CHAMPS ÉLECTROMAGNÉTIQUES

Dr Alexis Drouard

Ce chapitre présente les fondements de l'électromagnétisme en régime variable, en étudiant la structure des ondes électromagnétiques et la propagation des champs electromagnétiques qui les caractérisent.

I. Les équations de Maxwell

Formulées en 1870, les équations de Maxwell sont le résultat d'une synthèse théorique des résultats de nombreuses expériences menées tout au long du siècle dans les domaines de l'électricité et du magnétisme[1]. Au nombre de quatre, ces équations relient les champs (électrique et magnétique) à leurs sources (respectivement les distributions de charges et de courant). Les équations de Maxwell sont :

[1] Les équations de Maxwell résutent d'une démarche indctive et sont des postulats dont la validité n'a pas été mise en défaut à ce jour. elles ne sont pas démontrables.

- des équations **linéaires**, ce qui assure de respecter le **principe de superposition**.
- des équations **indépendantes** du système de coordonnées.
- des équations valables dans tous les **milieux**, c'est-à-dire les milieux matériels mais aussi le vide.

Par la suite, la dépendance en position et en temps d'une fonction f sera notée $f(M,t)$, le point M désignant un point de l'espace.

1. Equation de Maxwell-Gauss

La distribution volumique de charge $\rho(M,t)$ est proportionnel à la divergence[2] du champ électrique $\vec{E}(M,t)$:

[2] Cet opérateur associe un champ vectoriel un scalaire dont la valeur caractérise la tendance du champ à diverger. Plus la valeur est négative, plus le champ converge ; plus elle est positive, plus le champ diverge.

$$\mathrm{div}(\vec{E}(M,t)) = \frac{\rho(M,t)}{\epsilon_0}$$

Géométriquement, cette équation signifie qu'en un point de l'espace donné, les lignes de champ électrique divergent (ou convergent) uniquement si la distribution de charge en ce point est non nulle. Plus précisement, les lignes de champ divergent si la distribution de charge est positive ; converge si si la distribution de charge est négative.

Sous forme intégrale, l'équation de Maxwell-Gauss correspond au théorème de Gauss pour les champs électriques statiques :

$$\oiint_{\mathcal{S}} \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{\mathcal{S}} = \frac{Q_{\mathrm{int}}}{\epsilon_0}$$

DÉMONSTRATION :
On intègre sur un volume $\mathcal{V}$ l'équation de Maxwell-Gauss :

$$\mathrm{div}(\vec{E}(M,t)) = \frac{\rho(M,t)}{\epsilon_0} \Rightarrow \iiint_{\mathcal{V}} \mathrm{div}(\vec{E}(M,t))\mathrm{d}\mathcal{V} = \iiint_{\mathcal{V}} \frac{\rho(M,t)}{\epsilon_0}\mathrm{d}\mathcal{V}$$

Or le théorème de Green-Ostrograsky stipule que l'intégrale de la divergence d'un champ vectoriel sur un volume est égale au flux de ce champ à travers le bord de ce volume :

$$\iiint_{\mathcal{V}} \mathrm{div}(\vec{a}(M,t))\mathrm{d}\mathcal{V} = \oiint_{\mathcal{S}} \vec{a}(M,t)\mathrm{d}\vec{\mathcal{S}}$$

En utilisant ce théorème et en remarquant que la charge contenue dans un volume donné est l'intégrale sur le volume de la densité de charge, il vient :

$$\begin{aligned}\mathrm{div}(\vec{E}(M,t)) = \frac{\rho(M,t)}{\epsilon_0} &\Rightarrow \oiint_{\mathcal{S}} \vec{E}(M,t)\mathrm{d}\vec{\mathcal{S}} = \frac{1}{\epsilon_0}\iiint \rho(M,t)\mathrm{d}\mathcal{V} \\ &\Rightarrow \iint_{\mathcal{S}} \vec{E}(M,t)\mathrm{d}\vec{\mathcal{S}} = \frac{Q_{\mathrm{int}}}{\epsilon_0} \quad \blacksquare\end{aligned}$$

