TRAVAUX DIRIGÉS

Propagation d'ondes électromagnétiques

Les différents exercices de ce recueil sont agencés selon la progression des différents paragraphes du cours. Le niveau de difficulté approximatif est mentionné pour chacun d'eux à travers un nombre d'étoiles (★), sauf pour les exercices type résolution de problème (♧♥♤♦). La résolution d'un exercice nécessite un temps de lecture, un temps de recherche et un temps de rédaction. Aucun de ces trois ne doit être négligé. Pour favoriser votre apprentissage, il est vivement recommandé de réaliser les phases de lecture et de recherche en amont de la séance, le minimum exigé étant un schéma de situation et les lois à mettre en œuvre qui devront apparaître en regard des énoncés.

Linéaments

Structure d'une onde électromagnétique

Exercice n°1 - Onde plane progressive dans le vide (I) ★☆☆

On considère une onde électromagnétique plane progressive $(\overrightarrow{E}, \overrightarrow{B})$ se propageant dans le vide. Dans un repère cartésien $(\overrightarrow{u_x}, \overrightarrow{u_y}, \overrightarrow{u_z})$ judicieusement choisi, la composante électrique de l'onde est de la forme :

$$\overrightarrow{E}(z,t) = E_0 \cos(\omega t - kz)\overrightarrow{u_x}$$

1. **Donner** l'équation reliant le champ électrique aux variations temporelles du champ magnétique.

2. **Donner** Donner la direction, le sens et la vitesse de propagation de l'onde.

3. **Préciser** l'état de polarisation de l'onde en justifiant la réponse.

4. **Établir** une relation entre les normes des champs électrique et magnétique.

5. **Exprimer** le champ magnétique de l'onde. En déduire l'expression du vecteur de Poynting.

6. **Calculer** les amplitudes E_0 et B_0 d'une onde rayonnant en moyenne $P = 10$ W à travers $S = 4,0$ mm^2.

Exercice n°2 - Onde plane progressive dans le vide (II) ★☆☆

On considère une onde électromagnétique plane progressive ($\overrightarrow{E}, \overrightarrow{B}$) se propageant dans le vide. Dans un repère cartésien ($\overrightarrow{u_x}, \overrightarrow{u_y}, \overrightarrow{u_z}$) choisi sans considération de la direction de propagation, la composante électrique de l'onde est de la forme :

$$\overrightarrow{E}(x,y,z,t) = E_x\overrightarrow{u_x} + E_y\overrightarrow{u_y} \text{ avec } E_x = E_0 \exp\left(i\left(\frac{k}{3}(2x+2y+z) - \omega t \right)\right)$$

1. **Calculer** la fréquence de l'onde sachant que sa longueur d'onde dans le vide vaut : $\lambda = 6 \times 10^{-7}$ m.

2. **Calculer** la valeur de la grandeur k en précisant sa signification.

3. **Établir** l'équation cartésienne du front d'onde.

4. **Établir** une relation entre E_y et E_x.

5. **Déterminer** le champ magnétique de l'onde.

6. **Déterminer** la densité moyenne d'énergie électromagnétique associée à cette onde.

7. **Déterminer** le vecteur de Poynting de l'onde et sa valeur moyenne temporelle.

Exercice n°3 - Le coefficient mystère ★★☆

On donne la représentation complexe en coordonnées cartésiennes du champ électrique d'une onde électromagnétique se propageant dans le vide :

$$\overrightarrow{E} = E_0 \cos\left(\frac{\pi y}{a}\right) \exp(i(\omega t - k_0 z))\, \overrightarrow{e_x} + \underline{\alpha} E_0 \sin\left(\frac{\pi y}{a}\right) \exp(i(\omega t - k_0 z)) \overrightarrow{e_y}$$

avec $\underline{\alpha} \in \mathbb{C}$ et $k_0 \in \mathbb{R}^{*+}$.

1. **Exprimer** $\underline{\alpha}$ et k_0 en fonction de E_0, ω et c.

2. **Déterminer** le champ magnétique associé à cette onde.

3. **Déterminer** la nature de cette onde électromagnétique à partir des qualificatifs suivants : plane, progressive, monochromatique, harmonique, transverse électrique, transverse magnétique.

