

CC INP - Physique Chimie

Proposition de correction*

Partie I - Les besoins en eau du pin maritime (ou pin des Landes)

I.1 - Mouvement d'eau dans un végétal, potentiel hydrique et analogie électrocinétique

Q1. a) La loi d'Ohm locale est

$$\vec{j} = \gamma \vec{E}$$

avec \vec{E} le champ électrique régnant dans le milieu, γ la conductivité électrique du milieu et \vec{j} la densité de courant électrique volumique du milieu.

En utilisant la relation $\vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}}V$ avec V le potentiel électrique, il vient que

$$\vec{j} = -\gamma \overrightarrow{\text{grad}}V.$$

À partir de l'équation fournie

$$\vec{j}_M = -\frac{K}{\rho_e g} \overrightarrow{\text{grad}}V$$

on note l'analogie entre \vec{j} et \vec{j}_M , **les vecteurs densités volumiques de courant électrique et de courant de masse en eau** ; V et Ψ **les potentiels électrique et hydrique**.

Les derniers termes des deux équations sont donc analogue, soit la conductivité électrique γ et la **conductivité hydraulique** $\frac{K}{\rho_e g}$.

b) On sait que l'intégrale surfacique du vecteur densité de courant volumique correspond à l'intensité du courant traversant le milieu de surface S

$$I = \iint_{(S)} \vec{j} \cdot \vec{dS}.$$

Il s'agit de l'analogie du débit massique D .

Q2. a) À partir des analogies précédentes et en utilisant la loi d'Ohm, soit

$$\Delta V = RI,$$

on peut établir une définition de la résistance hydraulique R_H par analogie avec la résistance électrique R telle que

$$\Delta \Psi = R_H D$$

ou

$$R_H = \frac{\Psi_A - \Psi_B}{D}$$

avec $\Delta \Psi = \Psi_A - \Psi_B$ la différence de potentiel hydrique permettant l'établissement d'un débit massique.

*Contact : [Erwan Capitaine](#)

b) D'après la figure 2, le potentiel hydrique a la même unité qu'une pression donc en $\text{kg} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{s}^{-2}$; le débit massique correspond à une masse d'eau traversant une surface par unité de temps donc s'exprime en $\text{kg} \cdot \text{s}^{-1}$. On peut alors obtenir l'unité de la résistance hydraulique par analyse dimensionnelle

$$[R_H] = \left[\frac{\Psi_A - \Psi_B}{D} \right]$$

$$[R_H] = \frac{\text{M} \cdot \text{L}^{-1} \cdot \text{T}^{-2}}{\text{M} \cdot \text{T}^{-1}} = \text{L}^{-1} \cdot \text{T}^{-1}.$$

La résistance hydraulique s'exprime donc en $\text{m}^{-1} \cdot \text{s}^{-1}$.

Q3. Exprimons la circulation du champ $-\overrightarrow{\text{grad}}\Psi$ d'un point S à O de la racine distants de l_r ,

$$\int_S^O -\overrightarrow{\text{grad}}\Psi \cdot \overrightarrow{dl} = \int_{\Psi_S}^{\Psi_O} d\Psi = \Psi_S - \Psi_O.$$

On peut alors utiliser l'analogie de la loi d'Ohm trouvée plus tôt

$$R_r = \frac{\Psi_S - \Psi_O}{I}$$

avec I l'intensité du courant parcourant la racine. En utilisant les expressions du champ et de l'intensité trouvées plus tôt, il vient alors que

$$R_r = \frac{\int_S^O -\overrightarrow{\text{grad}}\Psi \cdot \overrightarrow{dl}}{\iint_{(s_r)} \overrightarrow{j}_M \cdot \overrightarrow{dS}} = \frac{\int_S^O \frac{1}{\gamma_r} \overrightarrow{j}_M \cdot \overrightarrow{dl}}{\iint_{(s_r)} \overrightarrow{j}_M \cdot \overrightarrow{dS}}$$

En considérant que la densité de courant est homogène tout le long de la racine, il vient que

$$R_r = \frac{j_M l_r}{\gamma_r j_M s_r} = \frac{l_r}{\gamma_r s_r}.$$

On constate que les racines sont connectées en parallèle, ainsi en utilisant la loi d'association des résistances en parallèles il vient que

$$R_N = \frac{1}{\sum_i^N \frac{1}{R_r}} = \frac{R_r}{N} = \frac{l_r}{N \gamma_r s_r}$$

si les racines ont toutes la même longueur, la même surface et la même conductivité hydraulique.

Q4. La figure 2 nous présente des systèmes connectés les uns aux autres en série avec des valeurs de potentiel hydrique spécifiques, on peut donc réaliser le schéma électrique équivalent suivant

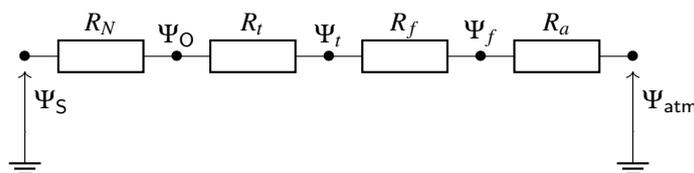


Schéma électrique.

