

# Contrôle diagnostic A

Durée : 4 h

## Indications

- Le sujet est divisé en 6 parties **indépendantes**.
- Une calculatrice **non programmable** ou une calculatrice **programmable en mode examen** est autorisée.
- Une absence d'unité non justifiée à la fin d'une application numérique **ne comptera aucun point**.
- Indiquer clairement le numéro de la question, aérer la copie et encadrer vos résultats afin de **faciliter le travail du correcteur**.

## Données

- Intégrale remarquable

$$\int_{x_0}^x \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \ln \left( \frac{f(x)}{f(x_0)} \right) \quad \text{ou} \quad \int_{f(x_0)}^{f(x)} \frac{df(x)}{f(x)} = \ln \left( \frac{f(x)}{f(x_0)} \right).$$

- Développements limités à l'ordre 1 en zéro de fonctions trigonométriques :

$$\cos \alpha \approx 1 \quad ; \quad \sin \alpha \approx \alpha \quad ; \quad \tan \alpha \approx \alpha.$$

## 1 Chauffe-eau thermodynamique

*Tiré du concours e3a - TSI (2021)*

On s'intéresse à la pompe à chaleur d'un chauffe-eau thermodynamique schématisé sur la Figure 1.

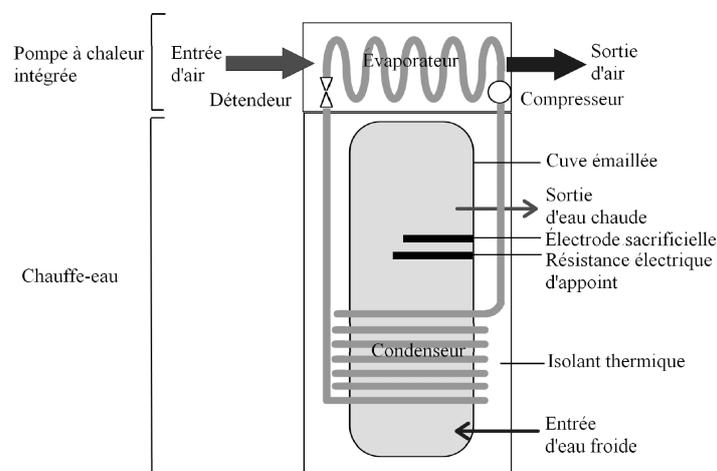
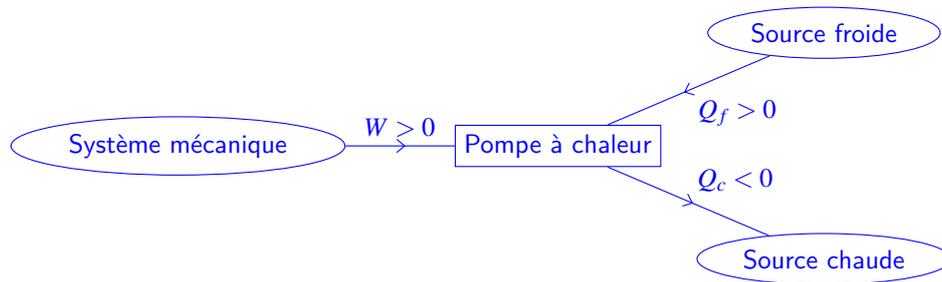


Figure 1: Schéma descriptif d'un chauffe-eau thermodynamique.

1. Rappeler le schéma de principe d'une pompe à chaleur ditherme et préciser le signe des échanges d'énergie  $W$ ,  $Q_f$  et  $Q_c$ .



2. Quel élément joue le rôle de source froide et quel élément joue le rôle de source chaude ?

L'extérieur de l'habitation, plus froid, joue le rôle de source froide ; l'intérieur de l'habitation, plus chaud, joue le rôle de source chaude.

On rappelle que le cycle de Carnot se compose de deux transformations isothermes aux températures  $T_c$  et  $T_f$  et de deux transformations adiabatiques réversibles.

3. Définir une transformation isotherme et une transformation adiabatique.

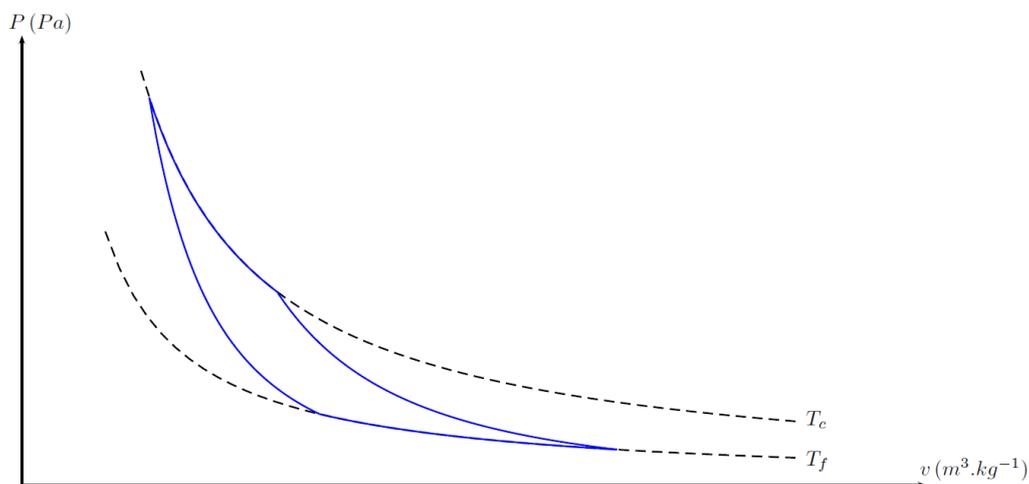
Une transformation isotherme est une transformation au cours de laquelle la température du système est constante.

Une transformation adiabatique est une transformation au cours de laquelle l'échange thermique  $Q$  est nul.

4. Schématiser ce cycle en diagramme de Clapeyron ( $P, v$ ). Justifier le sens du cycle.

Une transformation adiabatique et réversible est, d'après l'énoncé du second principe, une transformation isentropique

$$\Delta S = S_f + S_c = \frac{Q}{T} + 0 = 0.$$



Le cycle est parcouru dans le sens trigonométrique car la pompe à chaleur reçoit du travail  $W > 0$ .

5. Appliquer le premier principe de la thermodynamique au fluide au cours d'un cycle réversible.

Au cours d'un cycle, l'énergie interne finale est égale à l'énergie interne initiale donc

$$\Delta U = U_f - U_i = 0 = Q_c + Q_f + W$$

donc

$$W = -Q_c - Q_f.$$

6. Appliquer le second principe de la thermodynamique au fluide au cours d'un cycle réversible.

Au cours d'un cycle, l'entropie finale est égale à l'entropie initiale donc

$$\Delta S = S_f - S_i = 0 = S_r + S_c = \frac{Q_c}{T_c} + \frac{Q_f}{T_f} + 0$$

donc

$$\frac{Q_f}{Q_c} = -\frac{T_f}{T_c}.$$

7. Définir le coefficient de performance (ou efficacité) d'une pompe à chaleur.

Le coefficient de performance ou efficacité d'une pompe à chaleur est la valeur absolue du rapport entre l'énergie utile et l'énergie "payante", soit

$$\eta = \left| \frac{Q_c}{W} \right| = \frac{-Q_c}{W}.$$

8. En déduire l'expression du coefficient de performance maximal  $COP_{max}$  en fonction de  $T_c$  et  $T_f$ .

L'efficacité maximale est obtenue lorsqu'on considère que le cycle est réversible, ainsi, d'après les questions précédentes il vient que

$$COP_{max} = \frac{-Q_c}{W} = \frac{-Q_c}{-Q_c - Q_f} = \frac{1}{1 + \frac{Q_f}{Q_c}} = \frac{1}{1 - \frac{T_f}{T_c}}$$

soit

$$COP_{max} = \frac{T_c}{T_c - T_f}.$$

9. Effectuer l'application numérique pour  $T_f = 280\text{K}$  et  $T_c = 338\text{K}$ .

**A.N.**

$$COP_{max} = \frac{338\text{K}}{338\text{K} - 280\text{K}} = 5,83.$$

10. Dans ces conditions d'utilisation, le constructeur annonce un  $COP = 3,6$ . Pour quelle raison est-il différent du  $COP_{max}$  ?