Point-clé : Equation de Maxwell-Gauss

En tout point de l'espace et à chaque instante, le champ électrique $\vec{E}$ et la distribution volumique de charge ρ vérifient :

$$\mathrm{div}(\vec{E}(M,t)) = \frac{\rho(M,t)}{\epsilon_0}$$

avec $\epsilon_0 = \frac{1}{36\pi} \times 10^{-9}$ F.m^{-1} la permittivité diélectrique du vide. Cela traduit localement que le flux du champ électrique à travers une surface fermée est proportionnel à la charge contenue dans le volume délimité par cette surface.

APPLICATION : déterminer la divergence du champ électrostatique créé par une charge ponctuelle.

2. *Equation de Maxwell-Thompson*

La divergence du champ magnétique $\vec{B}(M,t)$ est nulle :

$$\text{div}(\vec{B}(M,t)) = 0$$

Géométriquement, cette équation signifie qu'en un point de l'espace donné, les lignes de champ magnétique ne peuvent jamais diverger ou converger. Autrement dit, il n'existe pas d'équivalent magnétique de la charge électrique[3]. Les lignes de champ magnétique sont toujours fermées : elles rebouclent sur elle-même[4].

Sous forme intégrale, l'équation de Maxwell-Thompson correspond à la nullité du flux magnétique à travers toute surface fermée :

$$\oint\!\!\!\oint_{\mathcal{S}} \vec{B} \cdot \mathrm{d}\vec{\mathcal{S}} = 0$$

DÉMONSTRATION :
On intègre sur un volume $\mathcal{V}$ l'équation de Maxwell-Thompson :

$$\text{div}(\vec{B}(M,t)) = 0 \Rightarrow \iiint_{\mathcal{V}} \text{div}(\vec{B}(M,t))\mathrm{d}\mathcal{V} = 0$$

Or le théorème de Green-Ostrograsky stipule que l'intégrale de la divergence d'un champ vectoriel sur un volume est égale au flux de ce champ à travers le bord de ce volume :

$$\iiint_{\mathcal{V}} \text{div}(\vec{a}(M,t))\mathrm{d}\mathcal{V} = \oint\!\!\!\oint_{\mathcal{S}} \vec{a}(M,t)\mathrm{d}\vec{\mathcal{S}}$$

En utilisant ce théorème, il vient :

$$\text{div}(\vec{B}(M,t)) = 0 \Rightarrow \oint\!\!\!\oint_{\mathcal{S}} \vec{B}(M,t)\mathrm{d}\vec{\mathcal{S}} = 0 \quad \blacksquare$$

Point-clé : Equation de Maxwell-Thompson

En tout point de l'espace et à chaque instant, le champ magnétique $\vec{B}$ vérifie :

$$\text{div}(\vec{B}(M,t)) = 0$$

Cela traduit localement que le flux du champ magnétique à travers une surface fermée est conservatif.

APPLICATION : déterminer la divergence du champ magnétostatique créé par un fil infini.

[3] Une charge électrique isolée est un monopôle électrique ; il n'existe pas de monopôle magnétique.

[4] Cette cartographie de champ est analogue à celle du dipôle électrique, d'où le nom de dipôle magnétique. Le pôle nord est la région d'où les boucles de champ proviennent ; le pôle sud celle où les boucles aboutissent.

3. *Equation de Maxwell-Faraday*

Le rotationnel[5] du champ électrique $\vec{E}(M,t)$ est égal à la dérivée partielle temporelle du champ magnétique $\vec{B}(M,t)$:

$$\vec{\mathrm{rot}}(\vec{E}(M,t)) = -\frac{\partial \vec{B}(M,t)}{\partial t}$$

Géométriquement, cette équation signifie qu'en un point de l'espace donné, si le champ magnétique varie au cours du temps, alors les lignes de champ électrique tendent à s'enrouler. Réciproquement, sans variation temporelle du champ magnétique, le champ électrique est irrotationnel. Il existe un couplage spatio-temporelle entre les champs électrique et magnétique qui est à l'origine des phénomènes d'induction.