Q5. D'après le schéma précédent, la résistance équivalente du pin R_p est telle que

$$R_p = R_N + R_t + R_f.$$

D'après l'analogie de la loi d'Ohm, le débit massique D doit donc être

$$D = \frac{\Psi_S - \Psi_f}{R_p}$$

avec Ψ_S le potentiel hydrique au niveau du sol et Ψ_f le potentiel hydrique au niveau des aiguilles à son sommet.

On peut alors obtenir la valeur de R_a , toujours à partir de la loi d'Ohm, soit

$$R_a = \frac{\Psi_f - \Psi_{\text{atm}}}{D} = R_p \frac{\Psi_f - \Psi_{\text{atm}}}{\Psi_S - \Psi_f}$$

A.N.

$$R_a = 1,0 \times 10^9 \text{ m}^{-1} \cdot \text{s}^{-1} \times \frac{-1,5 \text{ MPa} + 100 \text{ MPa}}{-0,05 \text{ MPa} + 1,5 \text{ MPa}} = 69 \times 10^9 \text{ m}^{-1} \cdot \text{s}^{-1}$$

- Q6. En calculant le débit massique D à partir de la différence de potentiels hydriques et de la résistance globale $R_p + R_a$, tel que

$$D = \frac{\Psi_S - \Psi_{\text{atm}}}{R_p + R_a}$$

nous pouvons obtenir la masse évapo-transpirée m par un pin adulte pendant un jour d'été en multipliant le débit massique D par la durée d'exposition solaire en seconde Δt , soit

$$m = D \times \Delta t = \Delta t \frac{\Psi_S - \Psi_{\text{atm}}}{R_p + R_a}$$

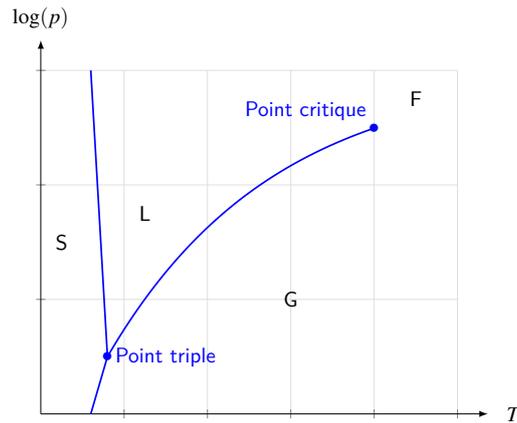
A.N.

$$D = 12 \times 3600 \text{ s} \times \frac{-0,05 \times 10^6 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{s}^{-2} + 100 \times 10^6 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{s}^{-2}}{1,0 \times 10^9 \text{ m}^{-1} \cdot \text{s}^{-1} + 69 \times 10^9 \text{ m}^{-1} \cdot \text{s}^{-1}} = 62 \text{ kg}$$

- Q7. D'après nos calculs, un hectare de pins, soit 300 pins, évapo-transpire près de 20 tonnes d'eau par jour ($62 \times 300 = 18600 \approx 20000$), soit **une valeur en accord les résultats du C.N.P.F** compris entre 15 et 25 tonnes.

Partie II - Gemmage en forêt landaise et distillation de la résine de pin

- Q8. On peut distinguer sur le diagramme de phases (p, T) de l'eau, **le point triple**, point de coexistence des trois phases, et **le point critique**, point à partir duquel les phases liquide et vapeur ne sont plus discernables et font place à la phase fluide.

Diagramme (p, T) de l'eau.

- Q9. La teneur limite à ne pas dépasser est de 5 g de pinène par mètre cube d'air. Calculons la teneur de pinène par mètre cube d'air dans le cas où le pinène se trouverait à l'équilibre de vaporisation, car élément majoritaire de l'essence de térébenthine se trouvant à l'équilibre de vaporisation.

Dans ce cas, la pression partielle du pinène est égale à sa pression de vapeur saturante $P = P_{\text{sat}}$.

En considérant la vapeur de pinène comme un gaz parfait, il vient que

$$PV = nRT$$

$$P_{\text{sat}} = \frac{n}{V}RT = \frac{m}{MV}RT$$

soit

$$m = \frac{P_{\text{sat}}MV}{RT}$$

A.N. Pour $V = 1 \text{ m}^3$ il vient que

$$m = \frac{430 \text{ Pa} \times (10 \times 12 \times 10^{-3} \text{ kg} \cdot \text{mol}^{-1} + 16 \times 1 \times 10^{-3} \text{ kg} \cdot \text{mol}^{-1}) \times 1 \text{ m}^3}{8,31 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1} \times 293 \text{ K}} = 24 \text{ g.}$$

Il est donc très dangereux de travailler dans un local à 20 °C dans lequel se trouverait de l'essence de térébenthine se trouvant à l'équilibre de vaporisation.