Le constructeur tient compte du fait que le cycle réalisé par la pompe à chaleur n'est pas réversible, il faut tenir compte du terme de création d'entropie qui diminue l'efficacité des machines thermiques.

## 2 L'accordeur de guitare

*Adapté du concours CCS TSI (2019)*

Nous allons étudier quelques aspects d'un accordeur de guitare. La problématique est la suivante.

- La guitare comporte six cordes : Mi grave, La, Ré, Sol, Si, Mi aigu.

- Les fréquences fondamentales théoriques de vibration de ces cordes, notées  $f_{ac}$  sont données dans le Tableau 1.

Corde	Fréquences $f_{ac}$ (Hz)
Mi grave	82,4
La	110,0
Ré	146,8
Sol	196
Si	246,9
Mi aiguë	329,6

Tableau 1: Fréquences fondamentales de vibration des cordes de guitare

On souhaite accorder une corde légèrement désaccordée : on notera  $f_{co}$  la fréquence fondamentale de vibration de la corde en question.

**Principe de l'accordeur**

- Sélection de la corde à accorder (donc  $f_{ac}$  est fixée).
- Création d'un signal carré de référence de fréquence  $f_{ac}$  avec un oscillateur de type astable.
- Enregistrement du signal  $u_e(t)$  provenant de l'excitation de la corde à accorder : signal quelconque, d'amplitude assez faible, de fréquence  $f_{co}$ .
- Amplification et filtrage de ce signal.
- Extraction de la fondamentale du signal : obtention d'un signal sinusoïdal de fréquence  $f_{co}$  par l'utilisation d'un filtre à fréquence caractéristique réglable par le signal extérieur de référence.
- Mise en forme de ce signal : obtention d'un signal carré de fréquence  $f_{co}$ .
- On a donc à disposition deux signaux carrés (signaux logiques) de fréquences respectives  $f_{ac}$  et  $f_{co}$ . Dans les accordeurs récents le traitement est numérique : les signaux sont envoyés dans un calculateur numérique intégré qui calcule l'écart de fréquence et indique à l'utilisateur quand la corde est accordée, c'est-à-dire quand  $f_{co} = f_{ac}$ .

Ce principe général est schématisé sur la Figure 2.

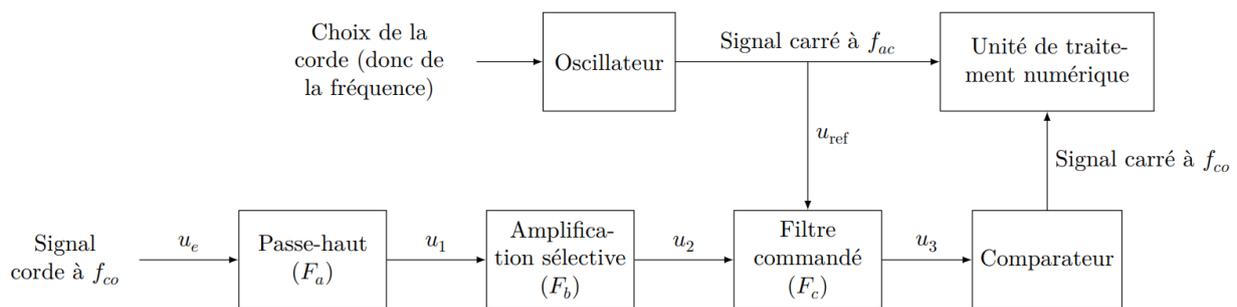


Figure 2: Principe de fonctionnement de l'accordeur de guitare

Ce problème s'intéresse au traitement du signal venant de la corde

**2.1 Le signal**

La Figure 3 montre un exemple de signal électrique à la sortie du micro d'une guitare électrique.

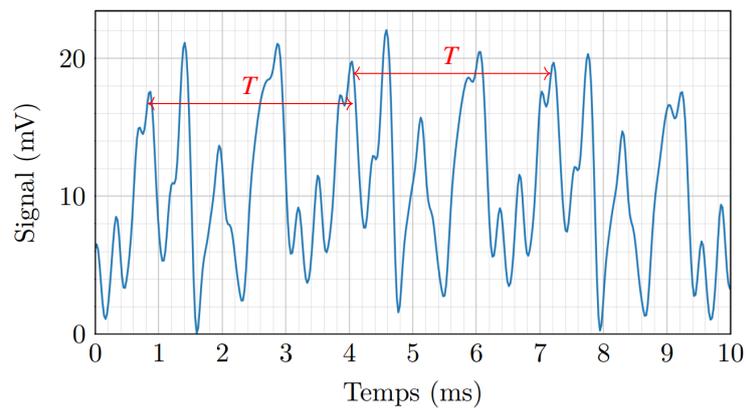


Figure 3: Signal de la guitare

11. Donner une valeur approchée de la valeur moyenne de ce signal.

On constate que le signal oscille d'une valeur proche de 10 mV. **La valeur moyenne est donc de 10 mV**, c'est également l'amplitude de la composante continue du signal.

12. Donner une estimation de la valeur de la fréquence de ce signal (on peut supposer qu'en première approximation le signal est périodique).

On voit qu'une forme caractéristique du signal se répète deux fois entre 0,8 ms et 7,2 ms, la période de ce signal est donc

**A.N.**

$$T = \frac{7,2 \times 10^{-3} \text{ s} - 0,8 \times 10^{-3} \text{ s}}{2} = 3,2 \times 10^{-3} \text{ s}$$

la fréquence est donc

$$f = \frac{1}{T} = \frac{1}{3,2 \times 10^{-3} \text{ s}} = 3,1 \times 10^2 \text{ Hz.}$$

13. De quelle corde de guitare s'agit-il ?

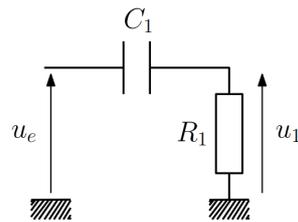
D'après le Tableau 1, il s'agirait de **la corde Mi aiguë**.

14. L'analyse spectrale de ce signal fera-t-elle apparaître des harmoniques ? Justifier.

Le signal, supposé périodique, ne correspond pas à un signal sinusoïdal. Or, on sait que tout signal périodique peut se mettre sous la forme d'un développement de Fourier, soit d'une somme de signaux sinusoïdaux de fréquences, d'amplitudes et de phases différentes. Donc ce signal a bien des harmoniques. Les fréquences de ces harmoniques sont multiples de la fréquence du fondamental. Ce signal présente de nombreuses discontinuités, l'amplitude des harmoniques de rang élevé est donc importante.

## 2.2 Premier filtre

Avant toute chose, le signal électrique provenant du micro de la guitare est envoyé sur le filtre de la Figure 4 (filtre ( $F_a$ )).

Figure 4: Filtre ( $F_a$ )

15. En supposant l'entrée sinusoïdale, définir et exprimer la fonction de transfert  $\underline{H}_1(j\omega)$  de ce filtre en fonction de  $R_1$ ,  $C_1$  et de la pulsation  $\omega$  du signal.

