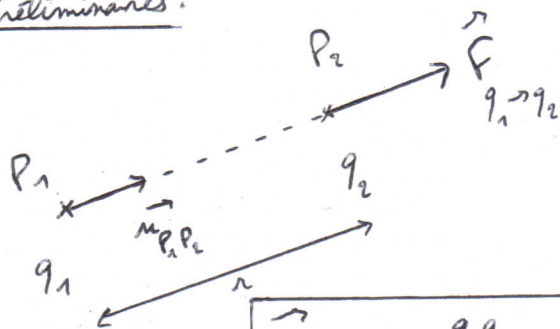


Les ondes gravitationnelles

Partie 1:

A) Préliminaires:

1)



loi de Coulomb:

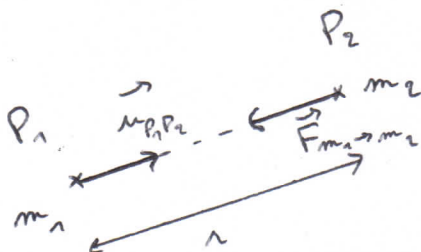
$$\begin{aligned}\vec{F}_{q_1 \rightarrow q_2} &= \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0 r^2} \vec{n}_{P_1 P_2} \\ &= \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{P}_1 P_2}{(P_1 P_2)^3}\end{aligned}$$

($\vec{n}_{P_1 P_2}$ = vecteur unitaire allant de P_1 vers P_2)

2) Théorème de Gauss: le flux sortant du champ électrostatique à travers une surface fermée S est égal à la somme des charges à l'intérieur de S , divisée par la permittivité diélectrique du vide ϵ_0 .

$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{Q_{\text{int}}}{\epsilon_0}$$

3)



loi de Newton:

$$\begin{aligned}\vec{F}_{m_1 \rightarrow m_2} &= -G \frac{m_1 m_2}{r^2} \vec{n}_{P_1 P_2} \\ &= -G m_1 m_2 \frac{\vec{P}_1 P_2}{(P_1 P_2)^3}\end{aligned}$$

4)

$$\begin{aligned}q_1 &\Leftrightarrow m_1 \\ q_2 &\Leftrightarrow m_2 \\ \frac{1}{4\pi\epsilon_0} &\Leftrightarrow -G\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\vec{E} &\Leftrightarrow \vec{g} \\ Q_{\text{int}} &\Leftrightarrow M_{\text{int}}\end{aligned}$$

Théorème de Gauss: le flux sortant du champ gravitationnel à travers une surface fermée S est égal au produit de la masse à l'intérieur de S par la constante $(-4\pi G)$.

$$\oint_S \vec{g} \cdot d\vec{S} = -4\pi G M_{\text{int}}$$

5) * Tous les plans contenant la droite (ON) sont plans de symétrie de la distribution de masse. Or $\vec{g}$ est un vecteur polaire (mêmes propriétés que $\vec{E}$), donc $\vec{g}(r)$ appartient à tous ces plans, donc à leur intersection, donc $\vec{g}(r) = g \vec{n}_r$ (on se place évidemment en coordonnées sphériques).

* Il y a invariance de la distribution de masse par toute rotation autour de O

$$\Rightarrow g(r, \phi, \theta) = g(r)$$

$$\Rightarrow \vec{g}(r) = g(r) \vec{n}_r$$

* choix de la surface de Gauss: sphère de centre O de rayon r :

$$\begin{aligned}\oint_S \vec{g} \cdot d\vec{S} &= \oint_S g(r) \vec{n}_r \cdot (dS \vec{n}_r) \\ &= g(r) \oint_S dS = g(r) 4\pi r^2\end{aligned}$$

$$\text{* Théorème de Gauss: } \oint_S \vec{g} \cdot d\vec{S} = -4\pi G M_{\text{int}}$$

$$\Rightarrow \vec{g} = -\frac{G M_{\text{int}}}{r^2} \vec{n}_r$$

* A présent, pour $r > R$: $M_{\text{int}} = m$

$$\Rightarrow \vec{g} = -\frac{Gm}{r^2} \vec{u}_r$$

$$\text{or } \vec{u}_r = \frac{\vec{OM}}{OM} \text{ et } r = OM$$

$$\Rightarrow \vec{g}(M) = -\frac{Gm}{r^2} \vec{u}_r = -\frac{Gm}{OM^3} \vec{OM}$$

On retrouve le champ gravitationnel créé par une masse ponctuelle de masse m située en O .

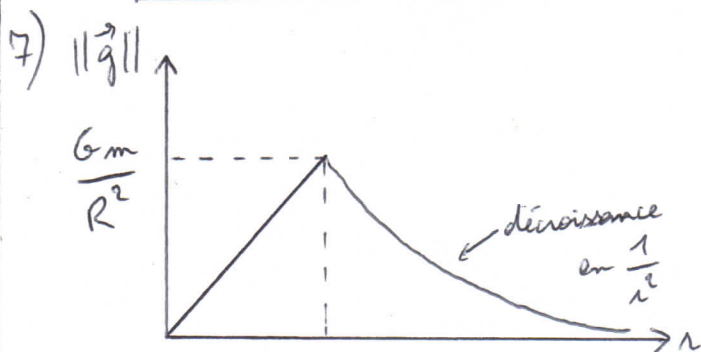
car d'après la loi de Newton :

$$\begin{aligned} O_x \quad m' \quad F_{m \rightarrow m'} &= -\frac{Gmm'}{OM^3} \vec{OM} \\ &= m' \vec{g}(M) \\ \Rightarrow \vec{g}(M) &= -\frac{Gm}{OM^3} \vec{OM} \end{aligned}$$

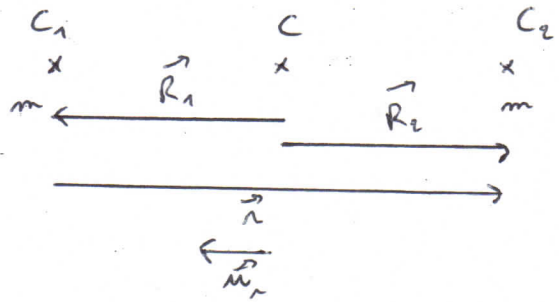
6) On a toujours $\vec{g} = -\frac{GM_{\text{int}}}{r^2} \vec{u}_r$

$$\begin{aligned} M_{\text{int}} &= \iiint_V \rho dV \quad \text{avec } \rho = \frac{m}{\frac{4}{3}\pi R^3} \\ &= \frac{m}{\frac{4}{3}\pi R^3} \cdot \frac{4}{3}\pi r^3 = m \frac{r^3}{R^3} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \vec{g}(M) = -\frac{Gm}{R^3} \vec{u}_r = -\frac{Gm}{R^3} \vec{OM}$$



B) Description mécanique du système :



8) C est le centre d'inertie, or $m_1 = m_2 = m$

$\Rightarrow C$ est au milieu du segment $[C_1 C_2]$

$$\Rightarrow \vec{R}_2 = -\vec{R}_1$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \vec{r} = \vec{C_1 C_2} &= \vec{C_1 C} + \vec{C C_2} = -\vec{R}_1 + \vec{R}_2 \\ &= -2\vec{R}_1 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \vec{R}_1 = -\frac{1}{2} \vec{r}$$

9) système C_1

référentiel d'étude galiléen de centre C

$$\begin{aligned} \text{action sur } C_1 : F_{C_2 \rightarrow C_1} &= \frac{Gm^2}{r^3} \vec{r} \\ &\text{loi de Newton} \end{aligned}$$

théorème du moment dynamique en C :

$$\frac{d\vec{\sigma}(C)}{dt} + m \vec{v}(C) \wedge \vec{u}_r(C) = \vec{M}_C(\vec{F}_{C_2 \rightarrow C_1})$$

$$\begin{aligned} &= \vec{CC_1} \wedge \vec{F}_{C_2 \rightarrow C_1} = \vec{0} \\ &\quad \uparrow \quad \uparrow \\ &\quad \text{colinéaires} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \vec{\sigma}(C) = c^k \vec{e}_k = \vec{CC_1} \wedge m \vec{v}(C_1)$$

$$\Rightarrow \vec{v}(C_1) \text{ reste } \perp \vec{\sigma}(C) = c^k \vec{e}_k$$