- Q10. La lecture du diagramme PT, notamment l'exploitation de la courbe de vapeur saturante du pinène pur $p_p(T)$, nous permettent de déterminer la température d'ébullition du pinène pur à la pression $P^o = 1 \text{ bar}$. **On trouve** $T_{\text{eb,p}}(P^o) = 430 \text{ K}$.
- Q11. Les pressions partielles de l'eau et du pinène en phase vapeur étant égales à leur pression de vapeur saturante pure, il suffit de trouver la température pour laquelle la somme des deux courbes de vapeur saturante $p_e(T) + p_p(T)$ est égale à P^o . **On trouve** $T_{\text{eb,m}} \approx 368 \text{ K}$.
- Q12. La somme des pressions partielles $p_e(T_{\text{eb,m}}) + p_p(T_{\text{eb,m}})$ étant égales à la pression totale P^o , il suffit de lire $p_e(T_{\text{eb,m}})$ et $p_p(T_{\text{eb,m}})$, soit ici

$$p_e(T_{\text{eb,m}}) = 0,85 \text{ bar} \quad \text{et} \quad p_p(T_{\text{eb,m}}) = 0,15 \text{ bar.}$$

Q13. En considérant que nous avons affaire à un mélange de gaz parfaits, il vient que

$$P_{\text{sat},p}V = n_pRT \quad \text{soit} \quad p_p(T_{\text{eb},m})V = \frac{m_p}{M_p}RT$$

$$P_{\text{sat},e}V = n_eRT \quad \text{soit} \quad p_e(T_{\text{eb},m})V = \frac{m_e}{M_e}RT.$$

En divisant les deux relations précédentes, il vient que

$$\frac{p_p(T_{\text{eb},m})}{p_e(T_{\text{eb},m})} = \frac{m_p M_e}{m_e M_p}$$

soit

$$m_e = m_p \frac{M_e p_e(T_{\text{eb},m})}{M_p p_p(T_{\text{eb},m})}.$$

A.N.

$$m_e = 1 \text{ kg} \times \frac{2 \times 1 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1} + 16 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}}{10 \times 12 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1} + 16 \times 1 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}} \times \frac{0,85 \text{ bar}}{0,15 \text{ bar}} = 0,75 \text{ kg}.$$

Partie III - La marche du berger landais sur ses échasses

III.1 - Étude de la phase d'oscillation gauche

Q14. Dans le référentiel du buste supposé galiléen, le théorème du moment cinétique appliqué à la jambe gauche durant la phase d'oscillation gauche est

$$J_F \ddot{\theta} = \sum_i \mathcal{M}_F(\vec{F}_i).$$

En considérant que la liaison pivot est idéale, le seul moment de force impliqué est le moment du poids de la jambe par rapport à l'axe de son pivot fémoral, soit

$$J_F \ddot{\theta} = (\overrightarrow{F_g G_{jg}} \wedge \vec{P}) \cdot (-\vec{u}_y)$$

avec $-\vec{u}_y$ la direction de l'axe de rotation F_g donné par l'orientation de θ et la règle de la main droite.

Ainsi, si on définit la base cylindro-polaire attachée à G_{jg} le centre de gravité de la jambe droite, de vecteurs unitaires \vec{u}_ρ , \vec{u}_θ et \vec{u}_y , ce dernier étant identique à celui de la base cartésienne fournie, il vient que

$$J_F \ddot{\theta} = (\Delta \vec{u}_\rho \wedge (m_j g \cos \theta \vec{u}_\rho + m_j g \vec{u}_\theta \sin \theta)) \cdot (-\vec{u}_y)$$

$$= -m_j g \Delta \sin \theta.$$

L'équation différentielle vérifiée par $\theta(t)$ est donc

$$\ddot{\theta} = -\frac{m_j g \Delta}{J_F} \sin \theta$$

Q15. Dans l'approximation des petits angles il vient que

$$\ddot{\theta} \approx -\frac{m_j g \Delta}{J_F} \theta.$$

On reconnaît l'équation différentielle d'un oscillateur harmonique de pulsation propre

$$\omega_{os} = \sqrt{\frac{m_j g \Delta}{J_F}}$$

La période propre T_{os} correspond à deux fois la durée de la phase d'oscillation τ_{os} , soit

$$\tau_{os} = \frac{T_{os}}{2} = \frac{2\pi}{2\omega_{os}}$$

donc

$$\tau_{os} = \pi \sqrt{\frac{J_F}{m_j g \Delta}}$$

III.2 - Étude de la phase de double contact

Q16. On peut mener l'étude de variation de l'énergie mécanique sur chacun des sous système de (Σ) .

- Pour le buste, la variation d'énergie mécanique est telle que

$$\begin{aligned} \Delta \mathcal{E}(b) &= \Delta \mathcal{E}_c(b) + \Delta \mathcal{E}_p(b) \\ &= \frac{1}{2} m_b (V^2(\tau_{dc}) - V^2(0)) + m_b g (z(\tau_{dc}) - z(0)) \end{aligned}$$

or $V(0) = V(\tau_{dc}) = V_{dc}$, et $z(\tau_{dc}) - z(0) = h$, donc

$$\Delta \mathcal{E}(b) = m_b g h.$$

- D'après la description de la phase de double contact "durant cette phase [...] l'énergie cinétique des deux jambes augmente". D'après l'énoncé, cette variation sera considérée égale pour les deux jambes. N'ayant pas d'information quant à la variation d'énergie cinétique de la jambe gauche, on utilise celle de la jambe droite, dont la vitesse est connue au cours de cette phase. Ainsi, la variation d'énergie mécanique des de la jambe droite est telle que

$$\begin{aligned} \Delta \mathcal{E}(j_d) &= \Delta \mathcal{E}_c(b) + \Delta \mathcal{E}_p(b) \\ &= \frac{1}{2} J_O (\Omega^2(\tau_{dc}) - \Omega^2(0)) + \Delta \mathcal{E}_p(b) \end{aligned}$$

comme la variation d'énergie potentielle des jambes est négligée, et que la vitesse angulaire Γ de la jambe droite est nulle à l'instant initial, il vient que

$$\Delta \mathcal{E}(b) = \frac{1}{2} J_O \Omega^2(\tau_{dc}).$$

Ainsi la variation d'énergie mécanique de l'ensemble du système (Σ) est tel que

$$\Delta \mathcal{E} = \Delta \mathcal{E}(b) + 2\Delta \mathcal{E}(j_d) = m_b g h + J_O \Omega^2(\tau_{dc}).$$

