

# Contrôle diagnostic A

Durée : 4 h

## Indications

- Le sujet est divisé en 5 parties **indépendantes**.
- Une calculatrice **non programmable** ou une calculatrice **programmable en mode examen** est autorisée.
- Une absence d'unité non justifiée à la fin d'une application numérique **ne comptera aucun point**.
- Indiquer clairement le numéro de la question, aérer la copie et encadrer vos résultats afin de **faciliter le travail du correcteur**.

## Données

- Intégrale remarquable

$$\int_{x_0}^x \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \ln \left( \frac{f(x)}{f(x_0)} \right) \quad \text{ou} \quad \int_{f(x_0)}^{f(x)} \frac{df(x)}{f(x)} = \ln \left( \frac{f(x)}{f(x_0)} \right).$$

- Développements limités à l'ordre 1 en zéro de fonctions trigonométriques :

$$\cos \alpha \approx 1 \quad ; \quad \sin \alpha \approx \alpha \quad ; \quad \tan \alpha \approx \alpha.$$

## 1 Chauffe-eau thermodynamique

*Tiré du concours e3a - TSI (2021)*

On s'intéresse à la pompe à chaleur d'un chauffe-eau thermodynamique schématisé sur la Figure 1.

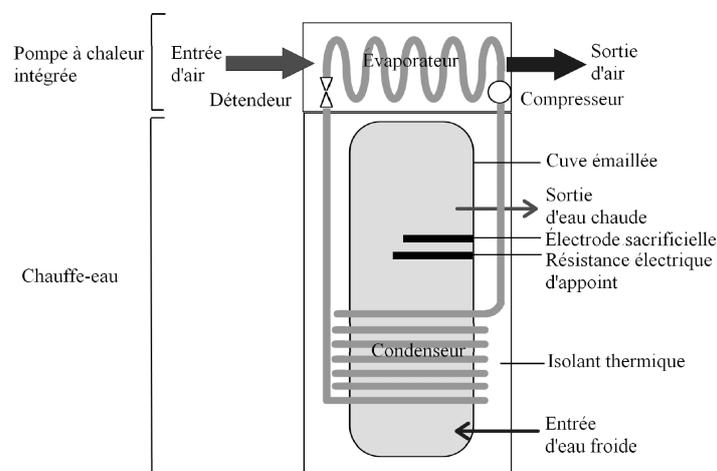


Figure 1: Schéma descriptif d'un chauffe-eau thermodynamique.

1. Rappeler le schéma de principe d'une pompe à chaleur ditherme et préciser le signe des échanges d'énergie  $W$ ,  $Q_f$  et  $Q_c$ .
2. Quel élément joue le rôle de source froide et quel élément joue le rôle de source chaude ?  
On rappelle que le cycle de Carnot se compose de deux transformations isothermes aux températures  $T_c$  et  $T_f$  et de deux transformations adiabatiques réversibles.
3. Définir une transformation isotherme et une transformation adiabatique.
4. Schématiser ce cycle en diagramme de Clapeyron ( $P, v$ ). Justifier le sens du cycle.
5. Appliquer le premier principe de la thermodynamique au fluide au cours d'un cycle réversible.
6. Appliquer le second principe de la thermodynamique au fluide au cours d'un cycle réversible.
7. Définir le coefficient de performance (ou efficacité) d'une pompe à chaleur.
8. En déduire l'expression du coefficient de performance maximal  $COP_{max}$  en fonction de  $T_c$  et  $T_f$ .
9. Effectuer l'application numérique pour  $T_f = 280\text{K}$  et  $T_c = 338\text{K}$ .
10. Dans ces conditions d'utilisation, le constructeur annonce un  $COP = 3,6$ . Pour quelle raison est-il différent du  $COP_{max}$  ?

## 2 L'accordeur de guitare

*Adapté du concours CCS TSI (2019)*

Nous allons étudier quelques aspects d'un accordeur de guitare. La problématique est la suivante.

- La guitare comporte six cordes : Mi grave, La, Ré, Sol, Si, Mi aigu.
- Les fréquences fondamentales théoriques de vibration de ces cordes, notées  $f_{ac}$  sont données dans le Tableau 1.

