Isolation thermique et acoustique

Total barème : $32 + 41 + 10 = 83$ points.

I Double vitrage et isolation acoustique (32pt)

I.1 Présentation de l'isolation acoustique du simple vitrage (1pt)

1 - Fréquences audibles entre 20 Hz et 20 kHz. (**1 pt**)

I.2 Double vitrage : étude en régime forcé (17pt)

2 - Il s'agit de la même baisse que pour le vitrage simple. (**1 pt**)

3 - Force du ressort sur la masse 2 : $\boxed{\vec{F} = -k(x_2 - x_1 - l_0)\vec{e}_x.}$ (**1 pt**)

4 - PFD sur masse 2, projeté sur $\vec{e}_x$:

$$\boxed{m_2\ddot{x}_2 = -k(x_2 - x_1 - l_0) - \alpha(\dot{x}_2 - \dot{x}_1),} \text{ soit } \boxed{\ddot{x}_2 + \frac{\alpha}{m_2}\dot{x}_2 + \frac{k}{m_2}x_2 = \frac{k}{m_2}x_1 + \frac{kl_0}{m_2} + \frac{\alpha}{m_2}\dot{x}_1.}$$

(**1 pt** PFD + **1 pt** expression projetée)

5 - On remplace x_2 par $u_2 + l_0$, on obtient :

$$\ddot{u}_2 + \frac{\alpha}{m_2}\dot{u}_2 + \frac{k}{m_2}u_2 = \frac{k}{m_2}x_1 + \frac{\alpha}{m_2}\dot{x}_1,$$

ce qui est de la forme demandée avec $\boxed{\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m_2}}}$ et $\frac{\omega_0}{Q} = \frac{\alpha}{m_2}$ soit $\boxed{Q = \frac{\sqrt{km_2}}{\alpha}.}$

(**1 pt** équation sur u_2 + **1 pt** pour ω_0 + **1 pt** pour Q)

6 - Passage en complexes : $-\omega^2\underline{u}_2 + \frac{\omega_0}{Q}\,\mathrm{j}\omega\underline{u}_2 + \omega_0^2\underline{u}_2 = \frac{\omega_0}{Q}\,\mathrm{j}\omega\underline{x}_1 + \omega_0^2\underline{x}_1$, et on isole

$$\boxed{\underline{H} = \frac{\underline{u}_2}{\underline{x}_1} = \frac{\omega_0^2 + \mathrm{j}\dfrac{\omega\omega_0}{Q}}{\omega_0^2 - \omega^2 + \mathrm{j}\dfrac{\omega\omega_0}{Q}}.}$$

(**1 pt** dériver $\Leftrightarrow$ multiplier par jω + **2 pt** expression $\underline{H}$)

7 - $\boxed{|\underline{H}| = \frac{\sqrt{\omega_0^4 + \dfrac{\omega^2\omega_0^2}{Q^2}}}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \dfrac{\omega^2\omega_0^2}{Q^2}}}.}$ (**2 pt**)

8 - Phénomène de résonance. (**1 pt**)

9 - Il suffit de trouver la position du minimum de $f(x) = (1 - x^2)^2 + x^2/Q^2$.

$f'(x) = -4x(1 - x^2) + 2x/Q^2$.

$x = 0$ ne nous intéresse pas. Il reste $-4(1 - x^2) + 2/Q^2 = 0$, soit $\boxed{x = \sqrt{1 - \frac{1}{2Q^2}}.}$

N'existe que si $\boxed{Q > 1/\sqrt{2} = 0{,}707.}$

(**1 pt** dérivée + **1 pt** expression x + **1 pt** condition sur Q)

10 - Le terme en $1/(2Q^2)$ devient vite négligeable devant 1 si $Q > 10$, d'où $x \simeq 1$ et donc $\boxed{\omega \simeq \omega_0.}$ (**1 pt**)

I.3 Détermination plus fine de la fréquence de résonance (14pt)

11 - $m_1\ddot{x}_1\,\vec{e}_x = -k(x_2 - x_1 - l_0)(-\vec{e}_x)$ d'où $\boxed{\ddot{x}_1 = \dfrac{k}{m_1}(x_2 - x_1) - \dfrac{kl_0}{m_1}.}$ (**2 pt**)

$m_2\ddot{x}_2\,\vec{e}_x = -k(x_2 - x_1 - l_0)(+\vec{e}_x)$ d'où $\boxed{\ddot{x}_2 = -\dfrac{k}{m_2}(x_2 - x_1) + \dfrac{kl_0}{m_2}.}$ (**2 pt**)

12 - On soustrait les deux précédentes, avec $l = x_2 - x_1$: $\boxed{\ddot{l} = -\left(\dfrac{k}{m_2} + \dfrac{k}{m_1}\right) l + \dfrac{kl_0}{m_2} + \dfrac{kl_0}{m_1}.}$ (**2 pt**)