$\Rightarrow$ le mouvement de C_1 est plan.

$$10) r = c^k \Rightarrow R_1 = \frac{r}{2} = c^k$$

$\Rightarrow$ le mouvement est circulaire.

$$\Rightarrow \vec{v}(C_1) \perp \vec{CC_1}$$

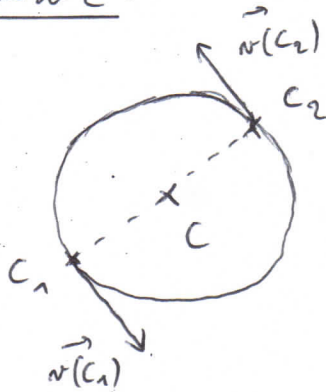
$$\vec{\sigma}(C) = \vec{c} \Rightarrow \|\vec{\sigma}(C)\| = c$$

$$\Rightarrow \|\vec{CC}_1\| \times m \|\vec{v}(C_1)\| \times \sin \frac{\pi}{2} = c^2$$

$\uparrow$ $\uparrow$ $\uparrow$
 $R_1 = c$ $m = c$ 1

$$\Rightarrow \|\vec{v}(C_1)\| = c \Rightarrow \text{mouvement uniforme}$$

11) C_1 décrit un mouvement circulaire uniforme autour de C .



($\|\vec{v}(C_1)\| = \|\vec{v}(C_2)\|$) par conservation de la quantité de mouvement du système isolé constitué de C_1 et C_2 : $m\vec{v}(C_1) + m\vec{v}(C_2) = \vec{0}$

$$12) \vec{CC}_1 = R_1 \vec{u}_r$$

$$\vec{v}(C_1) = \frac{d\vec{CC}_1}{dt} = \dot{R}_1 \vec{u}_r + R_1 \dot{\theta} \vec{u}_\theta$$

$R_1 = c$

$$\vec{a}(C_1) = \ddot{R}_1 \vec{u}_r + R_1 \ddot{\theta} \vec{u}_\theta - R_1 \dot{\theta}^2 \vec{u}_r$$

$R_1 = c$ $\dot{\theta} = c$ $\text{car } \|\vec{v}(C_1)\| = c$

$$\Rightarrow \vec{a}(C_1) = - \frac{\|\vec{v}(C_1)\|^2}{R_1} \vec{u}_r$$

RFD à C_1 : $m \vec{a}(C_1) = \vec{F}_{C_2 \rightarrow C_1}$

$$\Rightarrow -m \frac{\|\vec{v}(C_1)\|^2}{R_1} \vec{u}_r = \frac{Gm^2}{r^3} \vec{u}_r$$

$$-m \frac{v_1^2}{2} \vec{u}_r = \frac{Gm^2}{r^3} (-r \vec{u}_r)$$

$$\Rightarrow v_1 = \sqrt{\frac{Gm}{2r}}$$

Soit $T = \frac{1}{f}$ le temps mis pour faire un tour

$$v_1 = \frac{2\pi R_1}{T} = 2\pi \frac{r}{2} f = \pi r f$$

$$\Rightarrow f = \frac{v_1}{\pi r} \Rightarrow \boxed{f = \sqrt{\frac{Gm}{2\pi^2 r^3}}}$$

$$13) \delta W = \vec{F}_{C_1 \rightarrow C_2} \cdot d\vec{l}$$

$$= \frac{Gm^2}{r^2} \vec{u}_r \cdot (-dr \vec{u}_r) = -Gm^2 \frac{dr}{r^2}$$

$\vec{u}_r = -r \vec{u}_r \dots$ pas malin!

$$= -d\left(-\frac{Gm^2}{r}\right) = -dE_{\text{pot}}$$

$$\Rightarrow E_{\text{pot}} = -\frac{Gm^2}{r} + c$$

$E_{\text{pot}}(r \rightarrow \infty) = 0$

$$\Rightarrow \boxed{E_{\text{pot}} = -\frac{Gm^2}{r}}$$

14) A la question 12), on a établi $v_1 = \sqrt{\frac{Gm}{2r}}$

$$E_{c1} = \frac{1}{2} m v_1^2 \Rightarrow \boxed{E_{c1} = \frac{Gm^2}{4r}}$$

15) $v_2 = v_1 \Rightarrow E_{c2} = E_{c1}$
 $m_2 = m_1 = m$

(cf 11): $v_2 = v_1$

$$\Rightarrow E_m = E_{c1} + E_{c2} + E_{\text{pot}}$$

$$= 2 \frac{Gm^2}{4r} - \frac{Gm^2}{r} = -\frac{Gm^2}{2r}$$

$$\boxed{E_m = -\frac{Gm^2}{2r}}$$

$r = c \Rightarrow E_m = c^2$

ou bien, de manière plus physique :

le système $\{C_1 + C_2\}$ est isolé, et les forces internes ($\vec{F}_{C_1 \rightarrow C_2}$ et $\vec{F}_{C_2 \rightarrow C_1}$) sont conservatives ($\vec{F} \perp \vec{v}$)

$$\Rightarrow E_m = c^2$$

$$\begin{aligned} 16) -\alpha f^{2/3} &= -\left(\frac{\pi G}{2}\right)^{2/3} m^{5/3} \left(\sqrt{\frac{Gm}{2\pi^2 \lambda^3}}\right)^{2/3} \\ &= -\frac{\pi^{2/3} G^{2/3} m^{5/3} G^{1/3} m^{1/3}}{2^{2/3} 2^{1/3} \pi^{2/3} \lambda^{2/3}} \\ &= -\frac{Gm^2}{2\lambda} = E_m \quad \text{CQFD} \end{aligned}$$

$$E_m = -\alpha f^{2/3} \quad \text{ou} \quad \alpha = \left(\frac{\pi G}{2}\right)^{2/3} m^{5/3}$$

$$\begin{aligned} * \alpha \text{ en } & ([\eta]^{-1} [L]^3 [T]^{-2})^{2/3} [\eta]^{5/3} \\ &= [\eta] [L]^2 [T]^{-4/3} \\ f^{2/3} \text{ en } & ([T]^{-1})^{2/3} \\ \Rightarrow -\alpha f^{2/3} \text{ en } & [\eta] [L]^2 [T]^{-4/3} [T]^{-2/3} \\ &= [\eta] [L]^2 [T]^{-2} \end{aligned}$$

* énergie = force $\times$ distance
= masse $\times$ accélération $\times$ distance

$$\begin{aligned} \text{en } & [\eta] \times [L] [T]^{-2} \times [L] \\ &= [\eta] [L]^2 [T]^{-2} \end{aligned}$$

$\Rightarrow$ homogénéité OK

c) Prise en compte de l'émission d'ondes gravitationnelles:

$$17) E_m(t) = -\frac{Gm^2}{2\lambda(t)} \quad \searrow$$

$\Rightarrow r(t) \searrow$ au cours du temps

$$(\Delta E_m < 0)$$

$$f(t) = \sqrt{\frac{Gm}{2\pi^2 \lambda^3(t)}} \quad \nearrow \quad (r(t) \searrow)$$

$\Rightarrow f(t) \nearrow$ au cours du temps

18) Pendant la durée dt , l'énergie mécanique perdue correspond à l'énergie libérée à cause des ondes gravitationnelles.