Corde	Fréquences $f_{ac}$ (Hz)
Mi grave	82,4
La	110,0
Ré	146,8
Sol	196
Si	246,9
Mi aiguë	329,6

Tableau 1: Fréquences fondamentales de vibration des cordes de guitare

On souhaite accorder une corde légèrement désaccordée : on notera  $f_{co}$  la fréquence fondamentale de vibration de la corde en question.

### Principe de l'accordeur

- Sélection de la corde à accorder (donc  $f_{ac}$  est fixée).
- Création d'un signal carré de référence de fréquence  $f_{ac}$  avec un oscillateur de type astable.
- Enregistrement du signal  $u_e(t)$  provenant de l'excitation de la corde à accorder : signal quelconque, d'amplitude assez faible, de fréquence  $f_{co}$ .
- Amplification et filtrage de ce signal.
- Extraction de la fondamentale du signal : obtention d'un signal sinusoïdal de fréquence  $f_{co}$  par l'utilisation d'un filtre à fréquence caractéristique réglable par le signal extérieur de référence.

- Mise en forme de ce signal : obtention d'un signal carré de fréquence  $f_{co}$ .
- On a donc à disposition deux signaux carrés (signaux logiques) de fréquences respectives  $f_{ac}$  et  $f_{co}$ . Dans les accordeurs récents le traitement est numérique : les signaux sont envoyés dans un ordinateur numérique intégré qui calcule l'écart de fréquence et indique à l'utilisateur quand la corde est accordée, c'est-à-dire quand  $f_{co} = f_{ac}$ .

Ce principe général est schématisé sur la Figure 2.

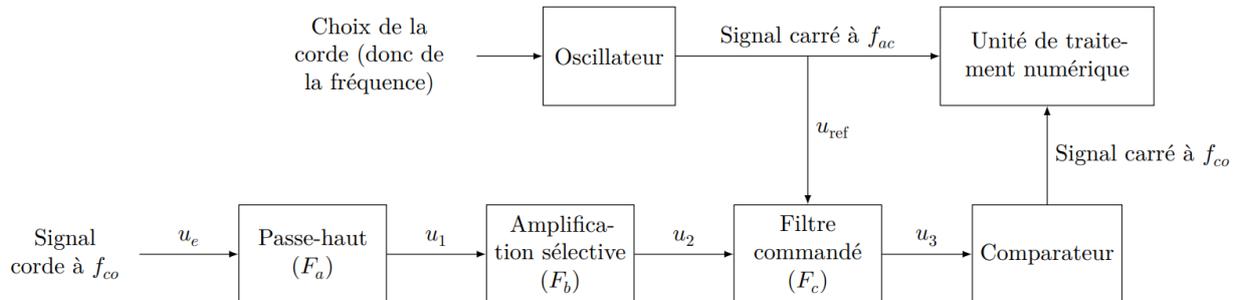


Figure 2: Principe de fonctionnement de l'accordeur de guitare

Ce problème s'intéresse au traitement du signal venant de la corde

## 2.1 Le signal

La Figure 3 montre un exemple de signal électrique à la sortie du micro d'une guitare électrique.

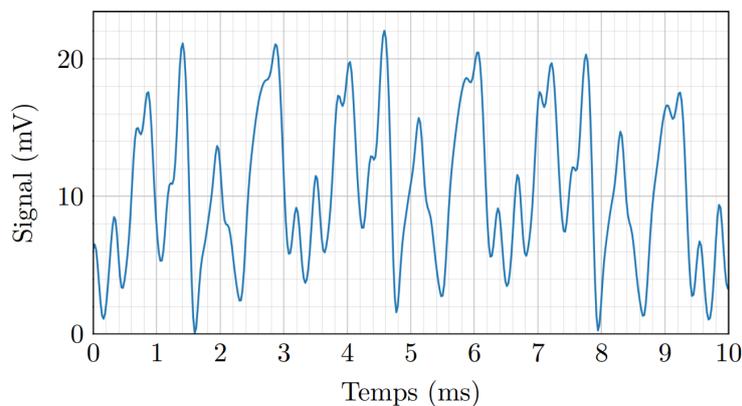


Figure 3: Signal de la guitare

11. Donner une valeur approchée de la valeur moyenne de ce signal.
12. Donner une estimation de la valeur de la fréquence de ce signal (on peut supposer qu'en première approximation le signal est périodique).
13. De quelle corde de guitare s'agit-il ?
14. L'analyse spectrale de ce signal fera-t-elle apparaître des harmoniques ? Justifier.

