accélération de $4g_0$ et dans la phase de retour dans l'atmosphère, une décélération de $-10g_0$. Remarque : cela signifie que leur poids apparent vaut respectivement $4mg_0\vec{u}$ et $-10mg_0\vec{u}$ si m est leur masse et \vec{u} le vecteur unitaire de la direction du poids apparent orienté dans le même sens que la projection du poids.

6. Définir la force poids d'une masse m sur Terre en considérant le référentiel terrestre \mathcal{R} galiléen. Définir la force d'inertie, puis le poids apparent dans un référentiel \mathcal{R}' en mouvement accéléré par rapport au référentiel terrestre (accélération notée $\vec{\gamma}_e$).

L'entraînement utilise des "centrifugeuses" en rotation uniforme autour d'un axe fixe à la vitesse angulaire ω . Il s'agit de balançoires (figure 3) qui tournent à la vitesse angulaire ω autour d'un axe horizontal Δ .

7. Définir ce qu'on appelle la force d'inertie centrifuge.
8. À quels poids apparents extrêmes sont soumis les cosmonautes en fonction de ω ?
9. On suppose que sur ces balançoires, le centre de masse du gymnaste solidaire du siège est à une distance de $r = 2$ m de l'axe de rotation horizontal. À quelle vitesse angulaire ω faut-il tourner pour obtenir un poids apparent de norme de $4mg_0$ au maximum ?
Lors d'un vol parabolique, ou vol zéro-g, (figure 4) les pilotes de l'avion effectuent une trentaine de fois une manœuvre particulière dite "manœuvre parabolique" au cours de laquelle l'état d'apesanteur est recréé à bord pendant 30 secondes.

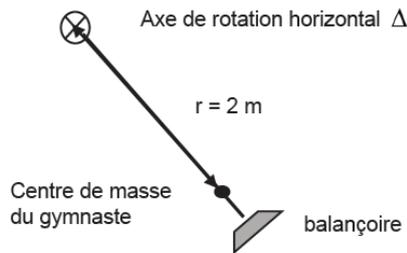


FIGURE 3 – Modélisation d’une balançoire.

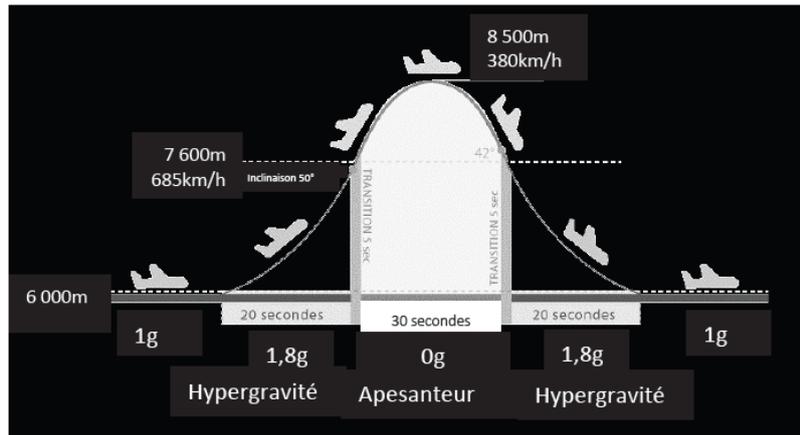


Illustration extraite du site airzerog.com/fr/

FIGURE 4 – Vol zéro-g.

10. La portion parabolique de la trajectoire de l’avion doit être confondue avec la parabole de chute libre de même sommet. Expliquer pourquoi il y a apesanteur dans cette partie de la trajectoire.

11. Vérifier la valeur de la durée de l’apesanteur à partir des caractéristiques du début du mouvement parabolique ($V_0 = 685 \text{ km}\cdot\text{h}^{-1}$, inclinaison par rapport au plan horizontal $\alpha = 50^\circ$).