4. **Déterminer** le vecteur de Poynting et sa valeur moyenne dans le temps.

Polarisation

Exercice n°4 - Rotation d'une polarisation linéaire ★ ☆ ☆

Partie A - Polariseur unique

On place sur le trajet d'une onde plane progressive monochromatique se propageant dans la direction de l'axe (Oz) et polarisée rectilignement dans la direction $\overrightarrow{u_x}$ un polariseur orienté pour transmettre une polarisation rectiligne perpendiculaire à l'axe (Oz) et faisant un angle θ par rapport au vecteur $\overrightarrow{u_x}$.

1. **Exprimer** le champ électrique de l'onde avant la traversée du polariseur.

2. **Déterminer** le champ électrique de l'onde en sortie en fonction de déphasage φ_0 induit par le polariseur.

3. **Exprimer** le coefficient de transmission du polariseur, défini comme le rapport de l'éclairement de l'onde sortante sur l'éclairement de l'onde entrante.

Partie B - Polariseurs multiples

On place sur le trajet d'une onde plane progressive monochromatique se propageant dans la direction de l'axe (Oz) et polarisée rectilignement dans la direction $\overrightarrow{u_x}$ une succession de N polariseurs. Le polariseur n est orienté pour transmettre une polarisation rectiligne faisant un angle $n\theta$ par rapport à la polarisation initiale.

4. **Déterminer** l'éclairement transmis après la traversée des N polariseurs.

5. **Montrer que** pour une valeur de N suffisamment grande, le dispositif permet de faire tourner une polarisation linéaire d'un angle de $90°$ avec une perte d'énergie négligeable.

6. **Calculer** N pour que les pertes en énergie du système soient inférieures à 1%.

Exercice n°5 - Ondes longitudinales ★☆☆

On étudie la propagation d'une onde électromagnétique dans un plasma peu dense dont on suppose la densité volumique de charge ρ non nulle. En notation complexe, l'onde employée est associée à un champ électrique $\overrightarrow{E}$ et un champ magnétique $\overrightarrow{B}$ de la forme :

$$\underline{\overrightarrow{E}} = \overrightarrow{E_0} \exp\left(\omega t - \overrightarrow{k} \cdot \overrightarrow{r}\right) \text{ et } \underline{\overrightarrow{B}} = \overrightarrow{B_0} \exp\left(\omega t - \overrightarrow{k} \cdot \overrightarrow{r}\right)$$

1. **Établir** l'équation du mouvement d'un électron de masse m_e, associé à la densité n_e, et de charge $-e$ en faisant les approximations nécessaires. En déduire l'expression d'une conductivité complexe $\underline{\gamma}$ du plasma.

2. **Exprimer** $\underline{\gamma}$ en fonction de ω et ϵ_0 à partir des équations de Maxwell et de la conservation de la charge.

3. **Montrer que** $\overrightarrow{B}$ est nul. En déduire la position relative des vecteurs d'onde $\overrightarrow{k}$ et de $\overrightarrow{E}$.

4. **Montrer que** la pulsation ω admet une unique valeur pour laquelle l'onde se propage.

Exercice n°6 - Altitude de l'ionosphère ★★☆

Un plasma est plongé dans un champ magnétique $\overrightarrow{B_0}$; une onde électromagnétique (champ électrique $\overrightarrow{E}$ et champ magnétique $\overrightarrow{B}$) plane polarisée rectilignement se propage dans ce plasma dans une direction perpendiculaire à $\overrightarrow{B_0}$.

1. **Justifier** que l'orientation relative de $\overrightarrow{E}$ et $\overrightarrow{B_0}$ de l'onde influence la relation de dispersion.

On admet que la relation de dispersion s'exprime :

$$k^2c^2 = \frac{(\omega^2 - \omega_P^2)^2 - \omega_c^2\omega^2}{\omega^2 - \omega_P^2 - \omega_c^2}$$

avec ω_P la pulsation plasma et $\omega_c = \dfrac{eB_0}{m_e}$ la pulsation cyclotron.

$\boxed{\textbf{2.}}$ **Représenter** graphiquement l'allure de la fonction $k^2c^2 = f(\omega^2)$. En déduire le domaine de pulsation pouvant se propager dans le plasma.