## 2.2 Premier filtre

Avant toute chose, le signal électrique provenant du micro de la guitare est envoyé sur le filtre de la Figure 4 (filtre  $(F_a)$ ).

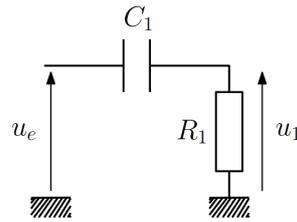


Figure 4: Filtre ( $F_a$ )

15. En supposant l'entrée sinusoïdale, définir et exprimer la fonction de transfert  $\underline{H}_1(j\omega)$  de ce filtre en fonction de  $R_1$ ,  $C_1$  et de la pulsation  $\omega$  du signal.
16. De quel type de filtre s'agit-il ? Faire apparaître une pulsation caractéristique  $\omega_1$  en fonction de  $R_1$  et  $C_1$  et préciser sa signification.
17. Tracer sans calcul l'allure du diagramme de Bode asymptotique relatif au gain.
18. On a choisi  $R_1 = 100\text{k}\Omega$  et  $C_1 = 100\text{nF}$ . Calculer la fréquence de coupure  $f_1$  à -3 dB de ce filtre. Au vu de l'allure du signal de la Figure 3, quel est le rôle de ce premier filtre ?

### 2.3 Filtrage (très) sélectif commandé

On souhaite maintenant sélectionner la fréquence fondamentale  $f_{co}$  du signal  $u_2$ , dont la valeur est à priori voisine de celle de la fréquence fondamentale théorique de vibration de la corde sélectionnée sur l'accordeur ( $f_{ac}$ ) (on suppose que la corde est légèrement désaccordée). On suppose pour la suite que c'est la corde Mi aiguë que l'on souhaite accorder.

Le principe du filtre ( $F_c$ ) est que sa fréquence caractéristique soit réglée par le signal de référence de fréquence  $f_{ac}$ .

#### 2.3.1 Diagramme de Bode

La Figure 5 représente le diagramme de Bode relatif au gain du filtre ( $F_c$ ) tracé à deux échelles différentes.

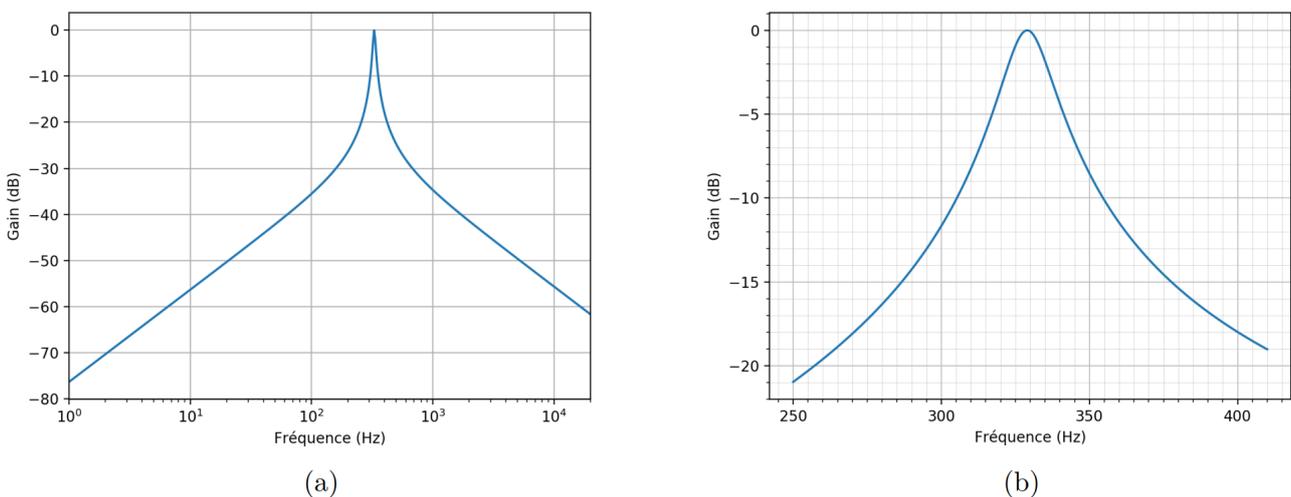


Figure 5: Diagramme de Bode en gain du filtre ( $F_c$ )