13 - On identifie la pulsation propre $\boxed{\omega_0 = \sqrt{k\left(\dfrac{1}{m_1} + \dfrac{1}{m_2}\right)}.}$ (**2 pt**)

14 - $l(t) = A\cos\omega_0 t + B\sin\omega_0 t + l_0$. CI : $l(0) = l_0 - \delta$ et $\dot{l}(0) = 0$ donc $\boxed{l(t) = -\delta\cos\omega_0 t + l_0.}$

(**2 pt** forme des solutions + **1 pt** CI)

15 - Il faut augmenter les masses des vitres pour réduire ω_0 et le faire sortir de l'audible. (**1 pt**)

16 - Creux absents car chaque vitre a une fréquence critique différente : le creux d'une vitre est bloqué par l'autre. (**2 pt**)

II Comportement thermique d'une habitation (41pt)

17 - ⋆ 1^er ppe aux {murs} entre t et $t + \mathrm{d}t$ (isobare + phases condensées ou gaz idéaux) :

$$C_2\mathrm{d}T_2 = \delta Q_{\text{reçu}} = \frac{T_1 - T_2}{R_1}\mathrm{d}t - \frac{T_2 - T_e}{R_2}\mathrm{d}t,\ \text{ d'où } \boxed{C_2\frac{\mathrm{d}T_2}{\mathrm{d}t} = \frac{T_1 - T_2}{R_1} - \frac{T_2 - T_e}{R_2}.}$$

⋆ Idem mais à {l'intérieur} :

$$C_1\mathrm{d}T_1 = \varphi\mathrm{d}t - \frac{T_1 - T_2}{R_1}\mathrm{d}t,\ \text{ d'où } \boxed{C_1\frac{\mathrm{d}T_1}{\mathrm{d}t} = \varphi - \frac{T_1 - T_2}{R_1}.}$$

([**1 pt** idée 1^er ppe + **1 pt** réalisation]×2 car deux équations) (donc sur 4pt en tout)

II.1 Étude 1 : refroidissement lorsque le chauffage est coupé (7pt)

18 - Il faut résoudre $\dfrac{\mathrm{d}T_1}{\mathrm{d}t} + \dfrac{T_1}{C_1R_1} = \dfrac{T_e}{C_1R_1}$, soit donc $\boxed{T_1(t) = (T_{10} - T_e)\mathrm{e}^{-t/\tau} + T_e \text{ avec } \tau = R_1C_1.}$ (**2 pt**)

19 - $T_1(t) = (T_{10} - T_e)(1 - t/\tau) + T_e$ donc droite de pente $\boxed{a = -(T_{10} - T_e)/\tau.}$

(formule DL **1 pt** + a correct **1 pt**)

20 - On trouve une pente $a \approx -(20{,}9 - 20)/(14000) = -6{,}4 \times 10^{-5}\,\mathrm{K/s}$, d'où

$$\boxed{R_1C_1 = \tau = -(T_{10} - T_e)/a = 3{,}3 \times 10^5\,\mathrm{s}.}$$

(pente **1 pt** + expression R_1C_1 **1 pt** + AN avec unité **1 pt**)

II.2 Étude 2 : régime stationnaire (5pt)

21 - Régime stationnaire, les équations deviennent $\dfrac{T_1 - T_2}{R_1} - \dfrac{T_2 - T_e}{R_2} = 0$ et $\varphi - \dfrac{T_1 - T_2}{R_1} = 0$.

On trouve $\boxed{T_2 = R_2\varphi + T_e}$ et $\boxed{T_1 = R_1\varphi + T_2 = (R_1 + R_2)\varphi + T_e.}$

(**1 pt** T_1 et **1 pt** T_2)

22 - On a $T_e = T_2$ car $R_2 = 0$, et on isole $\boxed{R_1 = \dfrac{T_1 - T_e}{\varphi} = 2 \times 10^{-2}\mathrm{K \cdot W^{-1}}.}$

(**1 pt** expression + **1 pt** AN + **1 pt** unité)

II.3 Étude 3 : régime permanent sinusoïdal (25pt)

23 - $\boxed{\omega = \dfrac{2\pi}{24\,\mathrm{h}} = 7{,}3 \times 10^{-5}\,\mathrm{rad/s}.}$ (**1 pt**)

24 - $\boxed{\underline{Z}_{\text{éq}} = \left(\mathrm{j}C_2\omega + \dfrac{1}{R_1 + \frac{1}{\mathrm{j}C_1\omega}}\right)^{-1}.}$ (**2 pt**)

25 - $\underline{Z}_1 // \underline{Z}_2 \quad \Rightarrow \quad \dfrac{1}{Z_{\text{éq}}} = \dfrac{1}{Z_1} + \dfrac{1}{Z_2} \simeq \dfrac{1}{Z_2}$ donc on peut approximer $\boxed{Z_{\text{éq}} \simeq Z_2.}$ (**2 pt**)

26 - Diviseur de tension entre R_2 et $Z_{\text{éq}}$: $\underline{u}_2 = \underline{e} \times \dfrac{Z_{\text{éq}}}{Z_{\text{éq}} + R_2} = \dfrac{1}{1 + \mathrm{j}R_2C_2\omega}$.