On envoie verticalement selon la direction (Ox) une onde sur l'ionosphère dont la densité électronique n_0 est supposée ici uniforme. Lorsque l'émission de l'onde est telle que la direction du champ électrique est parallèle à celle du champ magnétique terrestre $\overrightarrow{B_0}$, il y a un écho pour une longueur d'onde émise supérieure à $\lambda_0 = 42,70$ m. Lorsque les directions du champ électrique de l'onde et du champ magnétique terrestre $\overrightarrow{B_0}$ sont perpendiculaires, il y a un écho pour une longueur d'onde émise supérieure à $\lambda'_0 = 38,90$ m.

$\boxed{\textbf{3.}}$ **Calculer** la densité électronique n_0 de la ionosphère et la valeur de B_0 qui y règne.

L'intensité du champ magnétique terrestre décroît avec l'altitude selon la relation :

$$B_0(x) = B_0(0)\left(1 + \frac{x^2}{R^2}\right)^{-\frac{3}{2}}$$

où $B_0(0) = 4700 \times 10^{-8}$ T correspond à sa valeur au niveau du sol et $R = 6360$ km le rayon de la Terre.

$\boxed{\textbf{4.}}$ **Calculer** l'altitude de la base de la ionosphère.

Exercice n°7 - Une relation de dispersion ★☆☆

Déterminer la forme générale d'une relation de dispersion permettant de relier les vitesses de phase v_φ et de groupe v_g telle que : $v_\varphi \times v_g = c^2$, où c correspond à la célérité de la lumière dans le vide.

Bilans énergétiques

Problème ouvert - Réglementation du réseau 4G ♧♥♤♦

Le Débit d'Absorption Spécifique (DAS) représente la puissance électromagnétique absorbée par les tissus au niveau de la tête. Le seuil de nocivité des ondes 4G est fixé par l'Union Européenne à 2 W·kg^{-1}.

▶ *Quelle est la valeur maximale du champ électrique émis par un portable respectant cette norme ?*

<u>Données :</u> $\sigma_{\text{cerveau}}(f_{4G} = 2,4\text{GHz}) = 1\text{S}\cdot\text{m}^{-1}$, $\epsilon_{r,\text{cerveau}} = 80$, $\rho_{\text{cerveau}} = 1000$ kg·m^{-3}, $c_{\text{cerveau}} = 4,2$ kJ·kg^{-1}·K^{-1}.

Exercice n°8 - Cas d'un plasma

★ ☆ ☆

Un plasma est constitué d'une part d'électrons de masse m de charge $-e$ et de densité n_e et d'autre part d'ions positifs quasiment immobiles car de masse très supérieure à celle des électrons. Il s'agit d'un milieu localement neutre, c'est-à-dire un milieu dont la densité volumique de charge ρ est nulle. On introduit ω_P la pulsation plasma et σ la conductivité de ce plasma :

$$\omega_P = \sqrt{\frac{n_e e^2}{\epsilon_0 m}} \qquad \sigma = -i\epsilon_0 \frac{\omega_P}{\omega}$$

On donne la relation de dispersion dans le plasma :

$$k^2 = \frac{\omega^2}{c^2}\left(1 - \frac{\omega_P^2}{\omega^2}\right)$$

On considère la propagation d'une onde plane progressive monochromatique de pulsation $\omega > \omega_P$ auquel est attaché le champ électrique suivant :

$$\underline{\overrightarrow{E}} = E_0 \mathrm{i}(\omega \mathrm{t} - \mathrm{kz})\ \overrightarrow{e_x}$$

1. **Exprimer** le vecteur de Poynting instantané $\overrightarrow{R}$.

2. **Exprimer** la densité d'énergie électromagnétique u_{em}.

3. **Exprimer** la densité volumique de puissance p_v cédée au plasma.

4. **Justifier** qu'un plasma vérifie l'identité de Poynting en précisant le sens physique de chacun des termes :

$$\frac{\partial u_m}{\partial t} + \mathrm{div}\overrightarrow{R} + \overrightarrow{j} \cdot \overrightarrow{E} = 0$$