$$\begin{aligned} \Rightarrow -dE_m &= P(t) dt \\ \uparrow \quad \uparrow \\ \text{perdue} \quad (< 0) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow -\frac{dE_m}{dt} = P(t)$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow -\frac{d}{dt}(-\alpha f^{2/3}) &= \alpha \frac{2}{3} f^{-1/3} \frac{df}{dt} \\ &= P(t) = \frac{64}{5} \frac{G^4 m^5}{c^5 \lambda^5} \end{aligned}$$

$$\text{ou } f = \sqrt{\frac{Gm}{2\pi^2 \lambda^3}} \Rightarrow f^2 \propto \frac{1}{\lambda^3}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\lambda^5} \propto f^{10/3}$$

$$\Rightarrow f^{-1/3} \frac{df}{dt} \propto \frac{1}{\lambda^5} \propto f^{10/3}$$

$$\Rightarrow \frac{df}{dt} = K f^{11/3}$$

$$\Rightarrow B = \frac{11}{3}$$

$$19) \frac{df}{f^{11/3}} = K dt$$

$$-\frac{3}{8} \left[f^{-8/3} \right]_{f_0}^{f(t)} = K t$$

$$f(t)^{-8/3} - f_0^{-8/3} = -\frac{8}{3} K t$$

$$\Rightarrow \left(\frac{f(t)}{f_0} \right)^{-\frac{8}{3}} - 1 = -\frac{8}{3} \kappa f_0^{\frac{8}{3}} t$$

$$\Rightarrow \left(\frac{f(t)}{f_0} \right)^{+\frac{8}{3}} = \left(1 - \frac{8}{3} \kappa f_0^{\frac{8}{3}} t \right)^{-1}$$

$$\Rightarrow f(t) = \frac{f_0}{\left(1 - \frac{8}{3} \kappa f_0^{\frac{8}{3}} t \right)^{3/8}}$$

$$\Rightarrow f(t) = \frac{f_0}{\left(1 - \frac{t}{T} \right)^{3/8}}$$

avec
$$T = \frac{3}{8 \kappa f_0^{\frac{8}{3}}}$$

20) Pour $t \rightarrow T$, $f(t) \rightarrow \infty$, $r(t) \rightarrow 0$.

Il y a alors collision entre les 2 corps,
et fusion des 2 corps.

T est donc le temps au bout duquel il
y aura fusion des 2 corps.

A cet instant, $P(t) \propto \frac{1}{r(t)^5} \rightarrow \infty$

A $t=T$, l'émission des ondes gravitationnelles est très intense (détectable depuis la Terre)

Les ondes gravitationnelles

Partie 2:

A) L'interféromètre de Michelson:

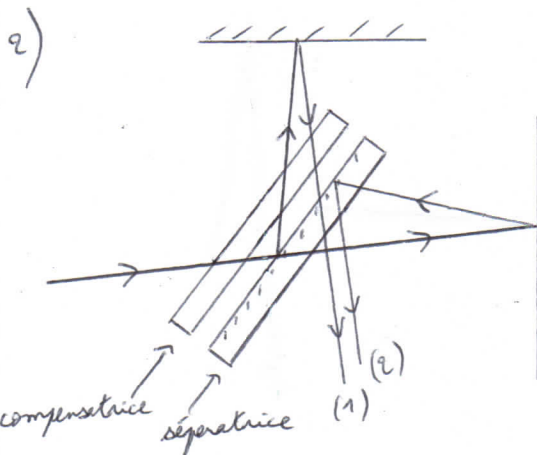
1) Cela signifie que Π_x et Π_y sont orthogonaux. Si on note Π^* le symétrique de Π_x et la séparatrice à 45° , alors Π_x par rapport à la séparatrice, alors Π_x^* et Π_y sont parallèles, et forment une lame d'air (si $L_x \neq L_y$).

* Avec une source étendue, les franges sont localisées à l'infini. On peut les observer:

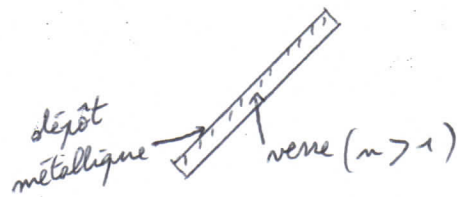
- dans le plan focal image d'une lentille convergente (de grande distance focale pour avoir un grand champ d'interférences sur l'écran).
- ou sur un écran suffisamment éloigné des miroirs ($\approx 1\text{m} - 2\text{m}$).

* Si l'écran est placé trop près de l'interféromètre, il y a bruitage des franges: le contraste est mauvais.

Si l'écran est vraiment trop près de l'interféromètre, on ne verra plus de franges.



En fait, la séparatrice a une certaine épaisseur:



la compensatrice est une lame de verre identique à la séparatrice (mais sans dépôt métallique).

Elle sert à compenser la différence de marche induite par l'épaisseur non nulle de la séparatrice. En effet:

* sans la compensatrice:

le rayon (1) parcourt 1 épaisseur de verre

" (2) " 3 " "

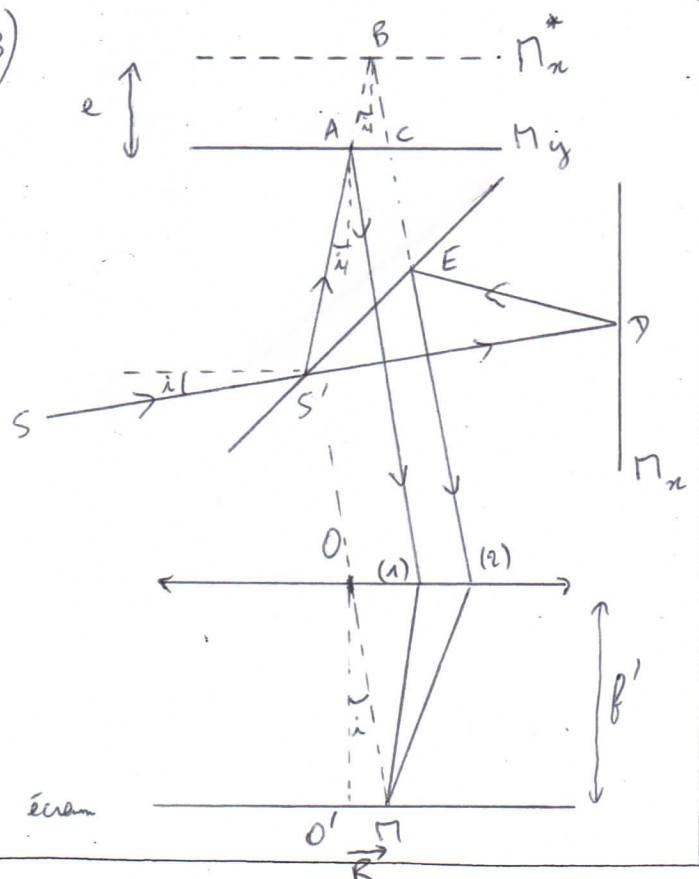
→ la séparatrice induit une différence de marche non désirable.

* avec la compensatrice:

le rayon (1) parcourt 4 épaisseurs de verre

" (2) " 4 " "

donc la même quantité.