En effectuant un pont diviseur de tension pour obtenir la tension complexe  $\underline{u}_1$  du résistor de résistance  $R_1$  il vient que

$$\underline{u}_1 = \underline{u}_e \frac{\underline{Z}_{R_1}}{\underline{Z}_{R_1} + \underline{Z}_{C_1}} = \underline{u}_e \frac{R_1}{R_1 + \frac{1}{jC_1\omega}} = \underline{u}_e \frac{jR_1C_1\omega}{1 + jR_1C_1\omega}.$$

La fonction de transfert  $\underline{H}_1(j\omega)$  est donc

$$\underline{H}_1(j\omega) = \frac{\underline{u}_1}{\underline{u}_e} = \frac{jR_1C_1\omega}{1 + jR_1C_1\omega}.$$

16. De quel type de filtre s'agit-il ? Faire apparaître une pulsation caractéristique  $\omega_1$  en fonction de  $R_1$  et  $C_1$  et préciser sa signification.

Il s'agit d'un **filtre passe-haut** de fonction de transfert canonique

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{H_0 j \frac{\omega}{\omega_0}}{1 + j \frac{\omega}{\omega_0}}.$$

On peut identifier la pulsation caractéristique  $\omega_1 \equiv \omega_0$  en égalisant les dénominateurs des deux expressions de la fonction de transfert

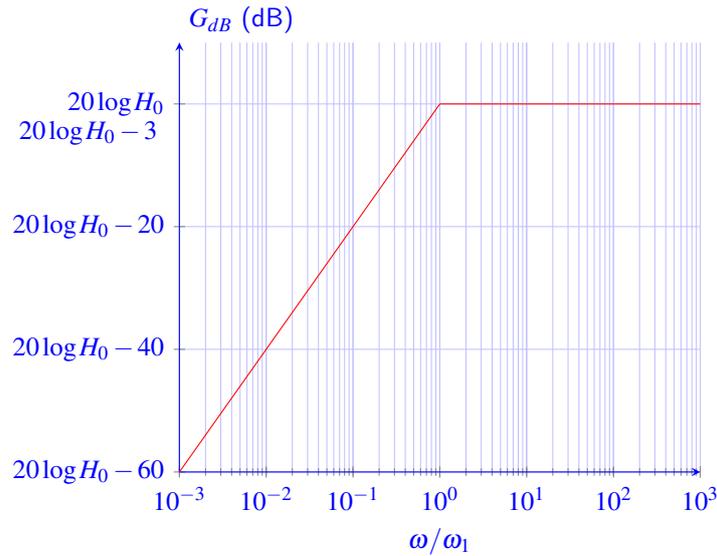
$$1 + jR_1C_1\omega = 1 + j \frac{\omega}{\omega_1}$$

soit

$$\omega_1 = \frac{1}{R_1C_1}.$$

Il s'agit de la pulsation en dessous de laquelle le gain en décibel du filtre diminue selon une droite asymptote de -20 dB lorsque les pulsations diminuent de une décade, soit la pulsation de coupure, la pulsation à partir de laquelle les basses fréquences sont coupées.

17. Tracer sans calcul l'allure du diagramme de Bode asymptotique relatif au gain.



18. On a choisi  $R_1 = 100\text{k}\Omega$  et  $C_1 = 100\text{nF}$ . Calculer la fréquence de coupure  $f_1$  à -3 dB de ce filtre. Au vu de l'allure du signal de la Figure 3, quel est le rôle de ce premier filtre ?

La fréquence de coupure  $f_1$  est définie telle que

$$f_1 = \frac{\omega_1}{2\pi} = \frac{1}{2\pi \times R_1 C_1}$$

soit

**A.N.**

$$f_1 = \frac{1}{2\pi \times 100 \times 10^3 \Omega \times 100 \times 10^{-9} \text{nF}} = 15,9\text{Hz.}$$

D'après l'allure du signal, ce filtre **permet de supprimer la composante continu** à  $f = 0\text{Hz}$ , seule composante ayant une fréquence inférieure à la fréquence de coupure du filtre passe-haut. Le signal a alors une valeur moyenne nulle.

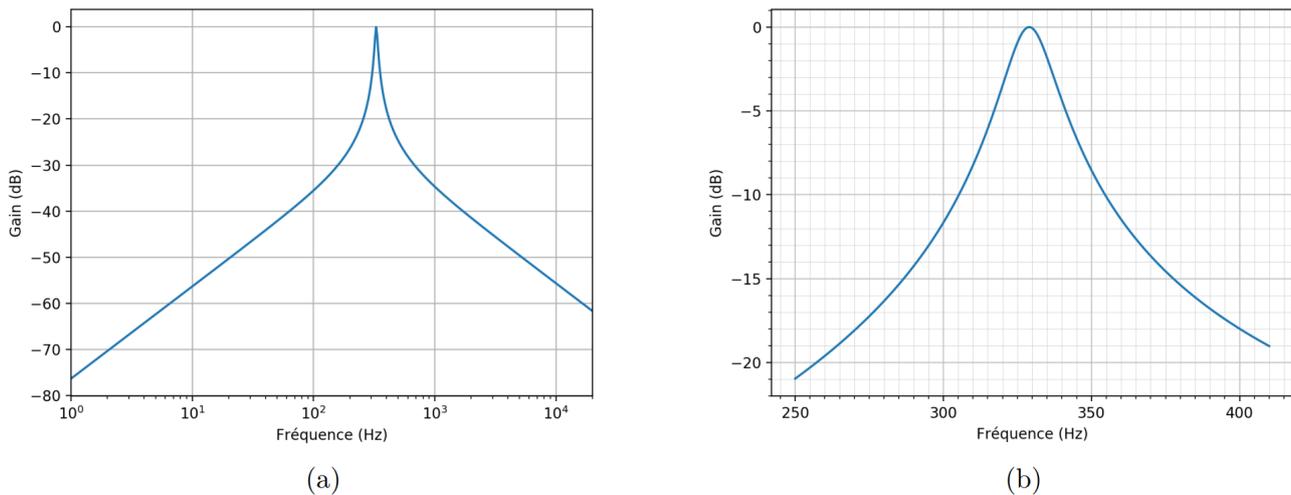
### 2.3 Filtrage (très) sélectif commandé

On souhaite maintenant sélectionner la fréquence fondamentale  $f_{co}$  du signal  $u_2$ , dont la valeur est à priori voisine de celle de la fréquence fondamentale théorique de vibration de la corde sélectionnée sur l'accordeur ( $f_{ac}$ ) (on suppose que la corde est légèrement désaccordée). On suppose pour la suite que c'est la corde Mi aiguë que l'on souhaite accorder.

Le principe du filtre ( $F_c$ ) est que sa fréquence caractéristique soit réglée par le signal de référence de fréquence  $f_{ac}$ .

#### 2.3.1 Diagramme de Bode

La Figure 5 représente le diagramme de Bode relatif au gain du filtre ( $F_c$ ) tracé à deux échelles différentes.

Figure 5: Diagramme de Bode en gain du filtre ( $F_c$ )

19. Dire en le justifiant rapidement, de quel type de filtre il s'agit. Quelle est sa fréquence centrale caractéristique ?  
On constate qu'il s'agit d'un **filtre passe-bande** : il filtre les basses et les hautes fréquences autour d'une certaine fréquence caractéristique.

Cette fréquence est la fréquence pour laquelle le gain et le gain en décibel est maximal. Elle correspond à une valeur de 330Hz d'après la Figure 5.

20. Donner une estimation de sa bande-passante à -3 dB après l'avoir définie.

On peut estimer que la bande passante à -3 dB correspond à la largeur en fréquence pour laquelle le gain en décibel est supérieur au gain maximal -3 dB, soit ici -3 dB.

Toujours d'après la Figure 5, cette bande passante notée  $\Delta f$  est

$$\Delta f \approx 340\text{Hz} - 320\text{Hz} = 20\text{Hz}.$$

21. Si la corde est désaccordée à  $f_{co} = 315\text{Hz}$ , estimer, en le justifiant, de quel facteur est atténuée sa composante spectrale fondamentale en sortie de ce filtre.