Sous forme intégrale, l'équation de Maxwell-Faraday correspond à la loi de Lenz-Faraday :

$$e = -\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t}$$

où $e \doteq \oint_\ell \vec{E}(M,t)\mathrm{d}\vec{\ell}$ est la force électromotrice[6] parcourant le circuit fermé de longueur ℓ et $\Phi_B \doteq \iint \vec{B}(M,t)\cdot \mathrm{d}\vec{\mathcal{S}}$ le flux magnétique à travers la surface que délimite le circuit. Le signe négatif assure que la tension générée par induction produise un champ magnétique dont l'orientation s'oppose à celle du champ générateur, conformément à la loi de Lenz[7].

DÉMONSTRATION :
On intègre sur une surface $\mathcal{S}$ l'équation de Maxwell-Faraday :

$$\vec{\mathrm{rot}}(\vec{E}(M,t)) = -\frac{\partial \vec{B}(M,t)}{\partial t} \Rightarrow \iint_{\mathcal{S}} \vec{\mathrm{rot}}(\vec{E}(M,t))\cdot \mathrm{d}\vec{\mathcal{S}} = \iint_{\mathcal{S}} \frac{\partial \vec{B}(M,t)}{\partial t}\cdot \mathrm{d}\vec{\mathcal{S}}$$

Or le théorème de Stokes-Ampère stipule que le flux du rotationnel d'un champ vectoriel à travers une surface est égal à la circulation de ce champ à le long du contour orienté définissant cette surface :

$$\iint_{\mathcal{S}} \vec{\mathrm{rot}}(\vec{a}(M,t))\cdot \mathrm{d}\vec{\mathcal{S}} = \oint_\ell \vec{a}(M,t)\mathrm{d}\vec{\ell}$$

Les hypothèses du théorème de dérivation sous l'intégrale étant valides (existence de l'intégrale, dérivabilité de la fonction intégrée, domination de la dérivée) et la dérivée partielle portant bien sur une variable (le temps) différente de la variable d'intégration (l'espace), on peut permuter intégration et dérivée partielle :

$$\iint_{\mathcal{S}} \frac{\partial \vec{a}(M,t)}{\partial t}\cdot \mathrm{d}\vec{\mathcal{S}} = \frac{\partial}{\partial t}\iint_{\mathcal{S}} \vec{a}(M,t)\cdot \mathrm{d}\vec{\mathcal{S}}$$

[5] Cet opérateur associe à tout point d'un champ vectoriel un vecteur dont l'orientation et la norme traduisent respectivement la direction autour de laquelle et l'importance à laquelle les lignes du champ s'enroulent.

[6] Nom historique, ce terme est pourtant bien homogène à une tension et s'exprime donc en volt. La justification de cette expression repose la nature conservative du champ électrique, c'est-à-dire que son travail est indépendant du chemin suivi. En effet $\vec{E} = -\vec{\mathrm{grad}}(V)$ donc $\int_A^B \vec{E}(M,t)\mathrm{d}\vec{\ell} = V(B) - V(A) \doteq e$.

[7] Cette loi énonce que les conséquence tendent à s'opposer aux causes qui leur ont donné naissance.

