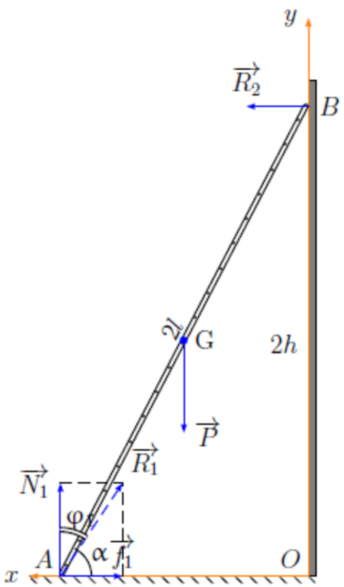
TRAVAUX DIRIGÉS
Lois de frottements solides

Les différents exercices de ce recueil sont agencés selon la progression des différents paragraphes du cours. Le niveau de difficulté approximatif est mentionné pour chacun d'eux à travers un nombre d'étoiles (★), sauf pour les exercices type résolution de problème (♧♥♤♦). La résolution d'un exercice nécessite un temps de lecture, un temps de recherche et un temps de rédaction. Aucun de ces trois ne doit être négligé. Pour favoriser votre apprentissage, il est vivement recommandé de réaliser les phases de lecture et de recherche en amont de la séance, le minimum exigé étant un schéma de situation et les lois à mettre en œuvre qui devront apparaître en regard des énoncés.

Travail préliminaire

Condition d'équilibre

Exercice n°1 - Une échelle contre un mur ★☆☆



Une échelle de masse m est adossée contre un mur. On considère le mur comme une surface parfaitement glissante et le sol comme une surface rugueuse de coefficient de frottement statique μ_s. L'échelle est immobile et inclinée d'un angle α avec l'horizontale ou encore φ avec la verticale. Les forces en jeu dans cette situation sont représentées par des vecteurs qui ont été reportés sur le schéma ci-contre.

1. Préciser le sens physique de chacune des forces puis déterminer l'angle limite $\alpha_{L,1}$ en fonction de μ_s pour lequel les frottements statiques entre le sol et l'échelle sont maximaux.
Réaliser l'application numérique pour $\mu_s = 0,3$.

On considère maintenant une personne de masse M qui souhaite grimper sur l'échelle.

$\boxed{\textbf{2.}}$ Compléter le schéma puis déterminer l'angle limite $\alpha_{L,2}$ en fonction de μ_s pour lequel la personne peut atteindre le sommet de l'échelle en toute sécurité.
Réaliser l'application numérique dans le cas où $\mu_s = 0,3$, $m = 15$ kg et $M = 75$ kg.

$\boxed{\textbf{3.}}$ Vérifier la cohérence des résultats avec ceux obtenues dans la première question en considérant des situations particulières. Commenter l'importance relative des masses de l'échelle et de la personne vis-à-vis de la stabilité de l'échelle.

Condition de glissement

Exercice n°2 - Modélisation d'une avalanche ★ ☆ ☆

On considère un bloc de neige sur un flanc de montagne que l'on assimile à un solide de masse m reposant sur un plan incliné dont la ligne de plus grande pente fait un angle α avec l'horizontale. Le contact entre la neige et le plan est caractérisé par un coefficient de frottement statique noté μ_s et un coefficient de frottement dynamique noté μ_d. On donne $g = 9,81$ m.s^{-2} l'accélération de pesanteur.

$\boxed{\textbf{1.}}$ Montrer qu'il existe un angle critique α_c tel que de bloc soit déséquilibré si $\alpha > \alpha_c$. Établir son expression en fonction de données du problème.

La masse de neige en équilibre sur une pente d'inclinaison α_c subit une légère perturbation qui lui communique une légère vitesse initiale $\overrightarrow{v_0} = v_0\,\overrightarrow{e_x}$ avec $v_0 > 0$.

$\boxed{\textbf{2.}}$ Déterminer l'évolution de la vitesse suite à cette perturbation en exprimant la fonction $v(t)$. En déduire l'évolution de son énergie cinétique que l'on notera $E_c(t)$.

L'énergie acquise entraîne la mise en mouvement de nouveaux blocs de neige, ce qui amplifie l'avalanche. Le tableau ci-après présentent des valeurs approximatives des coefficients de frottement de différents neiges.

Type de neige	μ_s	μ_d
Neige fraîche	2-10	0,3
Neige en gobelet	1,2	0,7
Neige à grain rond	1,2	0,4

$\boxed{\textbf{3.}}$ En justifiant votre réponse, identifier le type de neige conduisant aux avalanches les plus violentes.