III.3 - Coût énergétique et pas optimal de la marche ordinaire

Q17. Il s'agit du théorème de la puissance mécanique

$$\frac{d\mathcal{E}}{dt} = \sum_i \mathcal{P}(\vec{F}_i)$$

dans un référentiel galiléen, la variation de l'énergie mécanique d'un système est égale à la somme des puissances des forces qui lui sont appliquées.

Q18. On utilise l'expressions de $\Delta\mathcal{E}$ obtenue plus tôt, on peut réexprimer la puissance fournie par les muscles

$$\mathcal{P} = \frac{\Delta\mathcal{E}}{\tau_{dc}} = \frac{J_O\Omega^2(\tau_{dc})}{\tau_{dc}} + \frac{m_bgh}{\tau_{dc}}.$$

En réexprimant la durée de la phase de double contact τ_{dc} en fonction du pas p et de la vitesse du buste V_{dc} , soit $\tau_{dc} = \frac{p}{V_{dc}}$, il vient que

$$\mathcal{P} = \frac{J_O\Omega^2(\tau_{dc})}{p}V_{dc} + \frac{m_bgh}{p}V_{dc}.$$

En réexprimant h la variation d'altitude du point G_b en fonction du pas p et de la longueur d'une jambe l_j , soit $h = \frac{p^2}{l_j}$, il vient que

$$\mathcal{P} = \frac{J_O\Omega^2(\tau_{dc})}{p}V_{dc} + \frac{m_bgp^2}{2l_jp}V_{dc} = \frac{J_O\Omega^2(\tau_{dc})}{p}V_{dc} + \frac{m_bgp}{2l_j}V_{dc}.$$

Enfin, en considérant la vitesse angulaire de la jambe droite à l'instant final de la phase de double contact égale à la pulsation de l'oscillation de la jambe gauche, soit $\Omega(\tau_{dc}) = \omega_{os} = \sqrt{\frac{m_jg\Delta}{J_F}}$, il vient que

$$\mathcal{P} = \frac{J_Om_jg\Delta}{J_Fp}V_{dc} + \frac{m_bgp}{2l_j}V_{dc}$$

soit

$$\mathcal{P} = \left(\frac{J_Om_j\Delta}{J_Fp} + \frac{m_bp}{2l_j} \right) gV_{dc}.$$

Q19. L'extremum de la puissance en fonction du pas p est atteint pour

$$\frac{d\mathcal{P}}{dp} = 0.$$

Recherchons cet extremum et vérifions qu'il s'agit d'un minimum. soit

$$\frac{d\mathcal{P}}{dp} = \left(-\frac{J_Om_j\Delta}{J_Fp_{ext}^2} + \frac{m_b}{2l_j} \right) gV_{dc}.$$

L'extremum de puissance est atteint pour

$$-\frac{J_Om_j\Delta}{J_Fp_{ext}^2} + \frac{m_b}{2l_j} = 0 \quad \text{soit} \quad p_{ext} = \sqrt{\frac{2J_Om_j\Delta l_j}{J_Fm_b}}.$$

La courbure de $\mathcal{P}(p)$ est donnée par sa dérivée seconde par rapport à p , soit

$$\frac{d^2\mathcal{P}}{dp^2} = \frac{2J_Om_j\Delta}{J_Fp^3}gV_{dc}.$$

La dérivée seconde étant toujours positive, la fonction $\mathcal{P}(p)$ est convexe, et $\mathcal{P}(p_{ext})$ correspond bien à un minimum, soit

$$p_{opt} = \sqrt{\frac{2J_Om_j\Delta l_j}{J_Fm_b}}.$$

Q20. Pour une jambe à répartition de masse uniforme il vient que

$$p_{opt} = \sqrt{\frac{2J_Om_jl_j^2}{2J_Om_b}} = l_j\sqrt{\frac{m_j}{m_b}}.$$

A.N.

$$p_{\text{opt}} = 1 \text{ m} \times \sqrt{\frac{10 \text{ kg}}{60 \text{ kg}}} = 0,4 \text{ m}.$$

Cette valeur est cohérente avec le pas d'une marche tranquille.

III.4 - Pas optimal avec des échasses

- Q21. a)
 - Le moment d'inertie J_E^* de la jambe équivalente est **différent** de celui de la jambe normale J_O : la distance entre l'axe de rotation Ey et la partie massive de la jambe équivalente (les vraies jambes) est plus grande que la distance entre l'axe de rotation Oy et les vraies jambes, donc $J_E^* > J_O$.
 - La masse m_j des jambes est inchangée car les échasses sont de masses négligeables.
 - La distance Δ entre le pivot fémoral et les centres de masse des jambes est inchangée car les échasses sont de masses négligeables.
 - La longueur $l^* + l_j$ correspondant à la longueur de la jambe équivalente est **différente** de celle de la jambe normale l_j : $l^* + l_j > l_j$.
 - Le moment d'inertie J_F de la jambe équivalente est identique à celui de la jambe normale : on n'augmente pas la distance entre l'axe de rotation Fy et la partie massive de la jambe équivalente (les vraies jambes).
 - La masse du buste m_b est inchangée.