19. Dire en le justifiant rapidement, de quel type de filtre il s'agit. Quelle est sa fréquence centrale caractéristique ?
20. Donner une estimation de sa bande-passante à -3 dB après l'avoir définie.
21. Si la corde est désaccordée à  $f_{co} = 315\text{Hz}$ , estimer, en le justifiant, de quel facteur est atténuée sa composante spectrale fondamentale en sortie de ce filtre.

### 2.3.2 Analyse spectrale

La Figure 6 correspond au spectre du signal d'entrée  $u_e$  représenté sur la Figure 3.

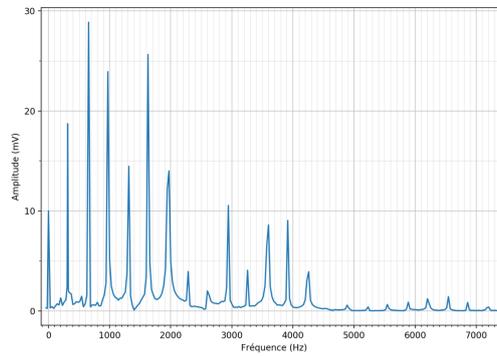


Figure 6: Spectre du signal d'entrée  $u_e$

22. Justifier qu'il est parfaitement cohérent qu'il s'agisse du spectre du signal de la Figure 3.
23. En le justifiant soigneusement, dire quel spectre de la Figure 7 correspond à la sortie du premier filtre ( $F_a$ ).
24. Tracer l'allure du spectre du signal en sortie du filtre ( $F_c$ ). Tracer l'allure du signal (temporel) correspondant.

