TRAVAUX DIRIGÉS

Équations de Maxwell

Les différents exercices de ce recueil sont agencés selon la progression des différents paragraphes du cours. Le niveau de difficulté approximatif est mentionné pour chacun d'eux à travers un nombre d'étoiles (★), sauf pour les exercices type résolution de problème (♧♥♤♦). La résolution d'un exercice nécessite un temps de lecture, un temps de recherche et un temps de rédaction. Aucun de ces trois ne doit être négligé. Pour favoriser votre apprentissage, il est vivement recommandé de réaliser les phases de lecture et de recherche en amont de la séance, le minimum exigé étant un schéma de situation et les lois à mettre en œuvre qui devront apparaître en regard des énoncés.

Linéaments

Champs en régime stationnaire

Exercice n°1 - Cylindre infini uniformément chargé ★☆☆

On considère un cylindre infini de rayon R uniformément chargé d'une densité volumique ρ. On se place en coordonnées cylindriques, en confondant l'axe (Oz) avec l'axe du cylindre.

1. **Justifier** que le champ électrique est de la forme $\overrightarrow{E}(\overrightarrow{r}) = E(r)\overrightarrow{e_r}$.

2. **Donner** l'équation de Maxwell-Gauss.

3. **Montrer** qu'à l'intérieur du cylindre : $E(r) = Ar + B$, où A et B sont des constantes que l'on déterminera.

4. **Montrer** qu'à l'extérieur du cylindre s'exprime $E(r) = C/r$, où C est une constante que l'on déterminera.

Problème ouvert - Divergence du champ gravitationnel ♧♥♤♦

Le champ gravitationnel d'un astre de masse M et de rayon R s'écrit, en coordonnées sphériques, pour $r > R$:

$$\overrightarrow{g} = -\frac{GM}{r^2}\overrightarrow{u_r}$$

▶ *Que vaut la divergence du champ gravitationnel en tout point de l'espace ?*

Exercice n°2 - Spire circulaire

★ ☆ ☆

On considère un spire circulaire de centre O et rayon R parcourue par un courant électrique continu d'intensité I. On introduit un repère cylindrique $(\overrightarrow{e_r}, \overrightarrow{e_\theta}, \overrightarrow{e_z})$ dont l'axe (Oz) correspond à celui de la spire. On souhaite déterminer le champ magnétique en un point M de l'espace très proche d'axe de la spire mais non nécessairement situé sur cet axe, c'est-à-dire en tout point $M(r, \theta, z)$ avec $r << R$.

1. **Justifier** que $B_z(r, \theta, z) \simeq B_z(z)$.

2. **Exprimer** la composante radiale $B_r(r, z)$ en fonction de la composante axiale $B_z(r)$ à partir de la forme locale de l'équation de Maxwell-Thompson (aussi appelée équation de Maxwell-Flux).

On montre que le champ magnétique crée en un point M de l'axe d'une spire circulaire s'exprime :

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0 I}{2R} \sin^3 \alpha \ \overrightarrow{e_z}$$

avec α la demi-ouverture du cône issu de M ayant pour base le disque délimité par la spire.

3. **Déterminer** le champ magnétique $\overrightarrow{B}(r, z)$ généré par la spire en un point $M(r, z)$ tel que $r << R$.

Exercice n°3 - Conservation du flux magnétique

★ ★ ☆

On souhaite montrer que le flux du champ magnétique $\overrightarrow{B}$ se conserve le long d'un tube de champ.

1. **Donner** l'équation de Maxwell-Thompson.

2. **Montrer** que le flux du champ magnétique à travers une surface fermé est nul.

3. **Représenter** un tube de champ magnétique quelconque et définir une surface fermée S adaptée à un calcul simple de flux magnétique.

4. **Déterminer** le flux à travers la surface fermée S et en déduire que le flux magnétique est notamment conservé à travers les sections d'un même tube de champ.

Exercice n°4 - Une solution des équations de Maxwell ★ ☆ ☆

Dans une partie de l'espace vide de charges et de courants, on considère le champ électromagnétique suivant :

$$\vec{E}(M,t) = f(z)\, e^{-\alpha t}\, \vec{u_x} \text{ et } \vec{B}(M,t) = g(z)\, e^{-\alpha t}\, \vec{u_y}$$

1. **Justifier** que les équations de Maxwell-Gauss et Maxwell-flux sont vérifiées.

2. **Montrer** que l'équation de Maxwell-Faraday impose une relation entre $g(z)$ et $f'(z)$.

3. **Montrer** que l'équation de Maxwell-Ampère impose une relation entre $f(z)$ et $g'(z)$.