La composante fondamentale est la composante de fréquence  $f_{co}$ , donc, d'après la Figure 5, le gain en décibel pour une fréquence  $f_{co} = 315\text{Hz}$  est  $G_{dB}(f_{co}) = -6\text{dB}$ , le gain  $G(f_{co})$  est défini tel que

$$G_{dB}(f_{co}) = 20\log(G(f_{co}))$$

donc

$$G(f_{co}) = 10^{G_{dB}(f_{co})/20}.$$

**A.N.**

$$G(f_{co}) = 10^{-6/20} = \frac{1}{2}.$$

### 2.3.2 Analyse spectrale

La Figure 6 correspond au spectre du signal d'entrée  $u_e$  représenté sur la Figure 3.

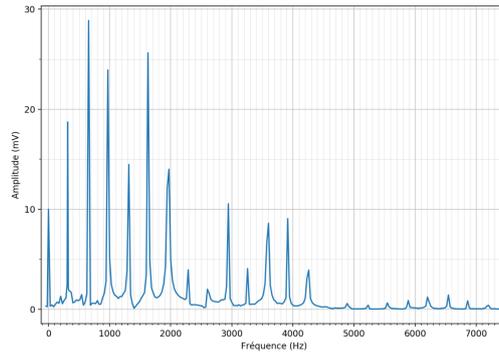


Figure 6: Spectre du signal d'entrée  $u_e$

22. Justifier qu'il est parfaitement cohérent qu'il s'agisse du spectre du signal de la Figure 3.

On constate d'abord que la composante continue à 0Hz a une amplitude de 10mV, ce qui correspond bien à la valeur estimée au début.

De plus, on observe que le fondamental, donc le pic de première fréquence après la fréquence nulle, correspond à une fréquence proche de 300Hz, ce qui correspond également à la valeur estimée au début.

Enfin, on constate que tous les harmoniques sont espacés de près de 300Hz, donc de fréquences multiples de celle du fondamental.

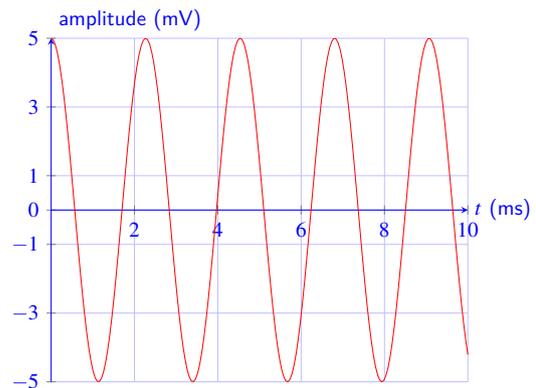
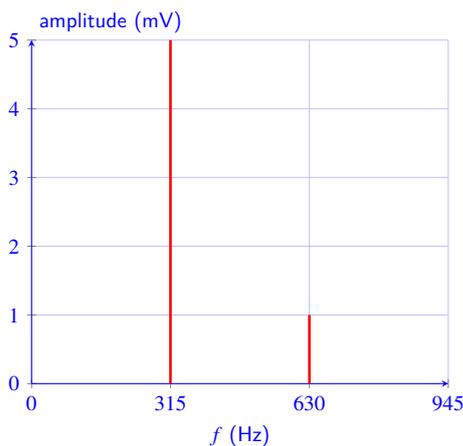
23. En le justifiant soigneusement, dire quel spectre de la Figure 7 correspond à la sortie du premier filtre ( $F_a$ ).

En sortant du premier filtre ( $F_a$ ), seule la composante continue est supprimée, le spectre en sortie est donc identique au spectre d'entrée, exceptée la composante continue à 0Hz, **il s'agit donc du spectre (a)**.

24. Tracer l'allure du spectre du signal en sortie du filtre ( $F_c$ ). Tracer l'allure du signal (temporel) correspondant.

En sortir du filtre passe-bande ( $F_c$ ), seule le fondamental à  $f_{co} = 315\text{Hz}$  et l'harmonique de rang 2, donc de fréquence  $2f_{co} = 630\text{Hz}$ , subsistent. D'après l'étude précédente, l'amplitude du fondamental est divisé par deux, et l'amplitude de l'harmonique de rang 2 est fortement amorti.

Le fondamental, ayant une amplitude beaucoup plus importante que l'harmonique de rang 2, le signal en sortie du filtre ( $F_c$ ) correspond quasiment au fondamental seul, soit un signal sinusoïdal de fréquence  $f_{co} = 315\text{Hz}$ , donc de période 3ms.



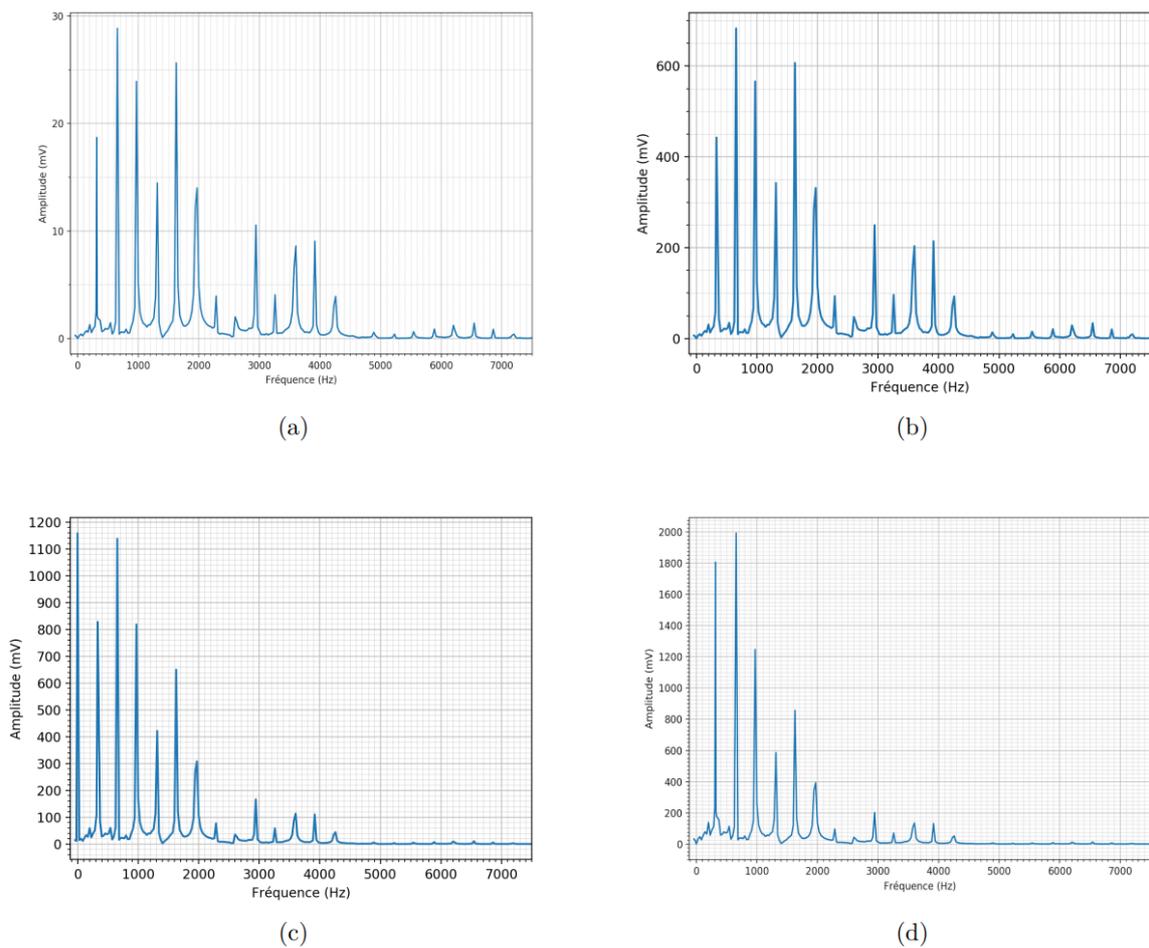


Figure 7: Spectres

### 3 Etude d'un filtre

Adapté de banque PT (2021)

Sur la Figure 8 on donne le schéma d'un filtre. On note  $\underline{H}_F(\omega)$  sa fonction de transfert.