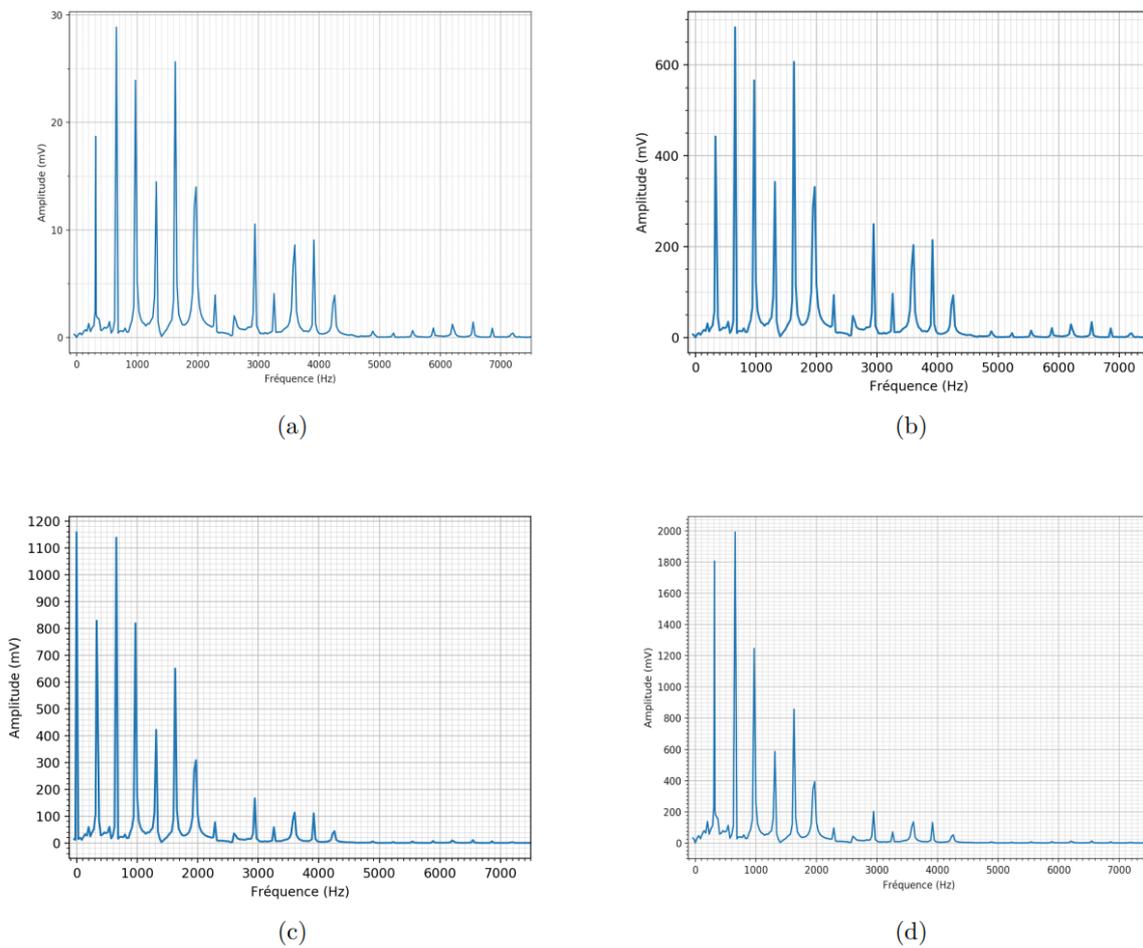


Figure 7: Spectres

### 3 Etude d'un filtre

Adapté de banque PT (2021)

Sur la Figure 8 on donne le schéma d'un filtre. On note  $\underline{H}_F(\omega)$  sa fonction de transfert.

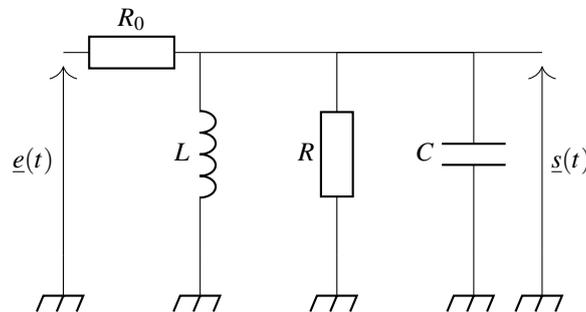


Figure 8: Schéma électrique.

25. Déterminer l'expression de  $\underline{H}_F(\omega)$  et la mettre sous la forme

$$\underline{H}_F(\omega) = \frac{H_0}{1 + jQ_F \left(x - \frac{1}{x}\right)}$$

avec  $x = \frac{\omega}{\omega_0}$ .

26. Expliciter littéralement  $Q_F$ ,  $H_0$  et  $f_0$ .
27. Donner la relation reliant le facteur de qualité, la fréquence propre et la bande passante à -3 dB.
28. Faire l'application numérique pour  $R_0 = 470\Omega$ ,  $R = 120\Omega$ ,  $L = 50\mu\text{H}$  et  $C = 50\text{nF}$ .
29. Faire une représentation graphique approchée du gain en décibel  $G_{dB}$  en fonction de  $\log(x)$  ; préciser quelques valeurs sur ce graphe. Faire apparaître sur ce graphe la bande passante à -3 dB.

### 4 Microscope de Van Leeuwenhoek

Adapté du concours commun Mines-Ponts - Physique II - PC (2020)

Le premier microscope de Van Leeuwenhoek était rudimentaire et reposait sur l'utilisation d'une seule lentille boule utilisée comme objectif. Après polissage d'une goutte de silice fondue, Van Leeuwenhoek, obtint des lentilles boule de rayon  $R = 0,60$  mm de centre  $C$ . L'indice optique de la silice sera noté  $n$ , les foyers objet et image de la lentille sont respectivement notés  $F$  et  $F'$ .

Sur la Figure 9 on a représenté la trajectoire d'un rayon lumineux initialement parallèle à l'axe optique ( $Cz$ ) se propageant dans une lentille boule d'indice optique  $n$  placée dans l'air d'indice unitaire. Les rayons incidents et émergents se coupent dans un plan passant par  $C$ , perpendiculaire à l'axe ( $Cz$ ). L'étude sera menée dans l'approximation de Gauss (c'est-à-dire qu'on approximera les fonctions trigonométriques par leur développement limité à l'ordre 1 en 0).