Partie III - Pendule de Foucault

(ENS - 2022)

Le pendule de Foucault est un instrument historique qui a contribué à la mise en évidence de la rotation de la Terre sur elle-même. On le modélise par un fil de longueur $\ell = 67 \text{ m}$ de masse négligeable, au bout duquel est accrochée une masse $m = 36 \text{ kg}$. La Terre est supposée en mouvement de rotation uniforme à la vitesse de rotation angulaire Ω . On néglige toutes les forces de frottement dans cette partie.

Soit $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ une base fixe du référentiel géocentrique considéré galiléen (cf figure 5). La position de la masse m est donnée par ses coordonnées dans le repère $(Oxyz)$ de base $(\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$ fixe dans le référentiel terrestre. Cette base est dite *locale*. On note α l’angle entre le pendule et l’axe vertical dirigé par le vecteur \vec{e}_z (cf. figure 5(b)). On note $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta)$ la base mobile suivant le mouvement de la masse dans le référentiel terrestre.

Dans un premier temps, on néglige la force d’inertie de Coriolis.

12. Dans toute la suite on négligera la force d’inertie d’entraînement, et on considérera que le poids est parallèle à l’axe Oz . Justifier ces approximations par une analyse en ordres de grandeur.

13. Écrire l’équation vectorielle du mouvement de la masse m , puis la projeter dans la base mobile $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta)$ définie sur la figure 5(b) (on supposera son mouvement plan).

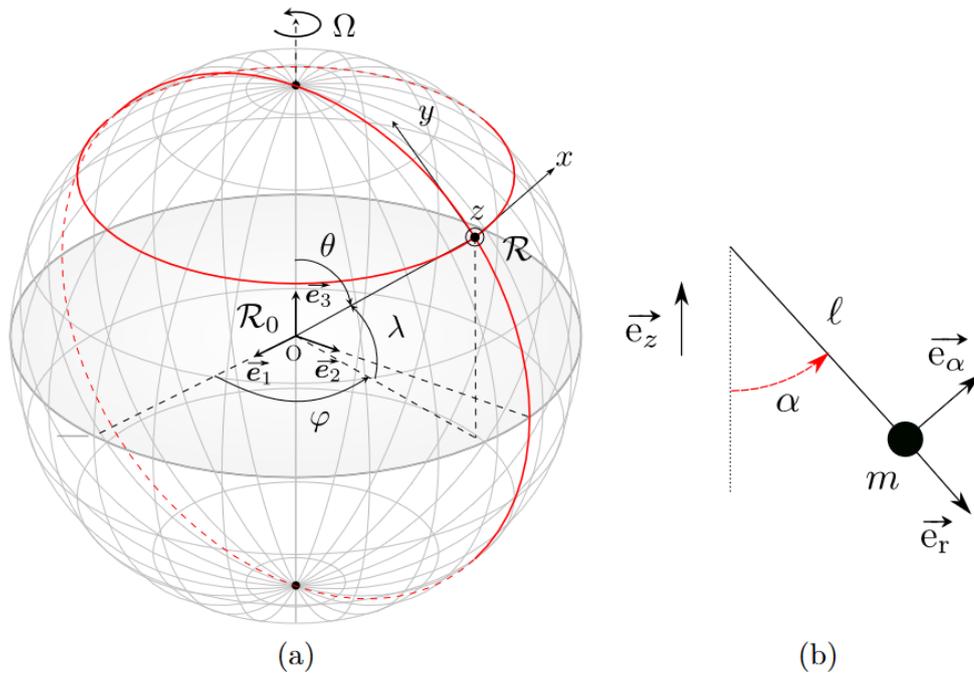


FIGURE 5 – (a) Définitions des repères liés aux référentiels géocentrique et terrestre. (b) Définition de l'angle α et de la base mobile.

14. Dans quelle limite le pendule simple peut-il être approximé par un oscillateur harmonique ? On se placera dans cette limite par la suite. Exprimer sa pulsation propre ω_0 . Déterminer la période d'oscillation du pendule et l'estimer numériquement pour le pendule de Foucault.