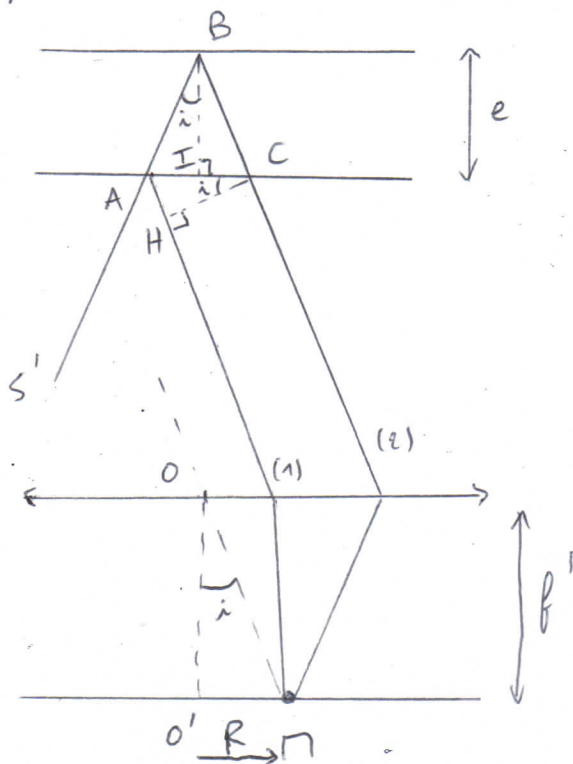


$$e = |L_x - L_y|$$

$$(S'B) = (S'D) \text{ et } (BE) = (DE)$$

par construction de Π_n^*

→ le problème est équivalent à une lame d'air:



$$\delta = (SN)_2 - (SN)_1 = AB + BC + (CM) - AH - (HM)$$

or $(CM) = (HM)$ grâce au principe de retour inverse de la lumière et au théorème de Talbot

$$AB = BC = \frac{e}{\cos i} \quad (\text{triangle } (ABI))$$

$$AH = AC \sin i \quad (\text{triangle } (ACH))$$

$$AC = 2AI$$

$$AI = e \tan i \quad (\text{triangle } (ABI))$$

$$\Rightarrow \delta = \frac{2e}{\cos i} - 2e \tan i \sin i$$

$$\delta = \frac{2e}{\cos i} \left(\underbrace{1 - \sin^2 i}_{\cos^2 i} \right) = 2e \cos i$$

$$\boxed{\delta = 2e \cos i}$$

Quid des réflexions déphasantes?

→ sur chaque miroir (Π_n et Π_y), les rayons subissent un allongement de phase de π
↳ ça se compense au niveau de δ

→ sur la séparatrice:

- le rayon (1) subit un allongement de phase de π
(réflexion déphasante: $r = \frac{1-n}{1+n} < 0$)
- le rayon (2) ne subit pas de réflexion déphasante
(réflexion vers air: $r = \frac{n-1}{n+1} > 0$)

$$\text{or } \delta = (SN)_2 - (SN)_1 \quad \text{et } r = \pi \Leftrightarrow \delta = \frac{\lambda}{2}$$

$$\begin{aligned} \text{si } L_x > L_y : \delta &= 2e \cos i - \frac{\lambda}{2} \\ \text{si } L_x < L_y : \delta &= 2e \cos i + \frac{\lambda}{2} \end{aligned}$$

Pas sûr que dans cette question, il faille considérer les réflexions déphasantes... ?!

Idem pour la question suivante...

Les franges sont caractérisées par $E = c \frac{t}{\lambda} \Rightarrow r = c \frac{t}{\lambda}$

$$\Rightarrow \delta = c \frac{t}{\lambda} \Rightarrow 2e \cos i = c \frac{t}{\lambda} \Rightarrow i = c \frac{t}{\lambda}$$

$$\Rightarrow R = c \frac{t}{\lambda} \quad (R = f' \tan i)$$

→ les franges sont des anneaux de centre O' .

$$4) \text{ Avec } \delta = 2e \cos i, \quad P = \frac{\delta}{\lambda} = \frac{2e \cos i}{\lambda}$$

Au centre de la figure d'interférences, $R=0, i=0$

$$\Rightarrow P_0 = \frac{2e}{\lambda} = \frac{2 \times 3,0 \cdot 10^{-3}}{600 \cdot 10^{-9}} = 1,0 \cdot 10^4$$

$$\text{Avec } \delta = 2e \cos i \pm \frac{\lambda}{2}, \quad P_0 = 1,0 \cdot 10^4 \pm \frac{1}{2} = 1,0 \cdot 10^4$$

$$P = \frac{2e}{\lambda} \cos i = P_0 \cos i = P_0 \left(1 - \frac{i^2}{2} \right) < P_0$$

DL car i faible pour le 1^{er} anneau (car P_0 "grand", e "grand" → beaucoup d'anneaux).

Supposons que P_0 est entier :

Pour le 1^{er} anneau brillant : $P_1 = P_0 - 1$

(1^{er} entier en-dessous de P_0)

$$\Rightarrow P_0 \left(1 - \frac{i_1^2}{2}\right) = P_0 - 1$$

$$1 - \frac{i_1^2}{2} = 1 - \frac{1}{P_0} \Rightarrow i_1 = \sqrt{\frac{2}{P_0}}$$

$$i_1 = \sqrt{\frac{2}{1,0 \cdot 10^4}} = \frac{1,4}{1,0 \cdot 10^2} = 0,014 \text{ rad}$$

triangle (OO'n) : $R_1 = f' \tan i_1 \approx f' i_1$

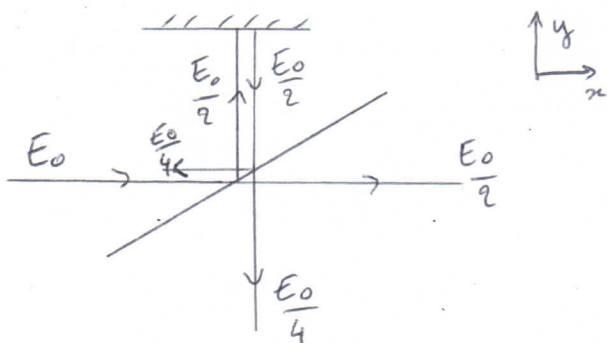
$$\Rightarrow R_1 = 10,0 \cdot 10^{-2} \times 0,014 \text{ rad} \\ = 1,4 \cdot 10^{-3} \text{ m} \quad \text{si } P_0 \text{ est entier}$$

Si P_0 n'est pas entier, on sera autour de cette valeur.

$$\Rightarrow \boxed{R_1 \approx 1 \text{ mm}} \quad (\text{avec 1 chiffre significatif})$$

B) Détection des ondes gravitationnelles :

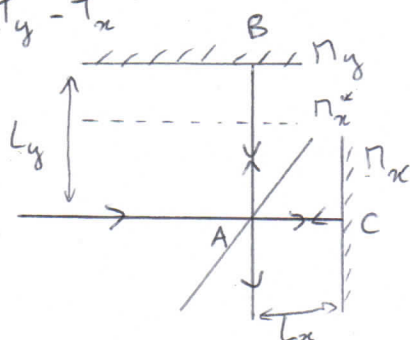
5)



Le faisceau en question subit 2 réflexions.

$$\Rightarrow \boxed{\text{éclairement} = \frac{E_0}{4}}$$

$$6) \quad \varphi = \varphi_y - \varphi_x$$



$$\delta = n_y AB + n_y BA - (n_x AC + n_x CA)$$

$$= 2n_y L_y - 2n_x L_x$$

cf 3) / réflexion déphasante $\Rightarrow$ allongement de π de φ_y

$$\Rightarrow \varphi = \frac{2\pi\delta}{\lambda} + \pi$$

$$\Rightarrow \boxed{\varphi = \frac{4\pi}{\lambda} (n_y L_y - n_x L_x) + \pi}$$

7) Si l'éclairement est divisé par 4 (cf 5), c'est que l'amplitude est divisée par 2 ($E = \underline{\underline{S S^*}}$)

$$\Rightarrow \begin{cases} \underline{S}_1 = \frac{S_0}{2} e^{j\varphi_y} \\ \underline{S}_2 = \frac{S_0}{2} e^{j\varphi_x} \end{cases}$$

$$\underline{S}_y = \underline{S}_1 + \underline{S}_2 = \frac{S_0}{2} (e^{j\varphi_y} + e^{j\varphi_x})$$

$$E_y = \underline{S}_y \underline{S}_y^* = \frac{S_0^2}{4} (e^{j\varphi_y} + e^{j\varphi_x})(e^{-j\varphi_y} + e^{-j\varphi_x})$$

$$E_y = \frac{S_0^2}{4} (1 + 1 + e^{j(\varphi_y - \varphi_x)} + e^{-j(\varphi_y - \varphi_x)})$$

$$E_y = \frac{S_0^2}{4} (2 + \underbrace{e^{j\varphi} + e^{-j\varphi}}_{2 \cos \varphi})$$

$$\text{or } E_0 = S_0^2$$

$$\Rightarrow \boxed{E_y = \frac{E_0}{2} (1 + \cos \varphi)}$$

8) La phase induite par la dépendance en y de L

$$\text{est } 2\pi f_0 \frac{y}{c} \approx \frac{2\pi f_0 D}{c} = \frac{2\pi \cdot 1,10^3 \times 1}{3 \cdot 10^8}$$

$$\approx 2 \cdot 10^{-5} \text{ rad} \ll 1 \text{ rad} !!$$

$$\Rightarrow \cos\left(2\pi f_0 \left(t - \frac{y}{c}\right)\right) \approx \cos(2\pi f_0 t)$$