Les angles formés entre les rayons lumineux et les normales aux dioptries sont notés  $i_1$ , au point  $I$  en entrée de la lentille et  $i_2$  à l'extérieur de la lentille au point  $J$ , en sortie. De même, les angles intérieurs seront notés  $r_1$  et  $r_2$ . L'angle  $\widehat{F'CI}$  est noté  $\beta_r$  et l'angle de déviation  $\widehat{CF'K}$  sera noté  $\beta$ .

30. Déterminer la relation entre  $i_1$  et  $i_2$ .
31. Exprimer  $i_1$  en fonction de  $x$  et  $R$ .
32. Exprimer  $\beta_r$  en fonction de  $i_1$  et  $n$ , puis en fonction de  $x$ ,  $R$  et  $n$ .
33. Exprimer  $\beta$  en fonction de  $i_1$  et  $\beta_r$  puis de  $x$ ,  $R$  et  $n$ .

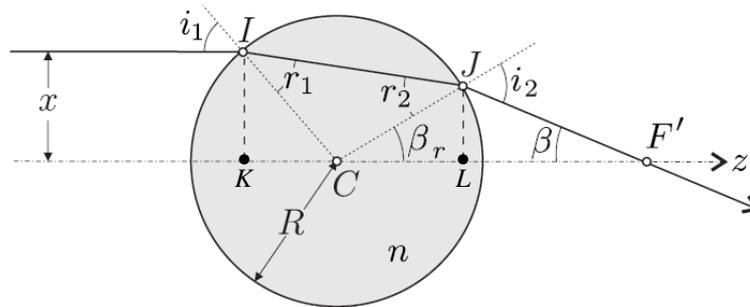


Figure 9: Lentille boule.

34. En déduire la distance focale  $f'_L$  définie comme la distance  $CF'$  sur la Figure 9 en fonction de  $n$  et  $R$ .
35. Estimer enfin numériquement  $f'_L$  en prenant  $n = 1,5$ .

Dans toute la suite,  $(Ox)$  désigne la direction transverse à l'axe optique contenant l'objet étudié. On limite l'étude au plan  $(Ox, Oz)$  et on prendra  $f'_L = 1,0$  mm. On utilise à présent un modèle de lentille mince équivalent à la lentille boule, possédant la même distance focale  $f'_L$  et le même rayon  $R$ . Celle-ci est représentée sur la Figure 10.

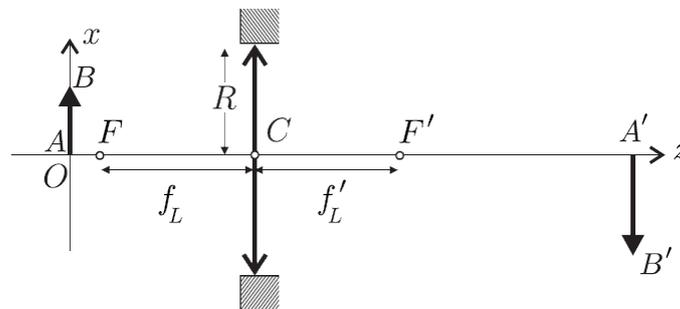


Figure 10: Lentille mince équivalente à la lentille boule.

Une des normes actuelles est d'imposer une distance  $l = 195$  mm sur l'axe optique entre un objet et son image à travers l'objectif.

36. Exprimer  $l$  en fonction de  $\overline{CA}$  et  $\overline{CA'}$ .
37. Montrer que  $\overline{CA}$  peut-être mis sous la forme d'une équation du second degré telle que

$$\overline{CA}^2 + l\overline{CA} + lf'_L = 0.$$

38. Afin que le grandissement transversal  $\gamma$  du microscope de Van Leeuwenhoek soit supérieur à 1 en valeur absolue, montrer que

$$|\overline{CA}| < \frac{l}{2}.$$

39. À partir des deux derniers résultats, déterminer l'expression de  $\overline{CA}$  en fonction de  $l$  et  $f'_L$ .
40. Calculer la valeur numérique de  $\overline{CA}$  et  $\overline{CA'}$ . Par quelles grandeurs peut-on les approximer ? Exprimer  $\gamma$  en fonction de ces grandeurs et calculer sa valeur numérique.