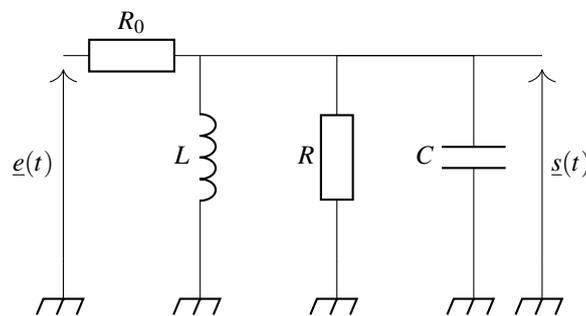


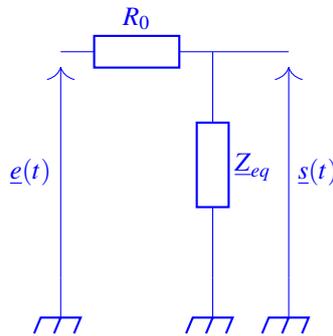
Figure 8: Schéma électrique.

25. Déterminer l'expression de  $\underline{H}_F(\omega)$  et la mettre sous la forme

$$\underline{H}_F(\omega) = \frac{H_0}{1 + jQ_F \left(x - \frac{1}{x}\right)}$$

avec  $x = \frac{\omega}{\omega_0}$ .

On réalise le schéma équivalent du circuit



L'impédance complexe équivalente  $Z_{eq}$  s'obtient à partir de la loi d'association des impédances complexes en parallèle, soit

$$Z_{eq} = \frac{1}{\frac{1}{Z_L} + \frac{1}{Z_R} + \frac{1}{Z_C}}$$

$$Z_{eq} = \frac{1}{\frac{1}{jL\omega} + \frac{1}{R} + jC\omega} = \frac{1}{\frac{1}{R} + j(C\omega - \frac{1}{L\omega})} = \frac{R}{1 + jR(C\omega - \frac{1}{L\omega})}$$

On peut alors obtenir la tension  $s(t)$  aux bornes de cette association de dipôle à partir d'un pont diviseur de tension

$$s(t) = e(t) \frac{Z_{eq}}{Z_{eq} + R_0}$$

$$s(t) = e(t) \frac{R}{1 + jR(C\omega - \frac{1}{L\omega})} \frac{1}{\frac{R}{1 + jR(C\omega - \frac{1}{L\omega})} + R_0} = e(t) \frac{R}{R + R_0 + jR_0R(C\omega - \frac{1}{L\omega})}$$

$$s(t) = e(t) \frac{\frac{R}{R+R_0}}{\frac{R+R_0}{R+R_0} + j \frac{R_0R}{R+R_0} (C\omega - \frac{1}{L\omega})} = e(t) \frac{\frac{R}{R+R_0}}{1 + j \frac{R_0R}{R+R_0} (C\omega - \frac{1}{L\omega})} = e(t) \frac{\frac{R}{R+R_0}}{1 + j \frac{R_0R}{R+R_0} \left( \sqrt{C} \sqrt{C} \frac{\sqrt{L}}{\sqrt{L}} \omega - \frac{1}{\omega} \frac{1}{\sqrt{L}\sqrt{L}} \frac{\sqrt{C}}{\sqrt{C}} \right)}$$

$$s(t) = e(t) \frac{\frac{R}{R+R_0}}{1 + j \frac{R_0R}{R+R_0} \sqrt{\frac{C}{L}} \left( \sqrt{LC} \omega - \frac{1}{\omega \sqrt{LC}} \right)}$$

La fonction de transfert est donc

$$H(j\omega) = \frac{s(t)}{e(t)} = \frac{\frac{R}{R+R_0}}{1 + j \frac{R_0R}{R+R_0} \sqrt{\frac{C}{L}} \left( \sqrt{LC} \omega - \frac{1}{\omega \sqrt{LC}} \right)}$$

26. Expliciter littéralement  $Q_F$ ,  $H_0$  et  $f_0$ .

On peut comparer la forme de la fonction de transfert obtenue précédemment à la forme

$$H_F(\omega) = \frac{H_0}{1 + jQ_F \left( x - \frac{1}{x} \right)}$$

On identifie alors la pulsation propre  $\omega_0$  à l'aide du terme entre parenthèses au dénominateur

$$\sqrt{LC} \omega - \frac{1}{\omega \sqrt{LC}} = x - \frac{1}{x} = \frac{\omega_0}{\omega} - \frac{\omega_0}{\omega}$$

donc

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}.$$

Il vient que la fréquence propre est

$$f_0 = \frac{\omega_0}{2\pi} = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}.$$

On obtient par identification directe les termes  $H_0$  et  $Q_F$

$$H_0 = \frac{R}{R+R_0} \quad \text{et} \quad Q_F = \frac{R_0 R}{R+R_0} \sqrt{\frac{C}{L}}.$$

27. Donner la relation reliant le facteur de qualité, la fréquence propre et la bande passante à -3 dB.

On a vu que pour une résonance en intensité le facteur de qualité était lié à la bande passante par la relation

$$Q_F = \frac{f_0}{\Delta f}$$

avec  $\Delta f$  la bande passante, soit l'écart entre les deux fréquences pour lesquelles l'amplitude maximal en sortie du circuit est divisé par  $\sqrt{2}$ , soit

$$G(f) = \frac{H_0}{\sqrt{2}}$$

donc

$$G_{dB}(f) = 20 \log \left( \frac{H_0}{\sqrt{2}} \right) = 20 \log(H_0) - 20 \log(\sqrt{2})$$

$$G_{dB}(f) = 20 \log(H_0) - 3 \text{ dB}$$

d'où le terme bande passante à -3 dB.

28. Faire l'application numérique pour  $R_0 = 470 \Omega$ ,  $R = 120 \Omega$ ,  $L = 50 \mu\text{H}$  et  $C = 50 \text{nF}$ .

**A.N.**

$$H_0 = \frac{R}{R+R_0} = \frac{120 \Omega}{120 \Omega + 470 \Omega} = 0,2.$$

$$Q_F = \frac{R_0 R}{R+R_0} \sqrt{\frac{C}{L}} = \frac{470 \Omega \times 120 \Omega}{120 \Omega + 470 \Omega} \sqrt{\frac{50 \times 10^{-9} \text{F}}{50 \times 10^{-6} \text{H}}} = 3.$$

$$f_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}} = \frac{1}{2\pi\sqrt{50 \times 10^{-6} \text{H} \times 50 \times 10^{-9} \text{F}}} = 100 \text{kHz}.$$

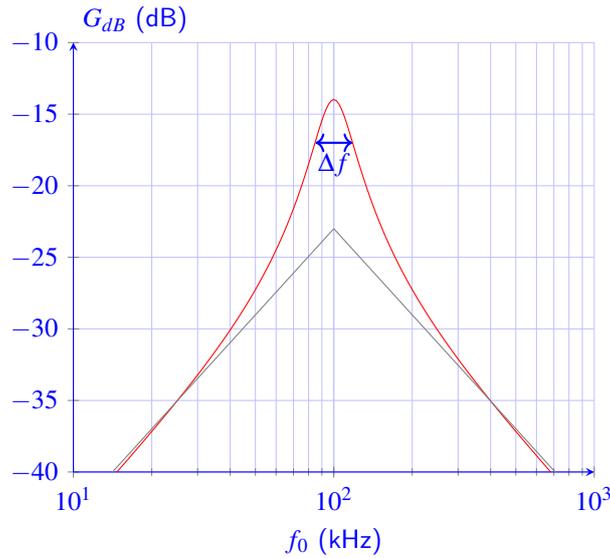
$$\Delta f = \frac{f_0}{Q_F} = \frac{100 \text{kHz}}{3} = 33 \text{kHz}.$$

29. Faire une représentation graphique approchée du gain en décibel  $G_{dB}$  en fonction de  $\log(x)$  ; préciser quelques valeurs sur ce graphe. Faire apparaître sur ce graphe la bande passante à -3 dB.

