TRAVAUX DIRIGÉS

Conducteurs et cavité

Les différents exercices de ce recueil sont agencés selon la progression des différents paragraphes du cours. Le niveau de difficulté approximatif est mentionné pour chacun d'eux à travers un nombre d'étoiles (★), sauf pour les exercices type résolution de problème (♧♥♤♦). La résolution d'un exercice nécessite un temps de lecture, un temps de recherche et un temps de rédaction. Aucun de ces trois ne doit être négligé. Pour favoriser votre apprentissage, il est vivement recommandé de réaliser les phases de lecture et de recherche en amont de la séance, le minimum exigé étant un schéma de situation et les lois à mettre en œuvre qui devront apparaître en regard des énoncés.

Linéaments

Propagation dans un conducteur

Exercice n°1 - Conduction électrique dans un fil ★★☆

On considère une portion de fil de cuivre soumise à une différence de potentiel harmonique de pulsation ω à ses bornes. Le fil est modélisé par un cylindre infini de rayon a et d'axe (Oz). Les symétrie de révolution autour de l'axe (Oz) et de translation selon l'axe (Oz), on peut admettre que la densité volumique de courant $\vec{j}$ s'exprime sous forme complexe :

$$\underline{\vec{j}} = j(r)\mathrm{e}^{i\omega t}\vec{e_z}$$

On note j_a l'amplitude de la densité volumique de courant à la périphérie du cylindre et on se place dans le cadre de l'approximation des régimes quasi-stationnaire qui assure que la conductivité σ_0 soit réelle. On peut donc associé à cette densité volumique un champ électrique :

$$\underline{\vec{E}} = \frac{1}{\sigma_0}\underline{\vec{j}} = E(r)\mathrm{e}^{i\omega t}\vec{e_z}$$

1. **Établir** l'équation de diffusion que doit satisfaire le vecteur $\underline{\vec{j}}$.

On cherche une solution sous la forme :

$$\underline{j} = j_a\mathrm{e}^{-(1+i)\frac{(a-r)}{\delta}}\mathrm{e}^{i\omega t}$$

2. **Donner** la dimension de δ et l'exprimer en considérant l'équation précédente dans le cas $r >> \delta$.

$\boxed{3.}$ **Exprimer** $\overrightarrow{j}$ et donner la signification physique de la grandeur δ.

$\boxed{4.}$ **Calculer** δ pour une fréquence de 50 Hz et comparer au diamètre typique d'un fil de cuivre. Commenter l'hypothèse de densité de courant uniforme postulée en électrocinétique et exprimer la résistance R du fil.

$\boxed{5.}$ **Calculer** δ pour une fréquence de 100 MHz et comparer au diamètre typique d'un fil de cuivre. Commenter la variation de section par rapport au cas précédent et exprimer la résistance du fil.

$\boxed{6.}$ **Commenter** l'évolution de la résistance d'un fil lorsqu'on passe d'un courant électrique basse-fréquence à un courant électrique haute-fréquence. Proposer une solution technologique simple pour remédier au problème.

<u>Données :</u> $\epsilon_0 = 8,85 \times 10^{-12}$ SI ; $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7}$ SI ; $\sigma_0 = 6 \times 10^8$ SI

$\boxed{\text{Exercice n°2}}$ - Énergie dans un conducteur ★★☆

Un solide conducteur est constitué d'une part d'électrons libre de masse m de charge $-e$ et de densité n_e et d'autre part d'ions positifs quasiment immobiles car de masse très supérieure à celle des électrons. Il s'agit d'un milieu localement neutre, c'est-à-dire un milieu dont la densité volumique de charge ρ est nulle.
On donne la relation de dispersion dans le conducteur :

$$k^2 = \frac{\omega^2}{c^2} - i\mu_0\sigma\omega$$

On considère la propagation d'une onde plane progressive monochromatique de pulsation ω auquel est attaché le champ électrique suivant :

$$\underline{\overrightarrow{E}} = E_0 \mathrm{e}^{-\frac{z}{\delta}} \, \mathrm{e}^{i\left(\omega t - \frac{z}{\delta}\right)} \, \overrightarrow{e_x}$$

$\boxed{1.}$ **Exprimer** le vecteur de Poynting instantané $\overrightarrow{R}$.

$\boxed{2.}$ **Exprimer** la densité d'énergie électromagnétique u_{em}.

$\boxed{3.}$ **Exprimer** la densité volumique de puissance p_v cédée au plasma.

$\boxed{4.}$ **Montrer** qu'un plasma vérifie l'identité de Poynting en précisant le sens physique de chacun des termes :

$$\frac{\partial u_m}{\partial t} + \mathrm{div}\overrightarrow{R} + \overrightarrow{j} \cdot \overrightarrow{E} = 0$$

Exercice n°3 - Réflexion sur un conducteur parfait ★☆☆

On considère une onde plane progressive monochromatique de pulsation ω décrite par le champ électrique suivant :

$$\overrightarrow{E_i}(x,t) = E_0 \cos(\omega t - kx)\ \overrightarrow{u_y} + 2E_0 \cos(\omega t - kx + \frac{\pi}{4})\ \overrightarrow{u_z}$$

Cette onde se propage dans le vide et rencontre en $x = a$ un plan métallique parfaitement conducteur (le métal occupe le demi-espace $x > a$).

1. **Donner** les relations de passages des champs électriques et magnétiques au niveau d'une surface.

2. **Déterminer** l'expression du champ électrique de l'onde réfléchie.