b) L'expression du pas optimal, ou pas minimisant la puissance à fournir par les muscles dans le cas de la jambe avec échasse est donc

$$p_{\text{opt}}^* = \sqrt{\frac{2J_E^* m_j \Delta (l_j + l^*)}{J_F m_b}}.$$

Le rapport entre les deux pas optimaux est

$$\frac{p_{\text{opt}}^*}{p_{\text{opt}}} = \sqrt{\frac{2J_E^* m_j \Delta (l_j + l^*)}{J_F m_b} \frac{J_F m_b}{2J_O m_j \Delta l_j}}$$

soit

$$\frac{p_{\text{opt}}^*}{p_{\text{opt}}} = \sqrt{\frac{J_E^*}{J_O} \left(1 + \frac{l^*}{l_j}\right)}.$$

- Q22. a) On utilise l'expression précédente et on exprime les moments d'inertie à partir des formules données dans le tableau, soit

$$\frac{p_{\text{opt}}^*}{p_{\text{opt}}} = \sqrt{\frac{J_E^* l^*}{J_O l_j}}$$

soit

$$\frac{p_{\text{opt}}^*}{p_{\text{opt}}} = \sqrt{\left(1 + \frac{l^*}{l_j}\right) \left(1 + 3\frac{l^*}{l_j} + 3\left(\frac{l^*}{l_j}\right)^2\right)}.$$

- b) Pour $l_j = l^* = 1 \text{ m}$, il vient que

A.N.

$$\frac{p_{\text{opt}}^*}{p_{\text{opt}}} = \sqrt{2(1 + 3 + 3)} = 3,7.$$

c) On a montré que la durée de la phase oscillante était telle que

$$\tau_{os} = \pi \sqrt{\frac{J_F}{m_j g \Delta}}$$

Or nous avons aussi démontré que les grandeurs impliquées dans l'expression de cette durée ne changeaient pas dans le cas de la marche avec échasse. **Donc, la durée de la phase oscillante est inchangée avec les échasses.**

d) D'après le résultat des études statistiques nous pouvons récrire le rapport entre les deux vitesses de déplacement. Il vient que

$$\frac{V^*}{V} = \frac{p_{opt}^* \omega_{os}}{p_{opt} \omega_{os}}$$

Or comme nous avons établi que les durées de la phase oscillante étaient égales, donc les pulsations ω_{os} également, le rapport des vitesses se réduit au rapport des pas optimaux, soit

$$\frac{V^*}{V} = \frac{p_{opt}^*}{p_{opt}}$$

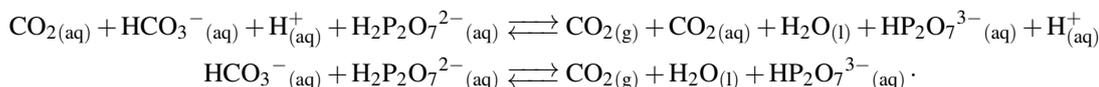
Or on a vu que dans le cas d'échasse d'une longueur de 1 m, un adulte voyait augmenter son pas d'un facteur proche de 4. **On peut donc bien qualifier cette pratique de "marche augmentée".**

Partie IV - La préparation du pastis landais

Q23. En utilisant les équations décrivant les différents équilibres



en se rend compte que l'équation (1) correspond à (4) – (2) – (3)



Ainsi la constante d'équilibre est, en utilisant la loi d'action des masses

$$K = \frac{K_{a1}}{K_{a3} K_S}$$

A.N.

$$K = \frac{10^{-6,7}}{10^{-6,3} \times 2,8 \times 10^{-2}} = 14.$$

Q24. La stœchiométrie de la réaction est assurée si

$$\frac{n(\text{H}_2\text{P}_2\text{O}_7^{2-}(\text{aq}))}{1} = \frac{n(\text{HCO}_3^-(\text{aq}))}{1}$$

soit lorsque les quantités de matières des deux réactifs sont égales. Ainsi pour assurer la stœchiométrie les quantités de matières de diphosphate disodique et de bicarbonate de sodium doivent être égales, soit

$$\begin{aligned} n(\text{Na}_2\text{H}_2\text{P}_2\text{O}_7) &= n(\text{NaHCO}_3) \\ \frac{m_d}{M(\text{Na}_2\text{H}_2\text{P}_2\text{O}_7)} &= \frac{m_b}{M(\text{NaHCO}_3)} \\ m_d &= m_b \frac{M(\text{Na}_2\text{H}_2\text{P}_2\text{O}_7)}{M(\text{NaHCO}_3)}. \end{aligned}$$

On sait que la masse totale du sachet m est de 15 g et que la masse d'amidon, m_a , est de 4 g, ainsi il vient que

$$m = m_a + m_d + m_b$$

$$m = m_a + m_b \left(1 + \frac{M(\text{Na}_2\text{H}_2\text{P}_2\text{O}_7)}{M(\text{NaHCO}_3)} \right)$$

donc

$$m_b = \frac{m - m_a}{1 + \frac{M(\text{Na}_2\text{H}_2\text{P}_2\text{O}_7)}{M(\text{NaHCO}_3)}} \quad \text{et} \quad m_b = \frac{m - m_a}{1 + \frac{M(\text{NaHCO}_3)}{M(\text{Na}_2\text{H}_2\text{P}_2\text{O}_7)}}.$$