Le maximum du gain en décibel est atteint lorsque  $f = f_0$  soit  $xx = 1$ , donc **A.N.**

$$G_{dB} = 20 \log(H_0) = 20 \log(0,2) = -14 \text{dB}.$$

La bande passante à -3 dB  $\Delta f$  correspond aux fréquences correspondant à un gain en décibel de  $G_{dB} = -14 - 3 = -17 \text{dB}$ .



### 4 Microscope de Van Leeuwenhoek

Adapté du concours commun Mines-Ponts - Physique II - PC (2020)

Le premier microscope de Van Leeuwenhoek était rudimentaire et reposait sur l'utilisation d'une seule lentille boule utilisée comme objectif. Après polissage d'une goutte de silice fondue, Van Leeuwenhoek, obtint des lentilles boule de rayon  $R = 0,60$  mm de centre  $C$ . L'indice optique de la silice sera noté  $n$ , les foyers objet et image de la lentille sont respectivement notés  $F$  et  $F'$ .

Sur la Figure 9 on a représenté la trajectoire d'un rayon lumineux initialement parallèle à l'axe optique ( $Cz$ ) se propageant dans une lentille boule d'indice optique  $n$  placée dans l'air d'indice unitaire. Les rayons incidents et émergents se coupent dans un plan passant par  $C$ , perpendiculaire à l'axe ( $Cz$ ). L'étude sera menée dans l'approximation de Gauss (c'est-à-dire qu'on approximera les fonctions trigonométriques par leur développement limité à l'ordre 1 en 0).

Les angles formés entre les rayons lumineux et les normales aux dioptries sont notés  $i_1$ , au point  $I$  en entrée de la lentille et  $i_2$  à l'extérieur de la lentille au point  $J$ , en sortie. De même, les angles intérieurs seront notés  $r_1$  et  $r_2$ . L'angle  $\widehat{F' C J}$  est noté  $\beta_r$  et l'angle de déviation  $\widehat{C F' K}$  sera noté  $\beta$ .

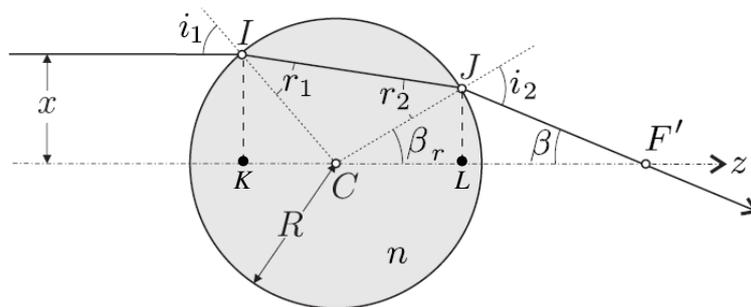


Figure 9: Lentille boule.

30. Déterminer la relation entre  $i_1$  et  $i_2$ .

On constate que le triangle  $ICJ$  est un triangle isocèle : les côtés  $IC$  et  $CJ$  correspondent au rayon  $R$  de la boule. Les valeurs absolues des angles  $r_1$  et  $r_2$  sont donc égaux. D'après le schéma  $r_1$  est positif et  $r_2$  est négatif si l'on utilise l'orientation des angles dans le sens trigonométrique.

De plus, d'après la loi de la réfraction de Snell-Descartes

$$n_{air} \sin i_1 = n \sin r_1 \quad \text{et} \quad n \sin r_2 = n_{air} \sin i_2$$

comme  $r_1 = -r_2$  on note  $r_1 = -r_2 \equiv r$ .

$$n_{air} \sin i_1 = n \sin r \quad \text{et} \quad n \sin(-r) = n_{air} \sin i_2$$

$$n_{air} \sin i_1 = n \sin r \quad \text{et} \quad -n \sin r = n_{air} \sin i_2$$

donc

$$n_{air} \sin i_1 = -n_{air} \sin i_2$$

$$\sin i_1 = -\sin i_2$$

$$i_1 = -i_2.$$

31. Exprimer  $i_1$  en fonction de  $x$  et  $R$ .

Le rayon lumineux arrivant parallèlement à l'axe optique ( $Cz$ ), si l'on considère la droite passant par les points  $I$  et  $C$ , l'angle qu'elle forme avec le rayon parallèle, soit  $i_1$ , est le même que l'angle qu'elle forme avec l'axe optique ( $Cz$ ), qu'on appelle ici  $\widehat{ICK}$ . Ainsi on peut se placer dans le triangle rectangle d'hypoténuse  $ICK$  pour exprimer la relation entre l'angle  $i_1$  et les côtés de ce triangle

$$\sin \widehat{ICJ} = \sin i_1 = \frac{IK}{CI}$$

or  $IK = x$  et  $CI = R$ , donc

$$\sin i_1 = \frac{x}{R}$$

et si on exprime la fonction sinus par son développement limité à l'ordre 1 en 0

$$\sin i_1 \approx i_1 \approx \frac{x}{R}.$$

32. Exprimer  $\beta_r$  en fonction de  $i_1$  et  $n$ , puis en fonction de  $x$ ,  $R$  et  $n$ .

Considérons l'angle  $\widehat{ICJ}$ . La somme des angles d'un triangle étant de  $\pi$ , on écrit que

$$\widehat{ICJ} = \pi - |r_1| - |r_2|$$

soit

$$\widehat{ICJ} = \pi - 2r.$$

On constate également que les angles  $\widehat{ICK} = i_1$ ,  $\widehat{ICJ}$  et  $\beta_r$  s'étendent sur un demi-cercle, leur somme est donc égale à  $\pi$ , soit

$$\pi = i_1 + \widehat{ICJ} + \beta_r$$

soit

$$\beta_r = \pi - i_1 - \widehat{ICJ}$$

$$\beta_r = \pi - i_1 - (\pi - 2r)$$

$$\beta_r = 2r - i_1.$$

Les angles  $i_1$  et  $r$  sont liés par la relation des Descartes  $n_{air} \sin i_1 = n \sin r$  qu'on peut approximer grâce au développement limité de la fonction sinus

$$n_{air} \sin i_1 \approx n_{air} i_1$$

$$n \sin r \approx nr$$

et comme  $n_{air}$  est pris égal à 1 il vient que

$$i_1 = nr \quad \text{ou} \quad r = \frac{i_1}{n}.$$

On peut ainsi exprimer  $\beta_r$

$$\beta_r \approx 2 \left( \frac{i_1}{n} \right) - i_1$$

$$\beta_r \approx i_1 \left( \frac{2}{n} - 1 \right).$$

En utilisant l'expression de  $i_1$  trouvé précédemment

$$\beta_r \approx \frac{x}{R} \left( \frac{2}{n} - 1 \right).$$

On considère maintenant que l'on peut utiliser l'égalité = à la place de l'approximation  $\approx$ .