15. Justifier que dans l'approximation précédente le mouvement de la masse est horizontal au premier ordre en α .

On s'intéresse maintenant à la modification du mouvement engendrée par la présence de la force d'inertie de Coriolis. Paris est située à une latitude $\lambda = 49^\circ$ comme définie sur la figure figure 5(a). On considérera que le mouvement de la masse est plan dans le repère local et on négligera vitesse et accélération selon l'axe Oz . On admettra que l'effet des forces autres que la force de Coriolis se met sous la forme $\vec{F} = -m\omega_0^2 x \vec{e}_x - m\omega_0^2 y \vec{e}_y$.

16. Comparer numériquement les pulsations Ω et ω_0 .

17. Décomposer le vecteur $\vec{3}$ dans la base locale et en déduire que les équations du mouvement s'écrivent :

$$\begin{cases} \ddot{x} + \omega_0^2 x = 2\tilde{\Omega} \dot{y} \\ \ddot{y} + \omega_0^2 y = -2\tilde{\Omega} \dot{x} \end{cases}$$

Exprimer la constante $\tilde{\Omega}$.

18. Pour résoudre ce système, on pose la variable complexe $\underline{u} = x + iy$. Déterminer l'équation vérifiée par \underline{u} . Résoudre cette équation et donner l'expression de $\underline{u}(t)$ en fonction de deux inconnues \underline{A} et \underline{B} .

19. On prend $x(0) = x_0$, $y(0) = 0$ et une vitesse initiale nulle. Déterminer l'expression de \underline{u} .

20. En utilisant le système d'équations établi plus haut, simplifier l'expression de $\underline{u}(t)$. Interpréter l'expression obtenue.

21. Déterminer l'expression de l'angle ψ duquel a tourné le plan d'oscillation du pendule en 24 h à Paris dans le référentiel terrestre. L'estimer numériquement en degrés. Y a-t-il des points sur le globe où le plan d'oscillation du pendule reviendrait à sa position initiale après 24 h ?

22. Justifier brièvement les valeurs inhabituelles choisies par Foucault pour la masse m et la longueur ℓ .

23. Sur la figure 6, on voit le professeur Tournesol utiliser son pendule pour se repérer et se diriger sur Terre. Cela vous semble-t-il possible ? Justifier votre réponse.



FIGURE 6 – Le professeur Tournesol et son pendule.

Il est possible de reformuler ce résultat d'un point de vue géométrique : considérons la position \vec{R} du point d'attache du pendule dans le référentiel géocentrique. La rotation de la Terre sur elle-même conduit \vec{R} à suivre une courbe fermée γ sur le globe. Mais bien que \vec{R} soit revenu à sa valeur initiale, le système dans son ensemble n'est pas revenu à son état initial : le plan d'oscillation du pendule n'est plus le même, il a tourné à cause de la présence de la force de Coriolis. On appelle ce phénomène une non-holonomie.

Soit γ la trajectoire fermée suivie par un point de l'hémisphère nord lors de la rotation de la planète. On définit $h(\gamma)$ comme le rapport de la surface entourée par le contour γ sur la sphère terrestre et la surface totale de la sphère.

24. Faire un schéma de la situation en précisant le chemin. Exprimer $h(\gamma)$ sous la forme d'une intégrale double et la calculer en fonction de λ . Mettre le résultat sous la forme $h(\gamma) = \frac{\chi}{4\pi}$. Comparer la valeur trouvée pour χ obtenu plus haut.

Partie IV - Mécanique du transport ferroviaire

(CCS 2024)

A.) Démarrage du train de Trevithick



FIGURE 7 – La locomotive de Trevithick.

Le premier train qui sera étudié est celui de Trevithick. L'idée de Trevithick a été d'associer la roue pour le transport, à la machine à vapeur pour la force motrice. Au cours d'un essai, la locomotive de Trevithick de masse $M_\ell = 1$ t, dont la figure 7 montre une reproduction, a été capable de tracter un ensemble de dix wagons portant un chargement d'acier de masse totale $M_c = 10$ t sur une distance $D = 15$ km. Lors de cet essai en ligne droite,

conduit sur des rails en fonte horizontaux parallèles à l'axe Ox , le train parvint à atteindre la vitesse $v_0 = 8 \text{ km}\cdot\text{h}^{-1}$, supposée constante après la phase de démarrage.