9) φ dépend de n_x et n_y , qui varient sinusoidalement avec t à la fréquence $f_0 = 1 \text{ kHz}$.

$$\frac{1}{f_0} = 10^{-3} \text{ s} \gg T = 10^{-9} \text{ s}$$

$\Rightarrow \varphi$ varie "peu" durant le temps d'intégration du détecteur $\Rightarrow \langle \cos \varphi \rangle$ varie dans le temps, ce qui permet de détecter les ondes gravitationnelles.

$$10) \frac{E_y}{E_0} = \frac{1}{2} \left(1 + \cos \left(\frac{4\pi}{\lambda} (n_y L_y - n_x L_x) + \pi \right) \right)$$

$$= \frac{1}{2} \left(1 - \cos \left(\frac{4\pi}{\lambda} ((1+I)L_y - (1-I)L_x) \right) \right)$$

$$= \frac{1}{2} \left(1 - \cos \left(\underbrace{\frac{4\pi}{\lambda} (L_y - L_x)}_a + \underbrace{\frac{4\pi}{\lambda} I(L_x + L_y)}_{b \ll 1} \right) \right)$$

$$\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$$

$$\approx \cos a - b \sin a$$

$\uparrow$
 $b \ll 1$

$$\text{on pose } \varphi_0 = \frac{4\pi}{\lambda} (L_y - L_x)$$

$$\text{et alors: } \frac{E_y}{E_0} = \frac{1 - \cos \varphi_0}{2} + \frac{2\pi(L_x + L_y)I(t) \sin \varphi_0}{\lambda}$$

11) En l'absence d'onde gravitationnelle, $I = 0$,

$$E_y = E_0 \left(\frac{1 - \cos \varphi_0}{2} \right)$$

$$\Rightarrow \Delta E_y = E_0 \frac{2\pi(L_x + L_y)I(t) \sin \varphi_0}{\lambda}$$

$$P_y \propto E_y$$

$$\Rightarrow \Delta P_y = P_{\text{incident}} \frac{2\pi(L_x + L_y)I(t) \sin \varphi_0}{\lambda}$$

$$\text{max si } \varphi_0 = \frac{\pi}{2} + k\pi \quad k \in \mathbb{Z} \quad (\sin \varphi_0 = \pm 1)$$

$$\Delta P_{\text{max}} = P_{\text{incident}} \frac{2\pi(L_x + L_y)I}{\lambda}$$

$$\Delta P_{\text{max}} = 10 \frac{2\pi(3 \cdot 10^3 + 3 \cdot 10^3) 10^{-21}}{600 \cdot 10^{-9}}$$

$$\Rightarrow \Delta P_{\text{max}} = 6 \cdot 10^{-10} \text{ W}$$

c) Seuil de détection:

$$12) \text{ puissance moyenne} = \frac{\text{énergie détectée pendant } T}{T} = \frac{\text{nombre moyen de photons pendant } T \times \text{énergie d'un photon}}{T}$$

$$\langle P_y \rangle = \frac{\langle N \rangle \frac{hc}{\lambda}}{T}$$

$$\Rightarrow \langle N \rangle = \frac{\lambda T}{hc} \langle P_y \rangle$$

$$13) \langle P_y \rangle = \frac{hc}{\lambda T} \langle N \rangle$$

$$\Rightarrow \Delta P_y = \frac{hc}{\lambda T} \Delta N = \frac{hc}{\lambda T} \sqrt{\langle N \rangle} = \Delta P_y$$

$$\text{or } \langle N \rangle = \frac{\lambda T}{hc} \langle P_y \rangle$$

$$\Rightarrow \Delta P_y = \sqrt{\frac{hc \langle P_y \rangle}{\lambda T}}$$

$$14) \varphi_0 = \frac{\pi}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{E_y}{E_0} = \frac{1 - \cos \varphi_0}{2} + \frac{2\pi(L_x + L_y)I(t) \sin \varphi_0}{\lambda} = \frac{1}{2} + \frac{2\pi(L_x + L_y)I}{\lambda}$$

$$\Rightarrow \frac{E_y}{E_0}(0) = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{E_y}{E_0}(t) - \frac{E_y}{E_0}(0) = \frac{2\pi(L_x + L_y)I}{\lambda}$$

$$\text{or } P_y \propto E_y$$

$$\Rightarrow \frac{\langle P_y \rangle(t) - \langle P_y \rangle(0)}{2 \langle P_y \rangle} = \frac{2\pi(L_x + L_y)I}{\lambda} \quad E_y \approx \frac{E_0}{2} \text{ d'où le coeff } 2$$

$$\Rightarrow \langle P_y \rangle \frac{4\pi (L_x + L_y) T_n}{\lambda} > \sqrt{\frac{R c \langle P_y \rangle}{\lambda T}}$$

$$\Rightarrow T_n > \frac{1}{4\pi (L_x + L_y)} \sqrt{\frac{R c \lambda}{\langle P_y \rangle T}}$$

coeff 2/énoncé $\Rightarrow$?
 $\Rightarrow$ erreur d'énoncé?

$T_{n \text{ mini}}$ mesurable.

$$T_n = \frac{1}{4\pi (3 \cdot 10^3 + 3 \cdot 10^3)} \sqrt{\frac{6,62 \cdot 10^{-34} \times 3,0 \cdot 10^8 \times 600 \cdot 10^9}{10 \cdot 10^{-4}}}$$

$$T_n = \frac{10^{-4}}{6} \sqrt{\frac{100 \cdot 10^{-33}}{10^{-3}}} = \frac{10^{-18}}{6}$$

$$T_n = 1 \cdot 10^{-19} > 10^{-21}$$

$\Rightarrow$ cette onde gravitationnelle ne pourra pas être détectée $\Rightarrow$ il faut améliorer le seuil de détection de l'interféromètre.

D) Etude d'une cavité résonante:

15) équation de Maxwell-Gauss: $\text{div } \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} = 0$
 pas de charges (vide)

équation de Maxwell-Faraday: $\text{rot } \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$

équation de Maxwell-Ampère: $\text{rot } \vec{B} = \mu_0 \vec{j} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$
 pas de courants (vide)

$$\begin{aligned} \text{rot}(\text{rot } \vec{E}) &= \text{grad}(\text{div } \vec{E}) - \Delta \vec{E} \\ &= \text{rot}\left(-\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}\right) = -\frac{\partial}{\partial t} \text{rot } \vec{B} \\ &= -\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right) = -\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \Delta \vec{E} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \square \vec{E} = \vec{0}$$

16) * $\vec{E} \propto \vec{u}_y \quad \forall n \quad \forall t \Rightarrow$ onde polarisée rectilignement selon y

$$* \vec{E}(x, t) = g(x) f(t) \vec{u}_y$$

$\uparrow \uparrow$
variables séparées

$\Rightarrow$ onde stationnaire

* $\vec{E}$ ne dépend que de x (et t), pas de y et z

$\Rightarrow$ onde plane

* une seule fréquence $f \Rightarrow$ onde monochromatique

17) $\vec{E} = \vec{0}$ dans un conducteur parfait

L'onde ne pénètre pas dans le conducteur, l'épaisseur de peau δ est nulle.