A.N.

$$m_b = \frac{15 \text{ g} - 4 \text{ g}}{1 + \frac{2 \times 23 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1} + 2 \times 1 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1} + 2 \times 31 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1} + 7 \times 16 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}}{2 \times 23 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1} + 1 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1} + 12 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1} + 3 \times 16 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}}} = 3,1 \text{ g}.$$

$$m_d = \frac{15 \text{ g} - 4 \text{ g}}{1 + \frac{2 \times 23 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1} + 1 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1} + 12 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1} + 3 \times 16 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}}{2 \times 23 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1} + 2 \times 1 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1} + 2 \times 31 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1} + 7 \times 16 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}}} = 7,9 \text{ g}.$$

On a bien $m_a + m_b + m_d = 15 \text{ g}$.

Q25. Si la réaction est totale, la quantité de matière n de $\text{CO}_2(\text{g})$ produit est

$$n = n(\text{NaHCO}_3) = \frac{m_b}{M(\text{NaHCO}_3)}.$$

En assimilant le $\text{CO}_2(\text{g})$ à un gaz parfait, il vient que

$$PV = nRT$$

soit

$$V = \frac{m_b RT}{M(\text{NaHCO}_3) P}$$

A.N.

$$V = \frac{3,1 \text{ g} \times 8,31 \text{ J} \cdot \text{K} \cdot \text{mol}^{-1} \times 443 \text{ K}}{(2 \times 23 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1} + 1 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1} + 12 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1} + 3 \times 16 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}) \times 1 \times 10^5 \text{ Pa}} = 1,3 \text{ L}.$$

Q26. a) Les courbes 4 et 5 correspondent respectivement aux espèces HO^- et H_3O^+ (on remarquera que les courbes se croisent au $\text{pH} = 7$).

Les courbes 1, 2 et 3 correspondent respectivement aux espèces $\text{H}_2\text{P}_2\text{O}_7^{2-}$, $\text{HP}_2\text{O}_7^{3-}$ et $\text{P}_2\text{O}_7^{4-}$. La prédominance de l'espèce acide des couples nous permet de déterminer ces courbes.

b) Comme on souhaite utiliser l'ion dihydrogénodiphosphate pour réduire le caractère basique de l'ion carbonate, il faut utiliser à une concentration correspondant à son domaine de prédominance. Ici on constate que cela correspond à

$$\log \left(\frac{C_p}{1 \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}} \right) \approx -0,5$$

soit

$$C_p = 10^{-0,5} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1} = 0,3 \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}.$$

- c) Les abscisses des points P et Q correspondent respectivement au pKa des couples acido-basiques $\text{H}_2\text{P}_2\text{O}_7^{2-}/\text{HP}_2\text{O}_7^{3-}$ et $\text{HP}_2\text{O}_7^{3-}/\text{P}_2\text{O}_7^{4-}$. En effet pour ces points, les espèces ont la même concentration donc

$$\text{pH} = \text{pKa} + \log\left(\frac{[\text{A}^-]}{[\text{AH}]}\right) = \text{pKa}.$$

Q27. D'après lecture de la figure, on voit que le dihydrogénodiphosphate et le diphosphate partagent la même concentration pour un pH **unique de 8**.

(Ce qui correspond bien au résultat obtenu avec la formule du pH dans le cas d'une espèce amphotère : $\text{pH} = \frac{1}{2}(\text{pKa}_1 + \text{pKa}_3) = \frac{6,7+9,3}{2} = 8$).

Partie V - Système d'arrosage automatique d'un green de golf

Q28. La porte NAND est donnée, pour deux entrées A et B par la formule $1 - A \times B$, ce qui correspond à la table de vérité ci-dessous.

A	B	S
0	0	1
1	0	1
0	1	1
1	1	0

Lorsque les deux entrées sont reliées entre elles, soit lorsque $A = B$, la table de vérité devient

A	S
0	1
1	0

on reconnaît alors **une porte NOT** ou un inverseur.

Q29. La résistance d'entrée des portes logiques étant infinie, c'est la même intensité i qui traverse la résistance et le condensateur, soit

$$Ri = RC \frac{du_c}{dt}.$$

En utilisant la loi des mailles sur la maille du bas de l'étage 1, il vient que

$$u_1 - u = u_R + u_C$$

soit

$$u_1 - u = RC \frac{du_c}{dt} + u_c.$$

On identifie le temps caractéristique $\tau = RC$.

Q30. a) Dans le cas où $u_1 = V_a$, la porte NOT du bas impose une tension $u = 0$, donc $u(t = 0^+)$ et l'équation précédente devient alors

$$V_a = \tau \frac{du_c}{dt} + u_c.$$

La résolution de cette équation différentielle donnée

$$u_c(t) = V_a \left(1 - e^{-t/\tau}\right).$$

Comme $u_2(t) = u_c(t) + u$, il vient que

$$u_2(t) = u_c(t) = V_a \left(1 - e^{-t/\tau}\right).$$

- b) Ces expressions ne sont plus valides lorsque $u_1 < V_b$, ce qui se produit lorsque la tension à l'entrée de la deuxième porte NOT dépasse V_b , soit lorsque $u_2 > V_b$. On peut obtenir l'instant t_b , instant où $u_2 = V_b$, à partir des relations précédentes, soit

$$V_b = V_a \left(1 - e^{-t_b/\tau} \right)$$

donc

$$t_b = -\tau \ln \left(1 - \frac{V_b}{V_a} \right).$$

Les tensions u_c et u_2 évoluent de $t = 0$ à $t = t_b$ de la même manière : de 0 à V_b .