On étudie ici la phase de démarrage de la locomotive tractant les dix wagons. L'étude est conduite dans le référentiel terrestre supposée galiléen. On envisage un démarrage à accélération constante, et on note \vec{a}_0 cette accélération. On définit deux systèmes :

- le système Σ_1 , de masse totale M_c , est constitué de l'ensemble des 10 wagons et de leur charge.
- le système Σ_2 correspond à la locomotive de Trevithick, de masse totale M_ℓ , et qui compte également quatre roues en acier.

On note $\vec{F}_{\Sigma_2/\Sigma_1}$ la force qu'exerce Σ_2 sur Σ_1 ; cette force est supposée horizontale.

On adopte un modèle très simpliste de contact ponctuel entre les roues et les rails et on suppose qu'aucune roue ne glisse sur les rails. On donne pour le contact acier-fonte le coefficient d'adhérence (également appelé coefficient de frottement statique) f_a . Les lois de Coulomb du frottement solide sont rappelées en annexe.

On admet qu'une étude dynamique permet d'établir, qu'en considérant les roue de masse négligeable, la force \vec{F}_{r1} exercée par les rails sur une roue du système Σ_1 est normale au rail. Par la suite, on fera cette approximation pour toutes les roues du système Σ_1 . On note également \vec{F}_{r2} la force qu'exerce le rail sur une des quatre roues de la locomotive, avec $\vec{F}_{r2} = \vec{N}_{r2} + \vec{T}_{r2}$, où \vec{N}_{r2} et \vec{T}_{r2} désignent respectivement les composantes normale et tangentielle de l'action d'un rail sur une roue de la locomotive.

25. Faire un schéma de la situation et représenter les forces qui s'exercent sur Σ_1 . Exprimer la force $\vec{F}_{\Sigma_2/\Sigma_1}$ en fonction, entre autres, de l'accélération \vec{a}_0 .

26. Faire un autre schéma où figurent les forces qui s'exercent sur Σ_2 . On négligera toute force de frottement fluide due à l'air.

27. Montrer que \vec{T}_{r2} est nécessairement non nulle. On admettra que cette force est identique sur les quatre roues de la locomotive. Exprimer \vec{T}_{r2} en fonction notamment de l'accélération \vec{a}_0 et des diverses masses introduites dans l'énoncé.

28. Calculer le temps qu'a mis le train de Trevithick à atteindre sa vitesse de croisière, en supposant que $\|\vec{T}_{r2}\| = 0,1f_a\|\vec{N}_{r2}\|$, de sorte que l'absence de glissement est assurée.

B.) Circulation des Trains à Grande Vitesse (TGV)

On s'intéresse maintenant aux voies des trains à grande vitesse, dont le tracé est déterminé par diverses contraintes. Une des contraintes essentielles est que le trajet doit être le plus horizontal possible. La morphologie des territoires traversés impose de ce fait des tracés courbes pour les trajets des trains.

B.1.) Passage en courbe

On envisage ici le problème de la jonction entre deux tronçons rectilignes A_0A et B_0B formant un angle de 120° (figure 8). On considère pour simplifier que le tracé de la voie entre les points A et B suit une portion du cercle C tangent aux deux segments de droites en A et B . On note d_{AB} la distance en ligne droite entre ces deux points. Le référentiel terrestre est toujours supposé galiléen.

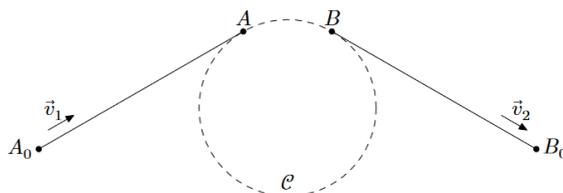


FIGURE 8 – Raccordement circulaire entre deux tronçons rectilignes.