loi d'Ohm locale: $\vec{j} = \gamma \vec{E}$ or $\gamma \rightarrow \infty$

et $\vec{j}$ fini (en fait nul) $\Rightarrow \vec{E} = \vec{0}$

18) $\vec{E} \propto \vec{u}_y \Rightarrow \vec{E}$ est tangent aux interfaces conducteur / vide $\Rightarrow \vec{E}$ est continu en $x=0$ et $x=L$, or $\vec{E}(0^-, t) = \vec{E}(L^+, t) = \vec{0} \quad \forall t$

$$\Rightarrow \vec{E}(0^+, t) = \vec{E}(L^-, t) = \vec{0} \quad \forall t$$

$$\Rightarrow g(x=0) = g(x=L) = 0$$

19) $\Delta \vec{E} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \vec{0}$ or $\vec{E} = E_y \vec{u}_y = g(x) \cos 2\pi f t \vec{u}_y$

$$\Rightarrow \Delta E_y - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 E_y}{\partial t^2} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{\partial^2 E_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 E_y}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 E_y}{\partial t^2} = 0$$

$$\Rightarrow g''(x) \cos 2\pi f t - \frac{1}{c^2} (2\pi f)^2 (-\cos 2\pi f t) = 0$$

$\uparrow$
 $\forall t$

$$\Rightarrow g''(x) + \left(\frac{2\pi f}{c}\right)^2 g(x) = 0$$

$$\Rightarrow g(x) = A \cos\left(\frac{2\pi f}{c} x\right) + B \sin\left(\frac{2\pi f}{c} x\right)$$

20) Conditions aux limites:

* $g(0) = 0 \Rightarrow A = 0$

$\Rightarrow g(x) = B \sin\left(\frac{2\pi f}{c} x\right)$

* $g(L) = 0 \Rightarrow \sin \frac{2\pi f L}{c} = 0$

$\Rightarrow \frac{2\pi f L}{c} = n\pi, n \in \mathbb{N}^*$

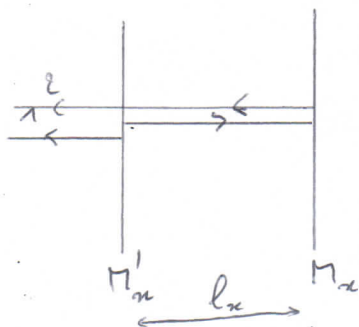
$\Rightarrow f_n = n \frac{c}{2L}, n \in \mathbb{N}^*$

$\lambda_n = \frac{c}{f_n} \Rightarrow \lambda_n = \frac{2L}{n}, n \in \mathbb{N}^*$

Un champ électromagnétique harmonique ne peut exister dans la cavité que pour certaines fréquences telles que $f_n = n \frac{c}{2L}, n \in \mathbb{N}^*$

E) Etude du dispositif complet:

21) $\varphi = \frac{2\pi \delta}{\lambda}$ avec δ qui correspond à un aller-retour dans la cavité



$\delta = 2 n \lambda_n + \frac{\lambda}{2} \times 2$

↑ aller-retour
le rayon 2 se souli
2 réflexions déphasantes de
plus (une sur chaque miroir)

$\Rightarrow \varphi = \frac{4\pi n \lambda_n}{\lambda} + 2\pi$

22) On veut $\varphi = 2k\pi, k = 2, 3, 4, 5, \dots$

$\Rightarrow 2k\pi = \frac{4\pi n \lambda_n}{\lambda} + 2\pi$

$\Rightarrow (2k-2) = \frac{4n \lambda_n}{\lambda}$

ou en l'absence d'onde gravitationnelle: $n_n = 1$

$\Rightarrow \lambda = \frac{4 \lambda_n}{2k-2} = \frac{4 \lambda_n}{2(k-1)} = \frac{2 \lambda_n}{n}$
 $n = k-1$

$\Rightarrow \lambda = \frac{2 \lambda_n}{n}, n \in \mathbb{N}^*$

cf D) 20), on retrouve le même résultat

$\Rightarrow$ il faut accorder la longueur de la cavité (λ_n) à l'onde (longueur d'onde λ), de manière à ce que l'onde monochromatique puisse "vivre" dans la cavité.

23) $S'_y = -S_2 \exp\left(j \frac{4\pi F(-I(t)) \lambda_y}{\lambda}\right)$

$(S_1 \rightarrow S_2, \lambda_n \rightarrow \lambda_y, I \rightarrow -I)$
 $(n_n = 1 - I \rightarrow n_y = 1 + I)$

24) On a toujours $\frac{E_y}{E_0} = \frac{1}{2} (1 + \cos \varphi)$ (cf B) 7)

avec $\varphi = \varphi_y - \varphi_n = \frac{4\pi}{\lambda} \left((1+I)(L_y - l_y) - (1-I)(L_n - l_n) \right)$
 $L_y = l_y \Rightarrow$ perd d'effet

hors cavité $\lambda_y = n \frac{\lambda}{2}, \lambda_n = m \frac{\lambda}{2}$ (cavité accordée)
 $+ \left(\frac{4\pi F I \lambda_y}{\lambda} + \frac{4\pi F I \lambda_n}{\lambda} \right) + \pi$ réflexion déphasée / reproduite

↑ dans cavités $I \rightarrow -I, \varphi_y \rightarrow \varphi_n$
 $\varphi = \frac{4\pi}{\lambda} (L_y - L_n) + \frac{4\pi}{\lambda} F I (L_n + L_y) + \pi$

$L_y = l_y, L_n = l_n$
 $\Rightarrow \dots$ par analogie à Q 10): on remplace I par $F I$

$\Rightarrow \frac{E_y}{E_0} = \frac{1 - \cos \varphi_0}{2} + \frac{2\pi (L_n + l_y) F I \sin \varphi_0}{\lambda}$

$$25) \theta_0 = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \frac{E_y}{E_0} = \frac{1}{2} + \frac{2\pi(l_x + l_y) F L}{\lambda}$$

$$F = \frac{1+n}{1-n} = \frac{1,935}{0,005} = \frac{1995}{5} \approx 399 \approx 4 \cdot 10^2$$

Par rapport à l'étude précédente, on remplace L par FL .

$\Rightarrow I_{\text{mini mesurable}}$ est divisé par F .

$\Rightarrow$ la sensibilité du dispositif est multipliée par $F \approx 4 \cdot 10^2$

$$I_{\text{mini mesurable}} = \frac{1 \cdot 10^{-13} \text{ (cf 14)}}{4 \cdot 10^2}$$

$$\approx 3 \cdot 10^{-22} < 10^{-21}$$

$\Rightarrow$ donc, avec ce dispositif, on peut détecter des ondes gravitationnelles!

Les ondes gravitationnelles

Partie 3:

1) * $\vec{E}$ ne dépend que de la variable d'espace x

→ dans un plan $x = c \cdot t$ et à l'instant t ,
l'onde est la même en tout point

⇒ onde plane

* l'onde est progressive et se propage dans
le sens des x croissants (si $k > 0$) car
la phase est en $(\omega t - kx)$

* l'onde est monochromatique à la pulsation ω

⇒ c'est donc une OPPM

* elle est polarisée rectilignement selon z .

car $\vec{E} \propto \vec{u}_z \quad \forall x, \forall t$

* son amplitude est E_0 .