En utilisant ces théorèmes, il vient :

$$\vec{\text{rot}}(\vec{E}(M,t)) = -\frac{\partial \vec{B}(M,t)}{\partial t} \Rightarrow \oint_{\ell} \vec{E}(M,t)\mathrm{d}\vec{\ell} = -\frac{\partial}{\partial t}\iint_{\mathcal{S}} \vec{B}(M,t)\cdot \mathrm{d}\vec{\mathcal{S}}$$
$$\Rightarrow e = -\frac{\partial \Phi}{\partial t} \quad \blacksquare$$

Point-clé : Equation de Maxwell-Faraday

En tout point de l'espace et à chaque instante, les champs électrique $\vec{E}$ et magnétique $\vec{B}$ vérifient :

$$\vec{\text{rot}}(\vec{E}(M,t)) = -\frac{\partial \vec{B}(M,t)}{\partial t}$$

Cela traduit localement que la circulation du champ électrique est proportionnelle aux variations temporelles du flux magnétique.

APPLICATION : déterminer le rotationnel du champ électrostatique créé par une charge ponctuelle.

4. Equation de Maxwell-Ampère

Le rotationnel du champ magnétique $\vec{B}(M,t)$ est proportionnel à la somme de la distibution de courant et de la dérivée temporelle du champ électrique $\vec{E}(M,t)$:

$$\vec{\text{rot}}(\vec{B}(M,t)) = \mu_0 \vec{j}(M,t) + \epsilon_0\mu_0 \frac{\partial \vec{E}(M,t)}{\partial t}$$

Géométriquement, cette équation signifie qu'en un point de l'espace donné, si le champ électrique varie au cours du temps et/ou s'il la distibution de courant est non nulle, alors les lignes de champ magnétique tendent à s'enrouler.

Sous forme intégrale, l'équation de Maxwell-Ampère en régime[8] permanent[9] correspond au théorème d'Ampère :

$$\int_{\ell} \vec{B}(M,t)\mathrm{d}\vec{\ell} = \mu_0 I_{\text{enlace}}$$

DÉMONSTRATION :
On intègre sur une surface $\mathcal{S}$ l'équation de Maxwell-Ampère en régime stationnaire :

$$\vec{\text{rot}}(\vec{B}(M,t)) = \mu_0(\vec{j}(M,t) \Rightarrow \iint_{\mathcal{S}} \vec{\text{rot}}(\vec{B}(M,t))\cdot \mathrm{d}\vec{\mathcal{S}} = \iint_{\mathcal{S}} \mu_0(\vec{j}(M,t)\cdot \mathrm{d}\vec{\mathcal{S}}$$

[8] Mode d'évolution d'un système dans lequel les paramètres intéressants restent constants.
[9] Les termes permanent et stationnaire sont équivalents et signifient qu'il n'y a pas de dépendance temporelle. On privilégie le terme stationnaire pour la description d'un champ vectoriel et permanent pour la description des régimes.

Or le théorème de Stokes-Ampère stipule que le flux du rotationnel d'un champ vectoriel à travers une surface est égal à la circulation de ce champ à le long du contour orienté définissant cette surface :

$$\iint_{\mathcal{S}} \vec{\text{rot}}(\vec{a}(M,t)) \cdot \text{d}\vec{\mathcal{S}} = \int_{\ell} \vec{a}(M,t)\text{d}\vec{\ell}$$

En utilisant ce théorème, il vient :

$$\vec{\text{rot}}(\vec{B}(M,t)) = \mu_0(\vec{j}(M,t) \Rightarrow \int_{\ell} \vec{B}(M,t)\text{d}\vec{\ell} = \mu_0 \iint_{\mathcal{S}} \vec{j}(M,t) \cdot \text{d}\vec{\mathcal{S}}$$
$$\Rightarrow \int_{\ell} \vec{B}(M,t)\text{d}\vec{\ell} = \mu_0 I_{\text{enlace}} \quad \blacksquare$$

Point-clé : Equation de Maxwell-Ampère

En tout point de l'espace et à chaque instante, la distribution volumique de courant $\rho(M,t)$ et les champs électrique $\vec{E}$ et magnétique $\vec{B}$ vérifient :

$$\vec{\text{rot}}(\vec{B}(M,t)) = \mu_0\vec{j}(M,t) + \epsilon_0\mu_0\frac{\partial\vec{E}(M,t)}{\partial t}$$

avec $\epsilon_0 = \frac{1}{36\pi} \times 10^{-9}$ F.m^{-1} la permittivité diélectrique du vide et $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7}$ H.m^{-1} la perméabilité magnétique du vide.