29. Déterminer le rayon R_C du cercle \mathcal{C} en fonction des données.

30. En supposant la vitesse du train constante en norme, de valeur notée V_0 (soit $\|\vec{v}_1\| = \|\vec{v}_2\| = V_0$), tracer l'évolution de la norme de l'accélération du train, assimilé à un point matériel, entre l'instant $t = 0$ où il se trouve en A_0 et l'instant t_f où il se trouve en B_0 .

31. Calculer la valeur numérique de l'accélération a_C entre les points A et B dans le cas où $d_{AB} = 2 \text{ km}$ et $V_0 = 300 \text{ km}\cdot\text{h}^{-1}$.

Au niveau d'un tel virage, la voie présente un dévers, c'est-à-dire une différence de hauteur entre les rails intérieur et extérieur qui permet d'incliner le train. Ce dévers est conçu de sorte qu'un passager ne soit pas trop fortement déporté sur le bord de son siège au cours du virage. L'écartement entre les deux rails au niveau des roues est quant à lui fixé à $E_r = 1400 \text{ mm}$.

Lors d'un voyage en TGV, un passager curieux d'étudier ce dévers a placé un pendule simple, constitué d'une masse m_p reliée à un fil inextensible, au dos du siège situé devant lui, vers l'avant du train. Ainsi fixé, ce pendule peut se déplacer librement dans un plan vertical perpendiculaire à la vitesse du train. La figure 9 montre la position d'équilibre du pendule dans le virage indiqué sur la carte, alors que le train roule à $287 \text{ km}\cdot\text{h}^{-1}$.



FIGURE 9 – La carte permet d'estimer que le rayon de courbure du virage lors de la réalisation de l'expérience est $R_C = 4 \text{ km}$. Sur la photo à droite, le segment noir matérialise la verticale lorsque le train est à l'horizontale.

32. Estimer la valeur du dévers lors de la réalisation de cette expérience. Préciser à l'aide d'un schéma clair lequel des deux rails, intérieur ou extérieur au virage, est surélevé.

B.2.) Usure abrasive des rails sur la ligne de TGV Paris-Lyon

Pour cette sous-partie, et pour celle-ci seulement, on considère que le référentiel terrestre \mathcal{R}_t est non galiléen et que le référentiel géocentrique \mathcal{R}_g est galiléen.

33. Décrire le mouvement du référentiel terrestre \mathcal{R}_t par rapport au référentiel \mathcal{R}_g .

On considère la ligne de TGV Paris-Lyon, dont la longueur est approximativement de 500 km , et sur laquelle les trains (figure 10) roulent à la vitesse $V_0 = 300 \text{ km}\cdot\text{h}^{-1}$ par rapport au référentiel terrestre. La ligne est composée de deux voies : une servant pour le trajet de Paris vers Lyon, l'autre pour le trajet Lyon vers Paris.

On étudie par la suite un TGV allant de Paris à Lyon, sur un tronçon rectiligne horizontal, localement confondu avec une ligne méridienne nord-sud. La figure 11 schématise le contact entre les rails et les roues de ce train.

34. La prise en compte du caractère non galiléen du référentiel terrestre implique l'existence d'une force normale horizontale exercée par l'intérieur d'un des deux rails sur les roues avec lesquelles il est en contact. Identifier, en le justifiant, le rail concerné dans le cas d'un TGV circulant de Paris vers Lyon. Sur un schéma inspiré de celui de la figure 11 faire figurer les forces de contact exercées par les rails sur les roues.



FIGURE 10 – Un train de dernière génération circulant sur la ligne Paris-Lyon.