4. **Déterminer** $f(z)$ si cette fonction est paire et en posant $\vec{E}(0,0) = E_0\, \vec{u_x}$.

5. **Donner** l'expression du champ électromagnétique.

Exercice n°5 - Conservation de la charge ★ ☆ ☆

La conservation de la charge s'observe expérimentalement, en régime continu comme en variable. Par conséquent, l'équation de conservation de la charge doit pouvoir se déduire des équations de Maxwell.

1. **Donner** l'équation de conversation de la charge en précisant les grandeurs introduites.

2. **Donner** les équations de Maxwell pour un milieu non vide.

3. **Montrer** que la charge est conservée en régime variable en utilisant les équations de Maxwell.

4. **Vérifier** la compatibilité entre la loi des nœuds en régime variable et la conservation de la charge.

Exercice n°6 - Phénomène d'induction ★ ☆ ☆

Un conducteur cylindrique, vide de charges, d'axe (Oz), de rayon R et de longueur L est placé dans un champ magnétique variable $\overrightarrow{B} = B_0 \cos(\omega t)\overrightarrow{e_z}$. Pour des raisons de symétries, le champ électrique ne peut dépendre que de la variable r. On peut donc écrire :

$$\overrightarrow{E}(M) = E_r(r)\overrightarrow{e_r} + E_\theta(r)\overrightarrow{e_\theta} + E_z(r)\overrightarrow{e_z}$$

1. **Montrer** que le champ magnétique $\overrightarrow{B}$ vérifie la relation de Maxwell-Thomson.

2. **Simplifier** l'expression du champ électrique $\overrightarrow{E}$ à partir de la relation de Maxwell-Gauss.

3. **Exprimer** le champ électrique $\overrightarrow{E}$ à partir de la relation de Maxwell-Faraday.

4. **Exprimer** le courant de conduction $\overrightarrow{j}$ et le courant de déplacement $\overrightarrow{j_D}$.

5. **Calculer** la pulsation ω_{lim} à partir de laquelle le courant de déplacement prédomine.

Exercice n°7 - Décharge d'une boule conductrice ★ ★ ☆

Une boule conductrice de centre O et de rayon R porte initialement la charge Q_0 uniformément répartie en surface. Elle est abandonnée dans l'air supposé légèrement conducteur, de conductivité γ. La boule porte à l'instant t la charge $Q(t)$. On introduit un système coordonnées sphériques $(\overrightarrow{e_r}, \overrightarrow{e_\theta}, \overrightarrow{e_\phi})$. On note $\overrightarrow{E}$ le champ électrique qu'elle génère, $\overrightarrow{j}$ le courant de conduction qui apparaît en surface.

1. **Justifier** que le théorème de Gauss s'applique puis déterminer $\overrightarrow{E}$ à l'extérieur de la boule. En déduire $\overrightarrow{j}$.

2. **Montrer** que le champ magnétique $\overrightarrow{B}$ est nul en tout point par des considérations de symétrie.

3. **Établir** une équation différentielle vérifiée par $Q(t)$ à partir de l'équation de Maxwell-Ampère.

4. **Résoudre** l'équation différentielle obtenue précédemment.

5. **Exprimer** l'énergie dissipée dans le milieu à partir de la densité volumique d'énergie électromagnétique puis vérifier le résultat en évaluant les pertes par effet Joule. En coordonnées sphériques $\mathrm{d}V = r^2 \sin\theta \,\mathrm{d}r\, \mathrm{d}\theta\, \mathrm{d}\phi$.

Exercice n°8 - Résistance statique d'une bobine ★ ☆ ☆

On considère un fil cylindrique de longueur $L = AB$, de résistivité ρ_r et de section S traversé par un courant électrique d'intensité I en raison d'une différence de potentiel U_{AB} constante existant à ses bornes. On note R sa résistance. La densité volumique de courant $\overrightarrow{j}$ qui le traverse est uniforme est dirigé selon l'axe du cylindre.

1. **Représenter** la situation sur un schéma.

2. **Exprimer** la puissance cédée par le fil et l'exprimer en fonction de $\overrightarrow{j}$, $\overrightarrow{E}$, σ et ρ_r en injectant la loi d'Ohm locale.

3. **Montrer** que cette puissance s'identifie à la puissance dissipée par effet Joule et en déduire l'expression de la résistance R du fil.

4. **Calculer** la résistance d'une bobine de rayon moyen $R_0 = 7$ cm comportant $N = 100$ spires faites d'un fil en cuivre de rayon $r = 0,5$ mm. On donne la conductivité du cuivre : $\sigma = 6 \times 10^7$ S.m^{-1}.