APPLICATION : déterminer le rotationnel du champ magnétostatique créé par un fil infini.

En régime variable, les variations temporelles du champ électrique permettent d'introduire un vecteur $\vec{j}'(M,t) = \epsilon_0\frac{\partial\vec{E}(M,t)}{\partial t}$ appelé **courant de déplacement**.

$$\vec{\text{rot}}(\vec{B}(M,t)) = \mu_0(\vec{j}(M,t) + \epsilon_0\frac{\partial\vec{E}(M,t)}{\partial t}) = \mu_0\vec{j}(M,t) + \frac{1}{c^2}\vec{j}'(M,t)$$

Contrairement aux autres équations de Maxwell, il y a ici un terme additionnel auquel les lois de l'électromagnétisme sur les champs statiques ne donnent pas accès. L'existence de ce terme est à relier à la notion de conservation de la charge, gradeur fondamentale qui est à la fois source de champ électrique (en toute situation) et magnétique (si elle est en mouvement).

II. La conservation de la charge

1. Considérations physiques

Les modèles de l'électrocinétique et donc l'électronique reposent sur le postulat de conservation de la charge : toute création de charge s'accompagne d'une destruction équivalente. Si l'on considère une portion infinitésimale d'espace, les distributions de charge $\rho(M,t)$ et celle de courant $\vec{j}(M,t)$ qui y règnent peuvent être considérée comme uniforme.

Considérons pendant une durée infinitésimale $\mathrm{d}t$ une portion d'espace infinitésimale cylindrique de hauteur $\mathrm{d}z$ dont l'axe coïncide avec la direction de la distribution volumique de courant $\vec{j}(z,t)$ locale. Raisonnant sur un volume infinitésimal, on consdère que la distribution volumique de charges est uniforme : $\rho(M,t) = \rho(t)$. En postulant que la charge présente dans le volume est conservée entre les instants t et $t + \mathrm{d}t$, on peut écrire le bilan suivant :

$$\delta q(t + \mathrm{d}t) - \delta q(t) = \mathrm{d}q(z + \mathrm{d}z) - \mathrm{d}q(z)$$

avec :

- $\delta q(t + \mathrm{d}t) = \rho(t)\mathrm{d}V = \rho(M, t + \mathrm{d}t)S\mathrm{d}z$
- $\delta q(t) = \rho(M,t)\mathrm{d}V = \rho(M,t)S\mathrm{d}z$
- $\mathrm{d}q(z) = \Phi(z)\mathrm{d}t = j(z,t)S$
- $\mathrm{d}q(z + \mathrm{d}z) = \Phi(z + \mathrm{d}z)\mathrm{d}t = -j(z + \mathrm{d}z, t)S$

On en déduit une relation entre la dérivée temporelle de la distribution volumique de charge et la dérivée spatiale de celle de courant :

$$\frac{\partial \rho(M,t)}{\partial t} + \frac{\mathrm{d}j_z(z,t)}{\mathrm{d}z} = 0$$

Dans un cas général où le vecteur $j(\vec{M},t)$ possède des composantes dans les trois directions de l'espace, l'équation précédente se généralise sous la forme :

$$\frac{\partial \rho(M,t)}{\partial t} + \mathrm{div}(\vec{j}(M,t)) = 0$$

Point-clé : Equation locale de conservation de la charge

En tout point M de l'espace et à un instant t, la distribution de charge $\rho(M,t)$ et la distribution de courant $\vec{j}(M,t)$ vérifie.

$$\frac{\partial \rho(M,t)}{\partial t} + \mathrm{div}(\vec{j}(M,t)) = 0$$