* son module d'onde est k

* Dans le vide : $c = \frac{\omega}{k}$

* l'onde est transverse (direction de propagation $\perp$ polarisation)

$$2) f = \frac{c}{\lambda} = \frac{3 \cdot 10^8}{600 \cdot 10^{-3}} \quad \boxed{f = 5 \cdot 10^{14} \text{ Hz}}$$

3) relation de structure pour une OPPM:

$$\vec{B} = \frac{\vec{k} \wedge \vec{E}}{\omega} = \frac{k \vec{u}_x \wedge E_0 \exp(j(\omega t - kx)) \vec{u}_z}{\omega}$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{B} = -\frac{E_0}{c} \exp(j(\omega t - kx)) \vec{u}_y}$$

(relation de dispersion dans le vide : $c = \frac{\omega}{k}$)

$$\vec{\Pi} = \frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_0} \Rightarrow \langle \vec{\Pi} \rangle = \frac{1}{2} \operatorname{Re} \left(\frac{\vec{E} \wedge \vec{B}^*}{\mu_0} \right)$$

$$\langle \vec{\Pi} \rangle = \frac{1}{2\mu_0} \operatorname{Re} \left(E_0 \exp(j(\omega t - kx)) \vec{u}_z \wedge \left(-\frac{E_0}{c} \exp(-j(\omega t - kx)) \vec{u}_y \right) \right)$$

$$\boxed{\langle \vec{\Pi} \rangle = \frac{E_0^2}{2\mu_0 c} \vec{u}_x}$$

$x \wedge \vec{u}_z$ OK car
l'onde se propage dans

le sens des x croissants.

$$4) \langle P \rangle = \langle \vec{\Pi} \rangle \cdot S \vec{u}_x$$

$$\boxed{\langle P \rangle = \frac{E_0^2 S}{2\mu_0 c}}$$

$$\Rightarrow E_0 = \sqrt{\frac{2\mu_0 c \langle P \rangle}{S}}$$

$$E_0 = \sqrt{\frac{2 \times 4\pi \cdot 10^{-7} \times 3,0 \cdot 10^8 \times 40}{\pi \times (5 \cdot 10^{-2})^2}}$$

$$= \sqrt{\frac{24 \times 4 \cdot 10^2}{25 \cdot 10^{-4}}} \approx 2 \cdot 10^3 \text{ V} \cdot \text{m}^{-1}$$

$$\Rightarrow \boxed{E_0 = 2 \cdot 10^3 \text{ V} \cdot \text{m}^{-1}}$$

5) équation de Maxwell-Ampère:

$$\operatorname{rot} \vec{B} = \mu_0 \vec{j} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

conducteur ⇒ loi d'Ohm locale : $\vec{j} = \gamma \vec{E}$

$$\Rightarrow \operatorname{rot} \vec{B} = \mu_0 \left(\gamma \vec{E} + \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right)$$

$$\frac{\|\gamma \vec{E}\|}{\|\epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}\|} \underset{\text{odg}}{\sim} \frac{\gamma E}{\epsilon_0 \frac{E}{T}} = \frac{\gamma}{\epsilon_0 f} = \frac{1,0 \cdot 10^7}{8,85 \cdot 10^{-12} \times 5 \cdot 10^{14}} \approx \frac{10^7}{5 \cdot 10^3} \approx 2 \cdot 10^3 \gg 1$$

⇒ le courant de conduction est très grand
devant le courant de déplacement.

$$\Rightarrow \boxed{\operatorname{rot} \vec{B} = \mu_0 \gamma \vec{E}}$$

$$\begin{aligned}
 6) \quad \vec{\text{rot}}(\vec{\text{rot}} \vec{E}) &= \vec{\text{grad}}(\text{div} \vec{E}) - \Delta \vec{E} \\
 &= \vec{\text{grad}}\left(\frac{1}{\mu_0 \sigma} \text{div}(\vec{\text{rot}} \vec{B})\right) - \Delta \vec{E} \\
 &\quad \text{la divergence d'un rotationnel est nulle} \\
 &= \vec{\text{rot}}\left(-\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}\right) = -\frac{\partial}{\partial t} \vec{\text{rot}} \vec{B} \\
 &\quad \text{équation de Maxwell-Faraday} \\
 &= -\mu_0 \sigma \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}
 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \Delta \vec{E} - \mu_0 \sigma \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \vec{0}$$

$$7) \text{ On cherche } \vec{E}_t \text{ de la forme: } \vec{E}_t = E_{0t} e^{j(\omega t - kx)} \vec{u}_z$$

$$\Rightarrow \Delta \vec{E}_t = (-jk)^2 \vec{E}_t \quad (= \frac{\partial^2 \vec{E}_t}{\partial x^2})$$

$$\frac{\partial \vec{E}_t}{\partial t} = j\omega \vec{E}_t$$

$$\Rightarrow -k^2 - \mu_0 \sigma j\omega = 0$$

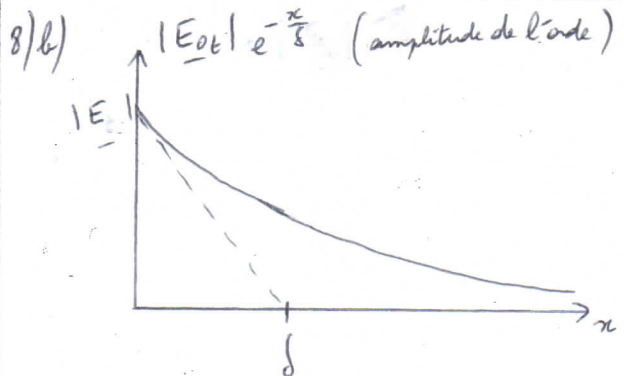
$$\Rightarrow k^2 = -j\mu_0 \sigma \omega = -\frac{2j}{\delta^2}$$

$$k^2 = \frac{2}{\delta^2} e^{-j\frac{\pi}{2}} \Rightarrow k = \pm \frac{\sqrt{2}}{\delta} e^{-j\frac{\pi}{4}}$$

$$k = \pm \frac{\sqrt{2}}{\delta} \frac{1-j}{\sqrt{2}} \Rightarrow k = \pm \frac{1-j}{\delta}$$

$$\begin{aligned}
 8) a) \quad \vec{E}_t &= E_{0t1} e^{j(\omega t - \frac{1-j}{\delta} x)} \vec{u}_z \\
 &\quad + E_{0t1} e^{j(\omega t + \frac{1-j}{\delta} x)} \vec{u}_z \\
 \vec{E}_t &= E_{0t1} e^{-\frac{x}{\delta}} e^{j(\omega t - \frac{x}{\delta})} \vec{u}_z + E_{0t1} e^{+\frac{x}{\delta}} e^{j(\omega t + \frac{x}{\delta})} \vec{u}_z \\
 &\quad \text{car } e^{\frac{x}{\delta}} \rightarrow 0 \text{ et propage dans le sens des } x \text{ décroissantes}
 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \vec{E}_t = E_{0t} e^{-\frac{x}{\delta}} e^{j(\omega t - \frac{x}{\delta})} \vec{u}_z$$



δ est l'épaisseur de peau: au bout de quelques δ , $\vec{E} \approx \vec{0}$, $\vec{B} \approx \vec{0}$, $\vec{j} \approx \vec{0}$ dans le conducteur.

δ caractérise la profondeur de pénétration de l'onde dans le conducteur.

$$\delta = \sqrt{\frac{2}{\mu_0 \sigma \omega}} = \sqrt{\frac{2}{4\pi \cdot 10^{-7} \times 1,0 \cdot 10^7 \times \pi \times 5 \cdot 10^{14}}}$$

$$\delta = \frac{1}{\sqrt{200 \cdot 10^{14}}} = \frac{1}{\sqrt{2}} 10^{-8} = \frac{\sqrt{2}}{2} 10^{-8} = \frac{1,4}{2} \cdot 10^{-8} = 0,7 \cdot 10^{-8} \Rightarrow \delta = 7 \cdot 10^{-9} \text{ m}$$

$$\Rightarrow \delta = 7 \text{ nm} \text{ extrêmement faible!}$$

$\Rightarrow$ l'onde ne pénètre quasiment pas dans le conducteur.