- Q31. a) Dans ce cas $u_1 = 0$ et $u = V_a$, donc

$$\tau \frac{du_c}{dt} + u_c = -V_a.$$

- b) La résolution de l'équation différentielle précédente donne

$$u_c(t) = -V_a + Ae^{-t/\tau}$$

avec A une constante à déterminer. La tension aux bornes d'un condensateur étant continue $u_c(t_b) = u_2(t_b) = V_b$. Ainsi

$$u_c(t_b) = -V_a + Ae^{-t_b/\tau} = V_b$$

donc

$$A = (V_b + V_a) e^{t_b/\tau}.$$

Ainsi

$$u_c(t) = -V_a + (V_b + V_a) e^{-(t-t_b)/\tau}.$$

On obtient alors $u_2 = u_c + u$ qui est telle que

$$u_2 = -V_a + (V_b + V_a) e^{-(t-t_b)/\tau} + V_a = (V_b - V_a) e^{-(t-t_b)/\tau}$$

soit

$$u_2 = (V_b + V_a) e^{-(t-t_b)/\tau}.$$

- c) L'instant t'_b de fin de validité correspond à l'instant pour lequel u_2 repassera sous la tension de basculement, soit pour $u_2 = V_b$, donc

$$V_b = (V_b + V_a) e^{-(t'_b - t_b)/\tau}$$

donc

$$t'_b - t_b = \tau \ln \left(1 + \frac{V_a}{V_b} \right).$$

Les tensions u_c et u_2 évoluent de $t = t_b$ à $t = t'_b$ respectivement de V_b à $V_b - V_a$ et de $V_b + V_a$ à V_b .

Q32. a) Dans ce cas on revient au premier cas traité, soit $u_1 = V_a$, $u = 0$ et l'équation à utiliser est

$$V_a = \tau \frac{du_c}{dt} + u_c.$$

La tension aux bornes du condensateur est de la forme

$$u_c = V_a + Be^{-t/\tau}$$

avec B une constante d'intégration à déterminer à partir de la condition initiale sur u_c . Ici $u_c(t'_b) = u_2(t'_b) - u = V_b - V_a$, donc

$$V_b - V_a = V_a + Be^{-t'_b/\tau}$$

donc

$$B = (V_b - 2V_a) e^{t'_b/\tau}$$

donc

$$u_c(t) = u_2(t) = V_a + (V_b - 2V_a) e^{-(t-t'_b)/\tau}.$$

b) L'instant t''_b de fin de validité correspond à l'instant pour lequel u_2 repassera au dessus la tension de basculement, soit pour $u_2 = V_b$, donc

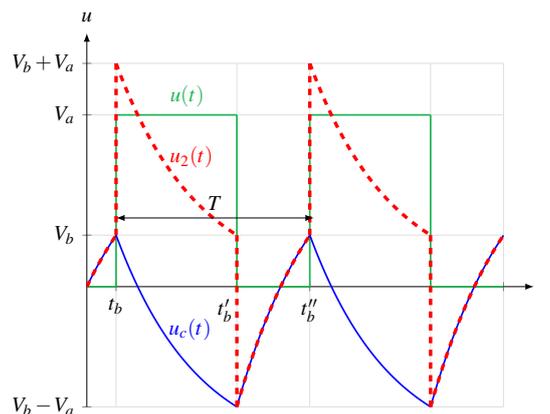
$$V_b = V_a + (V_b - 2V_a) e^{-(t''_b-t'_b)/\tau}$$

donc

$$t''_b - t'_b = \tau \ln \left(\frac{V_b - 2V_a}{V_b - V_a} \right).$$

Les tensions u_c et u_2 évoluent de $t = t'_b$ à $t = t''_b$ de la même manière : $V_b - V_a$ à V_b .

Q33. On peut réaliser le tracé ci-dessous.



Chronogrammes de $u(t)$, $u_c(t)$ et $u_2(t)$.

Q34. a) D'après les chronogrammes nous pouvons déduire que la période des signaux est $T = t''_b - t_b$.

b) Il vient que

$$T = t''_b - t'_b + t'_b - t_b = \tau \ln \left(\frac{V_b - 2V_a}{V_b - V_a} \right) + \tau \ln \left(1 + \frac{V_a}{V_b} \right)$$

soit

$$T = \tau \ln \left(\frac{(V_b - 2V_a)(V_b + V_a)}{(V_b - V_a)V_b} \right).$$

A.N.

$$T = 100 \times 10^3 \Omega \times 20 \times 10^{-9} \text{ F} \times \ln \left(\frac{(1,5 \text{ V} - 2 \times 5 \text{ V})(1,5 \text{ V} + 5 \text{ V})}{(1,5 \text{ V} - 5 \text{ V}) \times 1,5 \text{ V}} \right) = 4,7 \text{ ms}.$$

- c) L'étage 1 se comporte comme un **générateur de signaux périodiques** de période T et de rapport cyclique fonction de R , de C , de V_a et V_b . L'étage **gène** ainsi un **signal de référence** pour les étages suivants. Ce type de circuit est qualifié d'**astable**.