Exercice n°9 - Transport de puissance dans un cylindre ★ ☆ ☆

On considère un câble électrique assimilé à un cylindre d'axe (Oz), de longueur L, de rayon a, conducteur ohmique de conductivité σ, parcouru par des courants indépendants du temps de densité volumique uniforme $\overrightarrow{j} = j\,\overrightarrow{e_z}$. L'intensité totale est notée I. La perméablité du milieu est assimilée à celle du vide μ_0.

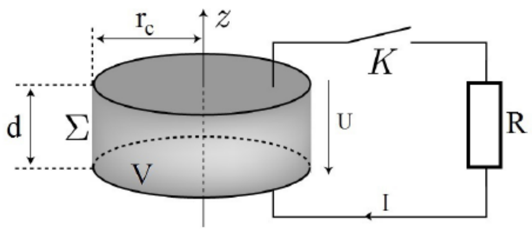
1. **Exprimer** la résistance R du câble.

2. **Déterminer** dans la base locale cylindrique les champs électrique $\overrightarrow{E}$ et magnétique $\overrightarrow{B}$ à la surface du conducteur (c'est-à-dire en $r = a$).

3. **Déduire** l'expression du vecteur de Poynting et de la puissance électromagnétique rayonnée par le champ électromagnétique à travers le câble en fonction R et I.

Exercice n°10 - Décharge d'un condensateur ★★☆

Un condensateur plan de capacité C et d'épaisseur d est constitué de deux armatures circulaires de rayon r_c. Initialement chargé, il est relié à un conducteur ohmique de résistance R par un interrupteur K. À l'instant $t = 0$, on ferme l'interrupteur, et le condensateur se décharge. On note $U(t)$ la tension aux bornes du condensateur, et on note $U_0 = U(t = 0)$. On suppose que les effets de bords sont négligeables et que le champ électrique est uniforme à l'intérieur du condensateur (volume en gris sur la figure) durant la décharge : $\overrightarrow{E(t)} = E(t)\ \overrightarrow{e_z}$.



1. **Exprimer** $U(t)$ en fonction de U_0 et $\tau = RC$. Réaliser les applications numérique pour C et τ.

2. **Établir** une relation entre $U(t)$ et $E(t)$. En déduire $E(t)$ en fonction de U_0, τ et d.

On suppose qu'à l'intérieur du condensateur, le champ magnétique est de la forme $\overrightarrow{B}(r,t) = B(r,t)\ \overrightarrow{e_\theta}$.

3. **Montrer** que le champ magnétique $\overrightarrow{B}(r,t)$ s'exprime $\overrightarrow{B}(r,t) = -\dfrac{\epsilon_0\mu_0 U_0}{2\tau d}\ e^{-t/\tau}\ r\ \overrightarrow{e_\theta}$.

4. **Déduire** que la densité d'énergie électromagnétique à l'intérieur du condensateur se met sous la forme $u_{em} = u_e + u_m$, avec u_e et u_m les termes électrique et magnétique. Justifier que $u_m << u_e$. Par la suite $u_{em} = u_e$.

5. **Exprimer** le vecteur de Poynting en tout point à l'intérieur du condensateur.

6. **Vérifier** que l'équation locale de conservation de l'énergie électromagnétique s'applique.

7. **Exprimer** le flux du vecteur de Poynting entrant à travers la surface latérale (Σ) du condensateur à un instant t, en fonction de U_0, R et C. Vérifer que ce résultat peut s'écrire $P = UI$.

<u>Données :</u> $\epsilon_0 = 8,85 \times 10^{-12}$ F.m^{-1} ; $R = 1$ kΩ ; $r_c = 10$ cm ; $d = 0,1$ mm.

Exercice n°11 - Solénoïde en régime sinusoïdal ★★☆

On considère un solénoïde long, de rayon a, d'axe (Oz), à l'intérieur duquel règne un champ magnétique $\overrightarrow{B} = B_0 e^{-t/\tau}\,\overrightarrow{e_z}$ et on s'intéresse à une section de celui-ci de longueur L. On cherche le champ électrique sous la forme $\overrightarrow{E} = E(r,t)\,\overrightarrow{e_\theta}$.

1. **Justifier** la forme de l'expression du champ électrique.

2. **Déterminer** le champ électrique.

3. **Calculer** le rapport μ des densités volumiques d'énergies électrique et magnétique dans le solénoïde.

4. **Exprimer** le vecteur de Poynting et son flux à travers les bords du solénoïde.

5. **Déterminer** l'énergie magnétique dans le solénoïde à l'instant $t = 0$ puis 'a l'instant t. En déduire la variation d'énergie magnétique. Comparer le résultat obtenu au flux du vecteur de Poynting.

Données : $a = 10$ cm ; $\tau = 1$ ms.