8) c) Deux points d'espace-temps voisins ont même phase si: $\varphi(x, t) = \varphi(x+dx, t+dt)$

$$\Rightarrow \omega t - \frac{x}{\delta} = \omega(t+dt) - \frac{x+dx}{\delta}$$

$$\Rightarrow \omega dt - \frac{dx}{\delta} = 0$$

$$v_p = \frac{dx}{dt} \Rightarrow v_p = \omega \delta$$

$$v_p = 2\pi \times 5 \cdot 10^{14} \times 7 \cdot 10^{-9} \approx 2 \times 100 \cdot 10^{14} \cdot 10^{-9}$$

$$v_p \approx 2 \cdot 10^7 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

$$8) d) \frac{dP_{\text{onde}}}{dt} = \vec{j} \cdot \vec{E} = \sigma E^2$$

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{dP_{\text{Joule}}}{dt} \right\rangle &= \frac{\gamma}{2} \operatorname{Re}(\vec{E} \cdot \vec{E}^*) \\ &= \frac{\gamma}{2} \vec{E} \cdot \vec{E}^* = \frac{\gamma}{2} E_{0t} E_{0t}^* e^{-\frac{2\pi}{\delta} x} \\ &\quad e^{j(\omega t - \frac{\pi}{\delta} x)} e^{-j(\omega t - \frac{\pi}{\delta} x)} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \left\langle \frac{dP_{\text{Joule}}}{dt} \right\rangle = \frac{\gamma}{2} |E|^2 E_0^2 e^{-\frac{2\pi}{\delta} x}$$

3) Cette approximation est fondée si $\delta \ll L$

ce qui est le cas ! (l'onde ne pénètre que sur une épaisseur de l'ordre de δ).

$$\begin{aligned} 10) \left\langle P_{\text{Joule}} \right\rangle &= \int_0^L \left\langle \frac{dP_{\text{Joule}}}{dt} \right\rangle dx \\ &= \int_0^L \frac{\gamma}{2} |E|^2 E_0^2 e^{-\frac{2\pi}{\delta} x} dx \\ &= \frac{\gamma}{2} |E|^2 E_0^2 S \int_0^L e^{-\frac{2\pi}{\delta} x} dx \\ &= \frac{\gamma}{2} |E|^2 E_0^2 S \left(-\frac{\delta}{2} \right) \left[e^{-\frac{2\pi}{\delta} x} \right]_0^L \\ &\quad \underbrace{e^{-\frac{2\pi}{\delta} L} - 1}_{\approx -1} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \left\langle P_{\text{Joule}} \right\rangle = \frac{\gamma \delta S |E|^2 E_0^2}{4}$$

11) Quel est ce volume ? Volume d'épaisseur L ou δ ? Sachant que l'énergie libérée par effet Joule l'est essentiellement sur une épaisseur de l'ordre de δ --- $\Rightarrow$ pas de la... Partons sur le volume d'épaisseur δ ---

$$\left\langle P_{\text{Joule}} \right\rangle \Delta T = \underbrace{\rho(S\delta)}_{\substack{\text{masse} \\ \text{volumique} \\ \text{ou } L? \\ \text{masse}}} \underbrace{c}_{\substack{\text{capacité thermique} \\ \text{massique}}} \Delta T$$

$$\Delta T = \frac{\left\langle P_{\text{Joule}} \right\rangle}{\rho S \delta c}$$

$$\left\langle P_{\text{Joule}} \right\rangle = \frac{1,0 \cdot 10^3 \times 7 \cdot 10^{-3} \times \pi \times (5,0 \cdot 10^{-2})^2 \times (10^{-4})^2}{\times (2 \cdot 10^3)^2}$$

$$\approx 100 \times 5 \times 10^{7-3-4-8+6}$$

$$\left\langle P_{\text{Joule}} \right\rangle \approx 5 \cdot 10^{-6} \text{ W}$$

$$\begin{aligned} \Delta T &= \frac{5 \cdot 10^{-6}}{8,0 \cdot 10^3 \times \pi \times (5,0 \cdot 10^{-2})^2 \times 7 \cdot 10^{-3} \times 400} \\ &= \frac{5 \cdot 10^{-6}}{25 \times 100 \times 100 \times 7 \times 10^{-3} \times 10^{-4} \times 10^{-3}} \\ &= \frac{1}{35} \Rightarrow \Delta T \approx 3 \cdot 10^{-2} \text{ K} \end{aligned}$$

Si on considère que l'échauffement se fait sur une épaisseur de l'ordre de L (on remplace δ par L)

$$\begin{aligned} \Rightarrow \Delta T &= 3 \cdot 10^{-2} \times \frac{\delta}{L} = 3 \cdot 10^{-2} \times \frac{7 \cdot 10^{-3}}{1 \cdot 10^{-3}} \\ &= 20 \cdot 10^{-2} \Rightarrow \Delta T \approx 2 \cdot 10^{-1} \text{ K} \end{aligned}$$

12) a) Si l'épaisseur du miroir varie, alors la longueur des bras de l'interféromètre varie, et alors la différence de marche varie, ce qui n'est pas souhaité par ce motif. De plus, ça pourrait déformer les miroirs car le LASER n'arrive que sur une surface S des miroirs $\Rightarrow$ les miroirs pourraient ne plus être plans (déformation locale de la surface des miroirs).

Avec ce dispositif, il faut vraiment que la différence de marche dans l'interféromètre ne varie qu'au passage d'une onde gravitationnelle (cf partie précédente, la puissance varie très peu au passage d'une onde gravitationnelle). $R_g: 10^{-15} \lambda \approx 10^{-22} \text{ m}$

12) b) $\lambda_d = \frac{1}{\delta} \frac{\Delta \delta}{\Delta T}$ $\ll 2 \cdot 10^{-18} \text{ m}$ (déplacement minimal détectable d'après énoncé).

$$\Rightarrow \Delta T_{\text{min}} = \frac{\Delta \delta_{\text{min}}}{\lambda_d \delta} = \frac{10^{-15} \lambda}{\lambda_d \delta}$$

$$\Delta T_{\text{min}} = \frac{10^{-15} \times 600 \cdot 10^{-3}}{1,0 \cdot 10^{-5} \times 7 \cdot 10^{-9}} \approx \frac{10^{-22}}{10^{-14}}$$

$$\Delta T_{\text{min}} \approx 1 \cdot 10^{-8} \text{ K} \quad \text{très faible...}$$

$$\text{En } 1 \Delta \quad \Leftrightarrow \quad \Delta T = 3 \cdot 10^{-2} \text{ K}$$

$$\Delta t \quad \Leftrightarrow \quad \Delta T = 1 \cdot 10^{-8} \text{ K}$$

$$\Rightarrow \Delta t = \frac{1 \cdot 10^{-8}}{3 \cdot 10^{-2}} = \boxed{3 \cdot 10^{-7} \Delta = \Delta t}$$

très faible...

$\Rightarrow$ dans ces conditions, on ne peut pas utiliser cet interféromètre de Michelson pour détecter des ondes gravitationnelles...

13) équation de la chaleur: $\mu c \frac{\partial T}{\partial t} = \lambda \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$

en ordre de grandeur: $\mu c \frac{T}{t} = \lambda \frac{T}{L^2}$

$$\Rightarrow \boxed{t \approx \frac{\mu c}{\lambda} L^2}$$

$$t \approx \frac{8,0 \cdot 10^3 \times 400}{400} (1,0 \cdot 10^{-3})^2$$

$$\boxed{t \approx 8 \cdot 10^{-3} \Delta}$$

Cette durée est beaucoup plus grande que le Δt produisant la détection à son maximum de tolérance $\Rightarrow$ la diffusion n'est pas assez efficace pour éviter l'élévation de température trop importante.

$\Rightarrow$ il faut mettre en place une régulation thermique et ne pas utiliser un LASER trop puissant (il faut trouver un compromis).

$\Rightarrow$ pas clair toutes ces applications numériques... !!