Diviseur de tension entre C_1 et R_1 : $\underline{u}_1 = \underline{u}_2 \times \dfrac{1}{1 + \mathrm{j}R_1C_1\omega}$.

Finalement : $\boxed{\underline{H} = \dfrac{\underline{u}_1}{\underline{e}} = \dfrac{1}{\left(1 + \mathrm{j}\frac{\omega}{\omega_1}\right)\left(1 + \mathrm{j}\frac{\omega}{\omega_2}\right)} \text{ avec } \omega_1 = \dfrac{1}{R_1C_1},\ \ \omega_2 = \dfrac{1}{R_2C_2}.}$

(**3 pt** à répartir selon l'avancée du raisonnement)

27 - $\boxed{G_{\text{dB}} = 20\log|\underline{H}| = 20\log\dfrac{1}{\sqrt{1 + (\omega/\omega_1)^2}\sqrt{1 + (\omega/\omega_2)^2}}.}$ (**2 pt**)

28 - BF : $G_{\text{dB}} \simeq 20\log 1 = 0 \quad \Rightarrow$ $\underline{\text{asymptote horizontale}}$ (**1 pt**).

HF : $G_{\text{dB}} \simeq 20\log\dfrac{1}{\frac{\omega^2}{\omega_1\omega_2}} \quad \Rightarrow$ pente de $\underline{-40\,\text{dB/décade}}$ (**1 pt**).

29 - $\boxed{\Delta\varphi = \varphi(u_1) - \varphi(e) = \arg(\underline{H}) = -\arctan\dfrac{\omega}{\omega_1} - \arctan\dfrac{\omega}{\omega_2}.}$ (**2 pt**)

$\omega \to 0$: $\Delta\varphi \simeq 0$. (**1 pt**)

$\omega \to +\infty$: $\Delta\varphi \simeq -\pi$. (**1 pt**)

30 - Trait plein = isolation par l'intérieur ; pointillés = par l'extérieur. (**1 pt**)

31 - Pour $\omega = 7{,}3 \times 10^{-5}\,\mathrm{rad/s}$, on lit $G_{\text{dB}} = -30\,\text{dB}$.

Donc $\dfrac{U_{10}}{E_0} = |\underline{H}| = 10^{G_{\text{dB}}/20}$ donc $\boxed{U_{10} = 10 \times 10^{-30/20} = 0{,}32\,\mathrm{V}}$

(**2 pt** expression U_{10}/E_0 en fonction de G_{dB} + **1 pt** AN.)

32 - Pour $\omega = 7{,}3 \times 10^{-5}\,\mathrm{rad/s}$, on lit $G_{\text{dB}} = -50\,\text{dB}$.

Donc $\boxed{U_{10} = 10 \times 10^{-50/20} = 0{,}032\,\mathrm{V}.}$ (**2 pt**)

C'est mieux car les variations sont imperceptibles. (**1 pt**)

33 - $u_1(t)$ est en retard par rapport à $e(t)$, d'un quart de période, donc de 6 h. (**2 pt**)

III Résistance thermique (10pt)

34 - $\boxed{[\kappa] = \mathrm{m}^2 \cdot \mathrm{s}^{-1}.}$ (**1 pt**)

$\boxed{\tau = L^2/\kappa.}$ (**1 pt**)

35 - L'équation devient $T''(x) = 0$, d'où $T(x) = Ax + B$. (**1 pt**)

Avec les CL, on obtient $\boxed{T(x) = (T_1 - T_0)\dfrac{x}{L} + T_0.}$ (**2 pt**)

36 - Loi de Fourier : $\vec{j}_{\mathrm{th}} = -\lambda T'(x)\vec{e}_x$. (**1 pt**)

D'où $\boxed{\vec{j}_{\mathrm{th}} = -\dfrac{\lambda(T_1 - T_0)}{L}\vec{e}_x.}$ (**1 pt**)

37 - $\boxed{\varphi = j_{\mathrm{th}} S = -\dfrac{\lambda(T_1 - T_0)S}{L}.}$ (**2 pt** définition + expression)

38 - On a bien $T_0 - T_1 = R \times \varphi$ avec $\boxed{R = \dfrac{L}{\lambda S}.}$ (**1 pt**)