## 5 Le pendule simple

Adapté du concours ENSTIM - MPSI, PCSI et PTSI (1996)

### 5.1 Un pendule simple non amorti

On considère un point matériel  $M$  de masse  $m$  accroché à un point fixe  $O$  par l'intermédiaire d'un fil inextensible de longueur  $l$  et de masse nulle. L'ensemble est situé dans le champ de pesanteur terrestre  $\vec{g} = g\vec{u}_x$  (avec  $g = 9,81 \text{ m.s}^{-2}$ ),  $\vec{u}_x$  étant un vecteur unitaire de l'axe  $Ox$ . On note, l'angle orienté :  $\theta = (\vec{u}_x, \vec{OM})$ . On néglige les frottements. On lâche la masse d'un angle  $\theta_0$  sans vitesse initiale.

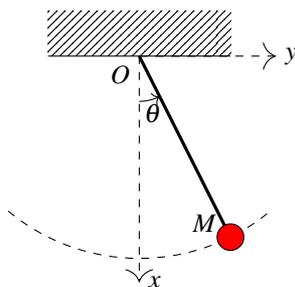


Figure 11: Schéma du pendule simple.

41. Montrer que le mouvement est plan.
42. Établir l'équation différentielle du second ordre, vérifiée par  $\theta$ .
43. En supposant que les élongations angulaires sont faibles, montrer que l'équation du mouvement est approchée par celle d'un oscillateur harmonique de pulsation  $\omega_0$  dont on donnera l'expression en fonction de  $l$  et  $g$ .  
En déduire  $\theta(t)$ . On rappelle que pour les faibles élongations angulaires,  $\sin(\theta) \approx \theta$ .
44. Exprimer l'énergie potentielle de pesanteur en fonction de  $x$  puis de  $\theta$ .
45. Montrer que l'énergie mécanique se conserve au cours du mouvement.  
En déduire l'équation différentielle du premier ordre reliant  $\dot{\theta}^2$ ,  $\theta$ ,  $\theta_0$  et les paramètres caractéristiques du système. On garde les mêmes conditions initiales.
46. Donner l'expression de la période  $T(\theta)$  sous forme d'une intégrale en fonction  $\theta$ ,  $\theta_0$  et des paramètres caractéristiques du système. On précisera soigneusement les bornes d'intégration.

**On ne demande pas de calculer cette intégrale.**

Une intégration numérique donne la courbe ci-dessous. Commenter la courbe obtenue.

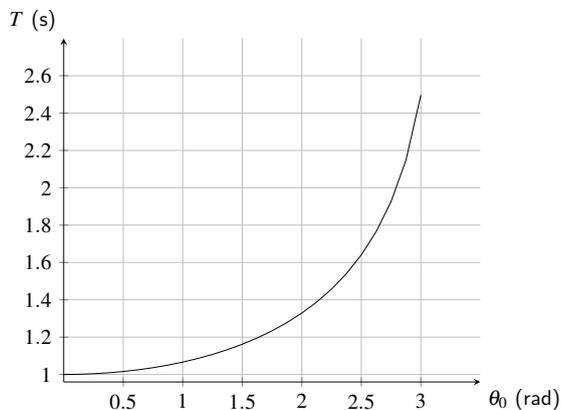


Figure 12: Variation de la période  $T$  d'un pendule en fonction de son angle initial  $\theta_0$ .

47. Proposer une méthode pour déterminer expérimentalement les valeurs de  $T$ .

## 5.2 Oscillateur amorti

Lorsque l'on enregistre expérimentalement  $\theta(t)$ , on constate que l'amplitude de  $\theta$  diminue lentement. On interprète ce résultat par la présence de frottements que l'on modélise par :  $\vec{f} = -\alpha \vec{v}$ , avec  $\vec{v}$  la vitesse du point  $M$  et  $\alpha$ , une constante positive.