La masse de neige arrive à l'instant t_1 dans une zone où la pente locale est plus faible et constante. Elle est animée d'une vitesse v_1 en entrant dans la zone.

4. Exprimer la condition sur l'angle α de la pente pour que le bloc de neige soit ralenti. Sous cette condition, déterminer la durée nécessaire à passer dans cette zone pour que l'avalanche cesse.

Exercice n°3 - Problème de déménageur ★☆☆

Pour modéliser la situation ci-contre, on considère un solide parallélépipédique S_1 de masse M reposant sur un sol horizontal S_2 dans un référentiel $\mathcal{R}$ muni d'un repère cartésien (O, x, y, z). Les axes du repère sont choisis pour coïncider avec les axe principaux du solide. Un opérateur cherche à maintenir le bloc en translation uniforme en exerçant sur une force de poussée $\overrightarrow{F} = F\,\overrightarrow{e_x}$. On note $\overrightarrow{R_T} = -R_T\,\overrightarrow{e_x}$ la force de frottement entre le bloc et le sol et qui s'oppose à la poussée de l'opérateur. Pour simplifier, les deux forces seront supposées agir sur la même droite d'action.

1. Expliquer en quoi l'hypothèse sur la droite d'action commune des forces de poussée et de frottement simplifie la situation et commenter sa validité.

2. Exprimer en fonction du coefficient de frottement statique μ_s la condition sur la force de poussée assurant la mise en mouvement du bloc. Commenter la dépendance de cette force vis-à-vis des différents paramètres en fonction desquels elle s'exprime.

Le bloc glisse désormais sans pivoter sur le sol.

3. Montrer que la puissance des actions de contact entre le bloc et le sol s'exprime en fonction de la force $\overrightarrow{R_T}$ et de la vitesse de glissement $\overrightarrow{V_g}$.

Un opérateur fournit un travail musculaire W pendant une durée Δt afin d'amener le bloc d'une vitesse nulle à une vitesse constante V_0.

4. Montrer que pour une durée Δt donnée, le travail à fournir par l'opérateur est d'autant plus élevé que le bloc est lourd, que le coefficient de frottement dynamique est important et que la vitesse à atteindre est importante.

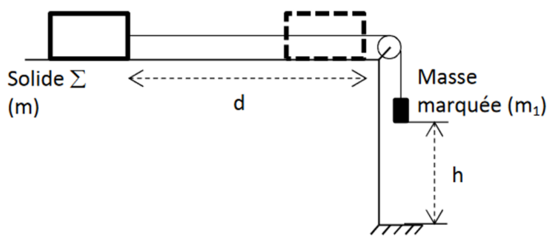
Problème ouvert - Bavardages scientifiques ♧♥♤♦

Dans la série The Big Bang Theory, Leonard et Sheldon doivent amener un lourd carton chez leur voisine en passant par la cage d'escalier. Le carton étant bien trop lourd pour eux, Leonard recommande de le pousser en profitant de l'inclinaison des escaliers qui vont réduire la force à appliquer d'environ la moitié. L'inclinaison standard d'un escalier étant de 30°, Sheldon reproche à Leonard son imprécision : la force sera réduite exactement de moitié.

▶ *Pour quelle valeur de coefficient de frottement carton/escalier Sheldon a-t-il raison ?*

Dynamique avec frottements solides

Exercice n°4 - Traction par lest (objectif expérience) ★ ★ ☆



L'expérience de la traction par lest, schématisé ci-contre, est une méthode permettant de déterminer simultanément les coefficients de frottement statique μ_s et dynamique μ_d d'un couple de matériaux. La chute du système de masse réglable m_1 sur une hauteur fixée h entraîne, via une poulie, un déplacement du solide de masse fixée m sur une distance $d > h$ à mesurer. Les coefficients se déduisent des mesures de m_1 et d.

On notera F la norme de la force de traction horizontale et F' la norme de la force de tension verticale.

1. Établir la condition de mise en glissement du solide de masse m en fonction de μ_s et m_1.

2. Montrer que $\mu_s = \dfrac{m}{m_1}$.

3. En considérant le système de masse m, exprimer la norme de son accélération a_0 en fonction de F, μ_d, m et g.

$\boxed{\textbf{4.}}$ En considérant le système de masse m_1, exprimer la norme de son accélération a_1 en fonction de F', m_1 et g.

$\boxed{\textbf{5.}}$ En considérant la poulie parfaite, donner les relations entre F et F' d'une part puis entre a_0 et a_1 d'autre part.

$\boxed{\textbf{6.}}$ En déduire une expression de a_0 en fonction de μ_d, m, m_1 et g.