33. Exprimer  $\beta$  en fonction de  $i_1$  et  $\beta_r$  puis de  $x$ ,  $R$  et  $n$ .

Considérons l'angle  $\widehat{CJF'}$ . On constate que cet angle et l'angle  $i_2$  s'étendent sur demi-cercle, soit

$$\pi = i_2 + \widehat{CJF'}$$

soit

$$\widehat{CJF'} = \pi - i_2$$

$$\widehat{CJF'} = \pi - i_1.$$

Dans le triangle  $CJF'$ , la somme des angles donne un angle de  $\pi$ , soit

$$\pi = \beta_r + \widehat{CJF'} + \beta$$

ainsi

$$\beta = \pi - \beta_r - \widehat{CJF'}$$

$$\beta = \pi - \beta_r - (\pi - i_1)$$

$$\beta = i_1 - \beta_r$$

soit

$$\beta = i_1 - i_1 \left( \frac{2}{n} - 1 \right)$$

$$\beta = 2i_1 \left( 1 - \frac{1}{n} \right)$$

$$\beta = \frac{2x}{R} \left( 1 - \frac{1}{n} \right).$$

34. En déduire la distance focale  $f'_L$  définie comme la distance  $CF'$  sur la Figure 9 en fonction de  $n$  et  $R$ .  
Afin d'obtenir la distance  $CF'$ , on estime d'abord les distances  $CL$  et  $LF'$  telles que  $CF' = CL + LF'$ .  
Pour obtenir la distance  $CL$  on se place dans le triangle  $CJL$ , il vient que

$$\cos \beta_r = \frac{CL}{CJ}$$

avec  $CJ = R$  et  $\cos \alpha \approx 1$  il vient que

$$1 = \frac{CL}{R}$$

donc

$$CL = R.$$

Exprimons également la distance  $JL$  qui est commune aux deux triangles d'intérêt ici  $CJL$  et  $LF'J$ . Dans le triangle  $CJL$  on peut écrire que

$$\sin \beta_r = \frac{JL}{CJ}$$

avec  $CJ = R$  et  $\sin \alpha \approx \alpha$  il vient que

$$\beta_r = \frac{JL}{R}$$

soit

$$JL = R\beta_r.$$

Pour obtenir la distance  $CL$  on se place dans le triangle  $LF'J$ , il vient que

$$\tan \beta = \frac{JL}{LF'}$$

avec  $JL = R\beta_r$  et  $\tan \alpha \approx \alpha$  il vient que

$$\beta = R \frac{\beta_r}{LF'}$$

soit

$$LF' = R \frac{\beta_r}{\beta}.$$

La distance focale  $f'_L = CF'$  est donc

$$CF' = CL + LF'$$

$$CF' = R + R \frac{\beta_r}{\beta}$$

$$CF' = R \left( 1 + \frac{x}{R} \left( \frac{2}{n} - 1 \right) \times \frac{R}{2x} \frac{1}{1 - \frac{1}{n}} \right)$$

$$CF' = R \left( 1 + \frac{1}{2} \left( \frac{2-n}{n} \right) \times \frac{n}{n-1} \right)$$

$$CF' = R \left( 1 + \frac{1}{2} \frac{2-n}{n-1} \right)$$

$$CF' = R \left( \frac{2n-2}{2n-2} + \frac{2-n}{2n-2} \right)$$

$$CF' = R \frac{2n-2+2-n}{2n-2}$$

$$CF' = R \frac{n}{2n-2}$$

$$CF' = \frac{R}{2} \frac{n}{n-1}.$$

35. Estimer enfin numériquement  $f'_L$  en prenant  $n = 1,5$ .

**A.N.**

$$f'_L = \frac{R}{2} \frac{n}{n-1}$$

$$f'_L = \frac{0,60 \text{ mm}}{2} \frac{1,5}{1,5-1}$$

$$f'_L = \frac{0,60 \text{ mm}}{2} \frac{1,5}{1,5-1}$$

$$f'_L = 0,90 \text{ mm.}$$

Dans toute la suite,  $(Ox)$  désigne la direction transverse à l'axe optique contenant l'objet étudié. On limite l'étude au plan  $(Ox, Oz)$  et on prendra  $f'_L = 1,0$  mm. On utilise à présent un modèle de lentille mince équivalent à la lentille boule, possédant la même distance focale  $f'_L$  et le même rayon  $R$ . Celle-ci est représentée sur la Figure 10.

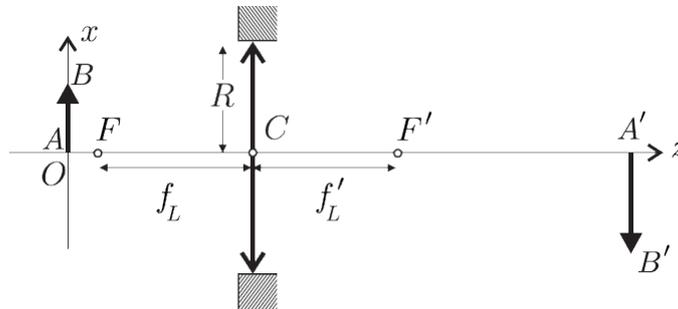


Figure 10: Lentille mince équivalente à la lentille boule.

Une des normes actuelles est d'imposer une distance  $l = 195$  mm sur l'axe optique entre un objet et son image à travers l'objectif.

36. Exprimer  $l$  en fonction de  $\overline{CA}$  et  $\overline{CA'}$ .

La distance  $l$  correspond à la distance entre un objet positionné en  $A$  et son image positionnée en  $A'$ , soit  $\overline{AA'}$ . On peut exprimer cette distance en fonction des distances de l'objet et de l'image par rapport au centre optique  $C$  de la lentille

$$l = \overline{AC} + \overline{CA'}$$

soit

$$l = -\overline{CA} + \overline{CA'}$$

$$l = \overline{CA'} - \overline{CA}.$$

37. Montrer que  $\overline{CA}$  peut-être mis sous la forme d'une équation du second degré telle que

$$\overline{CA}^2 + l\overline{CA} + lf'_L = 0.$$

L'équation présentée contient des termes que l'on retrouve dans la relation de conjugaison de Descartes liée à la position :  $f'_L$  la distance focale de la lentille et  $\overline{CA}$  la distance entre le centre optique et la position de l'objet.

Exprimons cette relation

$$\frac{1}{\overline{CA'}} - \frac{1}{\overline{CA}} = \frac{1}{f'_L}$$

or  $l = \overline{CA'} - \overline{CA}$ , donc

$$\overline{CA'} = l + \overline{CA}$$

donc

$$\begin{aligned}\frac{1}{l+\overline{CA}} - \frac{1}{\overline{CA}} &= \frac{1}{f'_L} \\ \frac{\overline{CA} - l - \overline{CA}}{\overline{CA}(l+\overline{CA})} &= \frac{1}{f'_L} \\ -\frac{l}{\overline{CA}(l+\overline{CA})} &= \frac{1}{f'_L} \\ -\frac{\overline{CA}(l+\overline{CA})}{l} &= f'_L \\ -\overline{CA}^2 - l\overline{CA} &= lf'_L\end{aligned}$$

$$\overline{CA}^2 + l\overline{CA} + lf'_L = 0.$$

38. Afin que le grandissement transversal  $\gamma$  du microscope de Van Leeuwenhoek soit supérieur à 1 en valeur absolue, montrer que

$$|\overline{CA}| < \frac{l}{2}.$$

Exprimons le grandissement à partir de la relation de conjugaison de Descartes du grandissement, soit

$$\gamma = \frac{\overline{CA'}}{\overline{CA}}.$$

Pour que  $|\gamma| > 1$ , comme  $\gamma < 0$ , il faut que  $\gamma < -1$ , soit

$$\frac{\overline{CA'}}{\overline{CA}} < -1$$

or  $\overline{CA'} = l + \overline{CA}$  donc

$$\frac{l + \overline{CA}}{\overline{CA}} < -1$$

si on multiplie par  $\overline{CA} < 0$  des deux côtés de l'inégalité, on doit changer son sens, soit

$$l + \overline{CA} > -\overline{CA}$$

$$l > -2\overline{CA}$$

$$\frac{l}{2} > -\overline{CA}$$

or comme  $\overline{CA} < 0$ , on peut écrire que  $-\overline{CA} = |\overline{CA}|$  soit

$$|\overline{CA}| < \frac{l}{2}.$$

39. À partir des deux derniers résultats, déterminer l'expression de  $\overline{CA}$  en fonction de  $l$  et  $f'_L$ .  
En résolvant l'équation du second degré précédente, on trouve deux solutions pour  $\overline{CA}$ .

$$\Delta = l^2 - 4lf'_L$$

$$\overline{CA}_- = -\frac{l}{2} - \frac{\sqrt{l^2 - 4lf'_L}}{2}$$

$$\overline{CA}_+ = -\frac{l}{2} + \frac{\sqrt{l^2 - 4lf'_L}}{2}.$$

Or on a montré que pour obtenir une image agrandie, il fallait que  $|\overline{CA}| < l/2$ , soit  $\overline{CA} > -l/2$ . Afin d'obtenir une image agrandie, seule la solution  $\overline{CA}_+$  respecte cette condition, ainsi il vient que

$$\overline{CA} = -\frac{l}{2} + \frac{\sqrt{l^2 - 4lf'_L}}{2}.$$

40. Calculer la valeur numérique de  $\overline{CA}$  et  $\overline{CA}'$ . Par quelles grandeurs peut-on les approximer ? Exprimer  $\gamma$  en fonction de ces grandeurs et calculer sa valeur numérique.