48. Établir l'équation différentielle du second ordre vérifiée par  $\theta$ .

En se limitant aux petits angles, écrire l'équation sous la forme :

$$\ddot{\theta} + \frac{2}{\tau} \dot{\theta} + \omega_0^2 \theta = 0.$$

Donner l'expression de  $\tau$  et son interprétation physique.

49. A quelle condition obtient-on un régime pseudo-périodique ?

Dans le cadre d'un régime pseudo-périodique, calculer la pseudo-pulsation  $\omega$  et la pseudo-période  $T$ .

50. On appelle décrément logarithmique la quantité

$$\delta = \ln \left( \frac{\theta(t)}{\theta(t+T)} \right).$$

Exprimer  $\delta$  en fonction de  $T$  et  $\tau$ .

51. La masse est  $m = 470$  g. La figure ci-après représente les variations de  $\theta$  avec le temps.

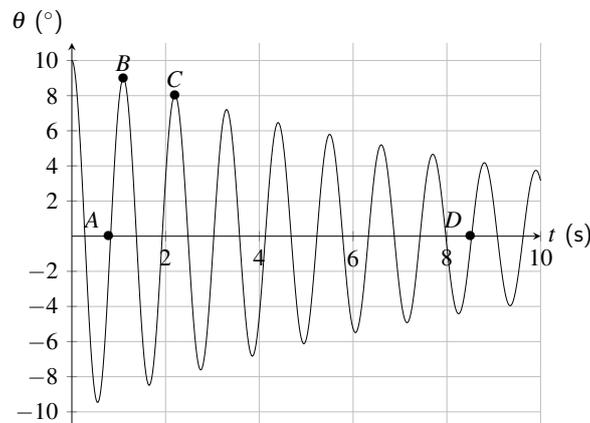


Figure 13: Variation de la coordonnée  $\theta$  d'un pendule amorti en fonction du temps.

On précise les coordonnées de 4 points particuliers:

Points	A	B	C	D
$t$ (s)	0,53	1,1	2,2	8,25
$\theta$ (°)	0	8,95	8,02	0

Calculer numériquement à partir des valeurs expérimentales le décrément logarithmique  $\delta$ .

52. Calculer numériquement à partir des valeurs expérimentales la pseudo-période,  $T$ .

53. Calculer numériquement à partir des valeurs expérimentales le temps  $\tau$ .

54. Calculer numériquement à partir des valeurs expérimentales la constante  $\alpha$ .

## 6 Générateur de Thévenin

Un générateur débite un courant électrique d'intensité  $I = 200$  mA lorsqu'il impose une tension  $U_{AB} = 4$  V, et un courant d'intensité  $I = 800$  mA lorsqu'il impose une tension  $U_{AB} = 1$  V. On modélise ce générateur par un générateur de Thévenin avec une force électromotrice  $E$  et une résistance interne  $r$ .

55. Déterminer la valeur de  $E$  et  $r$ .
56. Déterminer la valeur de l'intensité du courant de court-circuit  $I_{cc}$ , courant pour lequel la tension imposée par le générateur  $U_{AB}$  est nulle.
57. À partir des valeurs de  $E$  et  $r$  obtenues, donner l'expression de la tension  $U_{AB}$  en fonction de l'intensité du courant  $I$ . Représenter graphiquement  $U_{AB}(I)$ , soit la caractéristique du générateur de Thévenin.
58. Quelle doit être la valeur de la résistance  $R$  d'un résistor branché aux bornes du générateur pour qu'il fournisse une intensité  $I = 0,5$  A ?
59. Le point de fonctionnement du circuit électrique composé du générateur et d'un résistor branché à ses bornes correspond à une tension  $U_f$  qui est obtenue lorsqu'on égalise l'expression de la tension du générateur  $U_{AB}$  et l'expression de la tension aux bornes du résistor  $U_R$ . Déterminer la valeur de  $U_f$  pour un résistor de résistance  $R = 10$   $\Omega$ .
60. En traçant la caractéristique du résistor de résistance  $R = 10$   $\Omega$  sur le même graphique que la caractéristique du générateur, déterminer graphiquement la valeur de tension  $U_f$  du point de fonctionnement.