$\boxed{\textbf{7.}}$ Justifier que le théorème de l'énergie cinétique appliqué au système de masse m_1 peut s'écrire :

$$W(\overrightarrow{R_T})_{0\to d} + W(m\overrightarrow{a})_{0\to h} + W(\overrightarrow{R_T})_{0\to h} = 0$$

$\boxed{\textbf{8.}}$ Montrer que $\mu_d = \left(\dfrac{m}{m_1} + \left(1 + \dfrac{m}{m_1}\right)\dfrac{d}{h}\right)^{-1}$.

$\boxed{\text{Exercice n°5}}$ - Mouvement fixe-glisse (objectif concours) ★★★

Un bloc de masse M est posé sur un plan horizontal sur une de ses faces carrées. On appelle respectivement μ_s et μ_d les coefficients de frottement statique et dynamique entre le bloc et le plan. Un ressort dde longueur au repos ℓ_0 et de raideur k est disposé parallèlement au plan horizontal et relié au bloc. Le système est initialement immobile, puis un opérateur tire sur l'extrémité libre du ressort à partir de l'instant $t = 0$ de manière à déplacer se point à une vitesse constante $\overrightarrow{u} = u\overrightarrow{e_x}$. On appelle $X(t)$ l'allongement du ressort et on introduit également $\overrightarrow{g}$ l'accélération de pesanteur.

$\boxed{\textbf{1.}}$ Justifier qu'au début de l'expérience le bloc est fixe, puis exprimer l'instant t_1 de mise en mouvement.

$\boxed{\textbf{2.}}$ Établir l'équation différentielle vérifiée par l'allongement $X(t)$. Préciser les valeurs de $X(t_1)$ et $\cot X(t_1)$. En déduire l'expression de $X(t)$.

$\boxed{\textbf{3.}}$ Préciser les valeurs de $X(t_2)$ sachant que t_2 est l'instant où le bloc s'immobilise. Montrer que $X(t_2) = (2\mu_d - \mu_s)\frac{Mg}{k}$.

$\boxed{\textbf{4.}}$ Exprimer la durée Δt pendant laquelle le bloc reste immobile.

$\boxed{\textbf{5.}}$ Représenter graphiquement l'allongement $X(t)$ et la position de la pain de l'opérateur $x_{\text{op}}(t)$. Commenter le comportement du système lorsque $k \to \infty$ puis quand $\mu_s = \mu_d$.

Problème ouvert - Accident ou infraction ? ♧♥♤♦

Un véhicule sort de route au cours d'un dépassement. Les conditions météorologiques et les caractéristiques techniques des pneumatiques permettent d'estimer à 0,5 le coefficient de frottement pneu/route.

▶ *Le véhicule était-il en excès de vitesse au début de la phase de freinage ?*

Condition de basculement

Exercice n°6 - Basculement sur un plan incliné (objectif X-ENS) ★★★

Un bloc de masse M et de dimensions $(\ell \times \ell \times h)$ est posée sur un plan horizontal sur une de ses faces carrées. On appelle μ le coefficient de frottement entre le bloc et le plan, la nature du contact se caractérisant par $\mu \in [0,1]$. Un opérateur augmente progressivement la valeur de l'angle d'inclinaison α que forme le plan incliné avec l'horizontale. On modélise le basculement éventuel du bloc par un pivotement sans glissement autour de la génératrice de contact correspondant à l'arrête la plus basse. On note I le point de l'arrête modélisant le contact, J_{I_z} le moment d'inertie du bloc par rapport cette arrète et $\overrightarrow{\omega} = -\omega\,\overrightarrow{e_z}$ le vecteur rotation instantanée du bloc autour de cette arrète ($\omega > 0$ est donc la vitesse angulaire). On introduit également $\overrightarrow{g}$ l'accélération de pesanteur.

$\boxed{\textbf{1.}}$ Réaliser un schéma soigné de la situation en faisant figurer l'ensemble des grandeurs introduites, puis introduire un repère cartésien lié au plan incliné dont l'orientation est adaptée au sens de rotation positif choisi pour la modélisation.

$\boxed{\textbf{2.}}$ En ignorant la possibilité d'un basculement, établir la condition de glissement portant sur l'angle α.

$\boxed{\textbf{3.}}$ En ignorant la possibilité d'un glissement, établir la condition de basculement portant sur l'angle α.

$\boxed{\textbf{4.}}$ Déterminer les dimensions limites d'un bloc pour qu'il puisse glisser sans basculer, et cela indépendamment de la nature du contact envisagé. Réaliser l'application numérique pour $\mu = 0,5$.