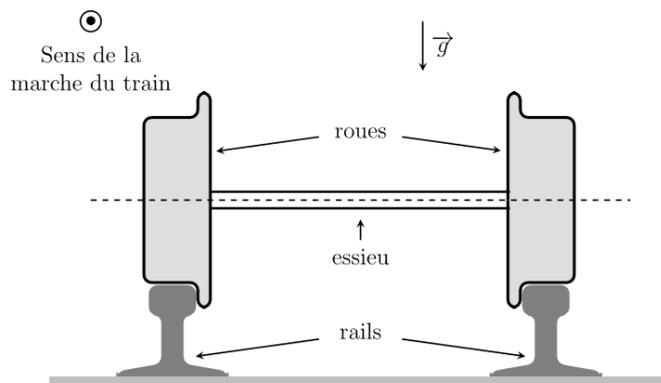


FIGURE 11 – Schéma - en coupe - du contact entre les rails et les roues du TGV (les échelles de distance ne sont pas respectées).

De nos jours, les rails sont réalisés en acier trempé très dur, afin d'en limiter l'usure. Il existe différents types d'usure des rails ; nous n'envisagerons ici que l'usure abrasive, qui a lieu à l'interface entre les roues et le rail. On note que, lorsqu'on étudie l'usure, on prend en compte le fait que le contact roue-rail n'est pas ponctuel : cela implique qu'il y a nécessairement une zone de contact glissant, même en cas d'adhérence. Diverses lois permettent de quantifier cette usure ; nous nous limiterons à la loi d'usure de Preston-Archard selon laquelle le volume de matière usée peut être calculé par la formule

$$V = k \frac{F_n}{H} d$$

où H est la dureté du matériau dont l'unité est $\text{kg}\cdot\text{m}^{-2}$, d la distance sur laquelle a eu lieu le glissement, F_n la force normale au glissement et k un coefficient, appelé coefficient d'Archard, qui dépend des conditions expérimentales, matériaux, température, géométrie, etc.

35. Discuter qualitativement la loi de Preston-Archard.

36. Déterminer la dimension du coefficient d'Archard k .

37. Pour le rail identifié plus haut, comparer le degré d'usure des faces supérieure et intérieure du rail. Préciser les approximations réalisées.

Partie V - Une roulette au casino

(Problème ouvert)

On s'intéresse à la roulette d'un casino représentée en figure 12. Une bille est lancée dans le sens contraire des aiguilles d'une montre au-dessus du numéro zéro, pour parcourir une trajectoire circulaire de 40 cm ; elle repasse par le zéro 9 fois et finit par tomber, 12,5 secondes plus tard, sur le numéro douze. Un joueur attentif a remarqué que :

- le croupier avait préalablement lancé la roulette dans le sens horaire,
- la vitesse de rotation de la roulette est presque uniforme durant le temps du jeu,
- le numéro zéro repasse devant le croupier toutes les 1,6 s.

38. Quelle est la vitesse moyenne de la bille ?

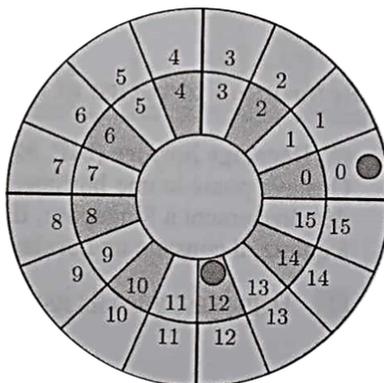


FIGURE 12 – Casino.

Partie VI - Principe d'équivalence

(Mines-Ponts 2015)

39. Qu'appelle-t-on *principe d'inertie* en mécanique ? Énoncer le principe fondamental de la mécanique dans un référentiel galiléen. La grandeur caractéristique du mobile étudié dans cette expression porte le nom de masse inerte m_i .

40. Expliciter la force de gravitation entre deux points matériels. On introduira le paramétrage nécessaire sur un schéma. La grandeur caractéristique du mobile intervenant dans cette expression porte le nom de masse pesante ou masse grave m_g .

41. Les expériences actuellement réalisées montrent que masses graves et masses inertes diffèrent de moins d'un 10^{-15} . Quelle conséquence cela entraîne sur les mouvements en chute libre ?

- Fin du sujet -