Exercice n°4 - Cavité sans perte ★☆☆

Une cavité sans perte d'axe (Ox) et de longueur L est constitué par l'association de deux miroirs métalliques parfaits confondus respectivement avec les plans $x = 0$ et $x = L$. On suppose qu'à l'intérieur de la cavité le champ électrique d'une onde monochromatique polarisée rectilignement selon $\overrightarrow{u_z}$ a pour représentation complexe :

$$\underline{\overrightarrow{E}}(x,t) = \underline{E_1} e^{i(\omega t - kx)}\ \overrightarrow{u_z} + \underline{E_2} e^{i(\omega t + kx)}\ \overrightarrow{u_z}$$

Les relations de passage imposent que ce champ soit obligatoirement normal aux surfaces conductrices.

1. **Établir** l'expression de $\underline{E_2}$ en fonction de $\underline{E_1}$ en considérant l'interface en $x = 0$.

2. **Établir**,en considérant l'interace en $x = L$, la suite f_n des valeurs possibles de fréquence telles qu'une onde existe dans la cavité.

3. **Exprimer** le champ électrique à la fréquence f_n dans la cavité, noté $\overrightarrow{E_n}(x,t)$, en fonction de $\underline{E_1}$, n, x, L et c en précisant la nature de cette onde.

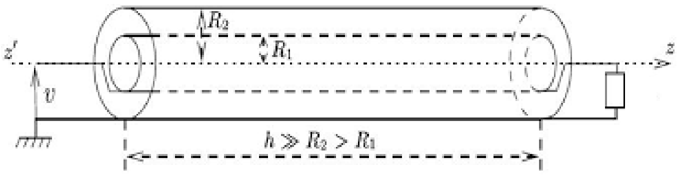
4. **Montrer** qu'il existe des abscisses x_P où le champ électrique est constamment nul et déduire la distance entre deux valeurs consécutives de x_P.

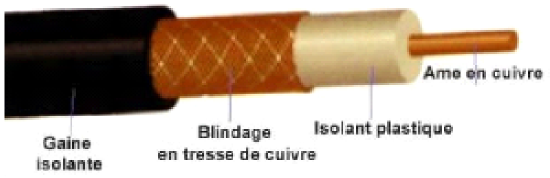
5. **En déduire** le champ magnétique $\overrightarrow{B_n}(x,t)$ associé à cette onde. Expliciter les abscisses $x_{P'}$ des points où le champ magnétique est constamment nul.

Exercice n°5 - Câble coaxial

★ ☆ ☆

Considérons un câble coaxial supposé infini, d'axe (Ox), constitué d'un cylindre conducteur plein de rayon R_1 d'axe (Oz) appelé âme ; et d'un cylindre conducteur coaxial de rayon intérieur $R_2 > R_1$. Les conducteurs sont considérés comme étant parfaits. L'âme sert à amener un courant électrique et la gaine en assure le retour. Les distributions de courant sont surfaciques et invariantes pour toute rotation d'axe (Oz). L'espace entre l'âme et la gaine est rempli d'un matériau diélectrique que l'on assimilera au vide.





On considère qu'un courant de forme complexe $\underline{i}(z,t) = I_0(z)\exp(j\omega t)$ (où j est solution de $j^2 = -1$) circule à l'instant t au point d'abscisse z en se propageant selon les z croissants. Le courant opposé circule en sens inverse dans la gaine. Une différence de potentiel harmonique $u(z=0,t) = u_0\exp(j\omega t)$ est appliquée en $z = 0$ entre l'âme et la gaine et on note $\underline{u}(z,t)$ la grandeur complexe associée au niveau de la côte z. Le potentiel de la gaine est pris comme potentiel de référence.

On ne s'intéresse qu'aux ondes progressives dans le câble suivant le sens des z croissants et on se place en régime purement variable (aucun champ statique n'est pris en compte).

1. **Justifier** par des considérations de symétries spatiales que le champ électrique dans le diélectrique peut être supposé de la forme $\overrightarrow{E} = E(r,z,t)\,\overrightarrow{e_r}$ dans un système de coordonnées cylindriques d'axe (Oz).

2. **Établir** la forme générale du champ magnétique dans le câble par des considérations de symétries spatiales. En déduire son expression en notation complexe $\underline{B}(M,t)$ entre les deux conducteurs en fonction de $I_0(z)$, r et ω par application du théorème d'Ampère.

3. **Exprimer** en notation complexe le champ électrique $\underline{E}(M,t)$ en fonction de $\frac{\mathrm{d}I_0(z)}{\mathrm{d}z}$, r, ω et $u(z,t)$.

$\boxed{4.}$ **Montrer** à partir d'une équation de Maxwell que le courant qui circule dans l'âme selon les z croissants a la structure d'une onde plane progressive dont on exprimera l'amplitude en fonction de u_0, ϵ_0, R_1, R_2 et la célérité de la lumière dans le vide c. En déduire l'existence d'une onde progressive de tension le long du câble.

$\boxed{5.}$ **Exprimer** les champs $\underline{E}(M,t)$ et $\underline{B}(M,t)$ en précisant la nature de l'onde électromagnétique se propageant entre les deux conducteurs.

$\boxed{6.}$ **Exprimer** la puissance moyenne $< P >$ transportée par le câble.

$\boxed{7.}$ **Établir** l'expression de l'impédance caractéristique $\underline{Z_c}$ relatif aux ondes progressives monochromatiques se propageant selon les $z > 0$ croissants sachant qu'elle est définie par la relation $\underline{Z_c} = \underline{u}/\underline{i}$. Préciser s'il s'agit d'un nombre réel ou imaginaire, puis l'exprimer en fonction des seules grandeurs u_0 et $< P >$.

$\boxed{8.}$ **Réaliser** les applications numériques pour $\underline{Z_c}$ puis $< P >$ pour un câble coaxial dont l'âme est de rayon $R_1 = 1$ mm, la gaine de rayon intérieur $R_2 = 2,5$ mm ; et qui est soumis à une tension d'amplitude $u_0 = 55$ V.