Q35. a) En appliquant la loi des mailles sur l'étage 2, il vient que

$$u_2 - u_h = u_{R_h} + u_{C_h} = R_h i + u_{C_h}.$$

Dans l'énoncé il est dit que l'intensité du courant prélevé de l'étage 1 à l'étage 2 est faible, ainsi

$$i(t) = C \frac{du_{C_h}}{dt} \approx 0$$

donc la tension u_{C_h} peut être considérée comme une constante k . On trouve alors la relation suivante

$$u_2 = u_h + k.$$

- b) D'après les chronogrammes tracés à la question 33, **le chronogramme B correspondrait à la tension u_h** car il est identique à celui de u_2 à une constante près.

Le chronogramme C correspond à un signal logique, donc il s'agit de la tension de sortie de la porte NAND, soit **la tension u_i** .

Par élimination **le chronogramme A** correspond à **la tension u_{rd}** , tension quasi-constante commandant l'alimentation de l'électrovanne.

- c) On remarque sur le chronogramme A de **la figure 10b**, que la tension de commande de l'électrovanne u_{rd} est toujours supérieure à 3,5 V lorsque la capacité $C_h = 700 \text{ pF}$. Dans ce cas, d'après l'énoncé, l'électrovanne est alimentée, **ce qui correspond à la situation d'arrosage**.

Sur la figure 10a, nous observons que cette tension est toujours inférieure à la tension de commande, donc dans le cas d'une capacité $C_h = 1000 \text{ pF}$, il n'y a pas arrosage. L'arrosage étant enclenché lorsque le taux d'humidité diminue, **nous pouvons conclure que la capacité diminue avec le taux d'humidité**.

- d) Dans le cas de la figure 10a, le signal C, soit u_i , est le signal logique issu de la porte NOT alimentée par le signal B, soit u_h : lorsque le signal B augmente jusqu'à la valeur de basculement de $V_b = 1,5 \text{ V}$, le signal C s'annule ; lorsque le signal B diminue jusqu'à la valeur de basculement, le signal C prend une valeur égale à la tension $V_a = 5 \text{ V}$.

Dans le cas de la figure 10b, le signal B ne dépasse jamais la tension de basculement V_b , le signal C est donc toujours à la valeur V_a .

Partie VI - Bronzage sur les plages de la Côte d'Argent et projection solaire

Q36. Pour la solution (i), la concentration en diode C_i est telle que

$$C_i = \frac{n_i}{V_i} = \frac{m_i}{M(I_2)V_i}.$$

A.N.

$$C_i = \frac{1,250 \text{ g}}{2 \times 127 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1} \times 0,100 \text{ L}} = 0,05 \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}.$$

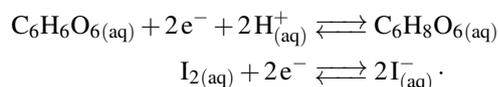
Pour la solution (t), la concentration en diiode C_t est telle que

$$C_t = \frac{n_t}{V_t} = \frac{m_t}{M(\text{Na}_2\text{S}_2\text{O}_3)V_t}.$$

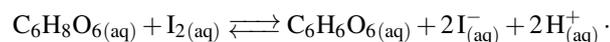
A.N.

$$C_t = \frac{1,500 \text{ g}}{(2 \times 23 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1} + 2 \times 32 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1} + 3 \times 16 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}) \times 0,100 \text{ L}} = 0,10 \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}.$$

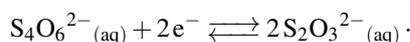
Q37. Une réaction a lieu entre l'acide ascorbique et le diiode, deux espèces dans les demi-équations d'oxydoréduction sont



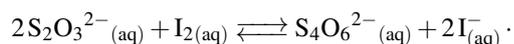
Ainsi l'équation de la réaction dans l'erenmeyer est



La réaction de dosage a lieu entre le diiode en excès et l'ion thiosulfate dont la demi-équation d'oxydoréduction est



L'équation de la réaction de dosage est donc



Q38. Après la réaction dans l'erenmeyer, il reste une quantité de diiode $C_i V_i - n_a$.

La réaction de dosage implique une réaction stœchiométrique entre les ions thiosulfates et le diiode restant, soit

$$\frac{C_t V_t}{2} = C_i V_i - n_a.$$

Il vient donc que

$$n_a = C_i V_i - \frac{C_t V_t}{2}.$$

Q39. Le degré de pureté, noté p , est défini tel

$$p = \frac{m(\text{C}_6\text{H}_8\text{O}_6)}{m_t} = \frac{M(\text{C}_6\text{H}_8\text{O}_6)}{n_a m_t}$$

soit

$$p = \frac{M(\text{C}_6\text{H}_8\text{O}_6) \left(C_i V_i - \frac{C_t V_t}{2} \right)}{m_t}$$

avec m_t = la masse de la poudre contenant l'acide ascorbique.

A.N.

$$p = \frac{(72 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1} + 8 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1} + 96 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}) \left(0,05 \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1} \times 30 \times 10^{-3} \text{ L} - \frac{0,10 \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1} \times 19,4 \times 10^{-3} \text{ L}}{2} \right)}{0,500 \text{ g}} = 19\%$$

FIN DU SUJET