**A.N.**

$$\overline{CA} = -\frac{l}{2} + \frac{\sqrt{l^2 - 4lf'_L}}{2}$$

$$\overline{CA} = -\frac{195 \text{ mm}}{2} + \frac{\sqrt{195^2 - 4 \times 195 \times 0,90}}{2}$$

$$\overline{CA} = -0,90 \text{ mm.}$$

$$l = \overline{CA}' - \overline{CA}$$

$$\overline{CA}' = l + \overline{CA}$$

$$\overline{CA}' = 195 \text{ mm} + (-0,90 \text{ mm})$$

$$\overline{CA}' = 194 \text{ mm.}$$

On peut approximer  $\overline{CA}$  à  $f_L = -f'_L = -0,90 \text{ mm}$ , la distance focale objet de la lentille, et on peut approximer  $\overline{CA}'$  à  $l = 195 \text{ mm}$ , la distance entre l'objet et l'image. Ainsi

$$\gamma = \frac{\overline{CA}'}{\overline{CA}} \approx -\frac{l}{f'_L}.$$

**A.N.**

$$\gamma = -\frac{195 \text{ mm}}{0,90 \text{ mm}} = 217.$$

## 5 Le pendule simple

Adapté du concours ENSTIM - MPSI, PCSI et PTSI (1996)

### 5.1 Un pendule simple non amorti

On considère un point matériel  $M$  de masse  $m$  accroché à un point fixe  $O$  par l'intermédiaire d'un fil inextensible de longueur  $l$  et de masse nulle. L'ensemble est situé dans le champ de pesanteur terrestre  $\vec{g} = g\vec{u}_x$  (avec  $g = 9,81 \text{ m.s}^{-2}$ ),  $\vec{u}_x$  étant un vecteur unitaire de l'axe  $Ox$ . On note, l'angle orienté :  $\theta = (\vec{u}_x, \vec{OM})$ . On néglige les frottements. On lâche la masse d'un angle  $\theta_0$  sans vitesse initiale.

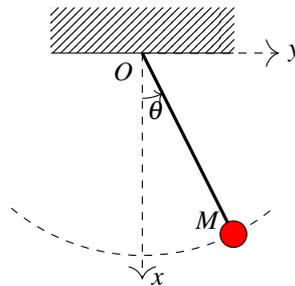


Figure 11: Schéma du pendule simple.

41. Montrer que le mouvement est plan.

La projection du principe fondamentale de la dynamique est nulle selon l'axe  $(Oz)$ . Comme la vitesse initiale est nulle, la vitesse du système selon l'axe  $(Oz)$  est nulle à tout instant, **le mouvement s'effectue uniquement dans le plan  $Oxy$** .

42. Établir l'équation différentielle du second ordre, vérifiée par  $\theta$ .

Deux solutions : utiliser le PFD ou le théorème de la puissance cinétique. Prenons la deuxième.

Le système étudié est le pendule dans le référentiel terrestre supposé galiléen. Les forces appliquées sur le système sont son poids  $\vec{P}$  et la tension du fil  $\vec{T}$ .

La vitesse du pendule dans le repère polaire est

$$\vec{v} = l\dot{\theta}\vec{u}_\theta.$$

Comme la tension du fil est selon  $u_\rho$ , donc orthogonale à  $u_\theta$ , sa puissance s'annule

$$\mathcal{P}(\vec{T}) = \vec{T} \cdot \vec{v} = 0.$$

Ainsi le théorème de la puissance cinétique donne

$$\frac{d\mathcal{E}_c}{dt} = \mathcal{P}(\vec{P}) = m\vec{g} \cdot \vec{v} = -mg \sin \theta l \dot{\theta}.$$

L'énergie cinétique est

$$\mathcal{E}_c = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}^2$$

donc

$$\frac{d\mathcal{E}_c}{dt} = ml^2\dot{\theta}\ddot{\theta}$$

ainsi

$$ml^2\dot{\theta}\ddot{\theta} = -mg \sin \theta l \dot{\theta}.$$

Comme on recherche des solutions pour lesquelles  $\dot{\theta} \neq 0$ , on peut diviser la dernière équation par  $\dot{\theta}$ , donc

$$l\ddot{\theta} = -g \sin \theta.$$

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{l} \sin \theta = 0.$$

43. En supposant que les élongations angulaires sont faibles, montrer que l'équation du mouvement est approchée par celle d'un oscillateur harmonique de pulsation  $\omega_0$  dont on donnera l'expression en fonction de  $l$  et  $g$ .

En déduire  $\theta(t)$ . On rappelle que pour les faibles élongations angulaires,  $\sin(\theta) \approx \theta$ .

Pour des élongations angulaires faibles, on peut utiliser le développement limité de la fonction sinus à l'ordre 1 en 0, soit

$$\sin \theta \approx \theta$$

donc

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{l} \theta = 0.$$

On reconnaît l'équation caractéristique d'un oscillateur harmonique de pulsation propre  $\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{l}}$ . La solution générale de cette équation est

$$\theta(t) = A \cos(\omega_0 t) + B \sin(\omega_0 t)$$

avec  $A$  et  $B$  des constantes à déterminer à partir des conditions initiales. Ici  $\theta(t=0) = \theta_0$  et  $\dot{\theta}(t=0) = 0$ . Donc il vient que

$$\theta(t=0) = A = \theta_0$$

soit

$$\theta(t) = \theta_0 \cos(\omega_0 t) + B \sin(\omega_0 t).$$

La vitesse angulaire est donc

$$\dot{\theta}(t) = -\omega_0 \theta_0 \sin(\omega_0 t) + \omega_0 B \cos(\omega_0 t).$$

A  $t = 0$ , il vient que

$$\dot{\theta}(t) = \omega_0 B = 0$$

donc  $B = 0$ , et ainsi

$$\theta(t) = \theta_0 \cos(\omega_0 t).$$

44. Exprimer l'énergie potentielle de pesanteur en fonction de  $x$  puis de  $\theta$ .

Comme l'axe  $(Ox)$  est dirigé vers le bas, l'énergie potentielle de pesanteur est

$$\mathcal{E}_p = -mgx + \text{cst}$$

soit

$$\mathcal{E}_p = -mgl \cos \theta + \text{cst}.$$

On peut prendre comme origine de l'énergie potentielle de pesanteur, le point le plus bas du mouvement soit pour  $\theta = 0$ , ainsi

$$0 = -mgl + \text{cst} \quad \text{donc} \quad \text{cst} = mgl$$

donc

$$\mathcal{E}_p = mgl(1 - \cos \theta).$$

45. Montrer que l'énergie mécanique se conserve au cours du mouvement.

En déduire l'équation différentielle du premier ordre reliant  $\dot{\theta}^2$ ,  $\theta$ ,  $\theta_0$  et les paramètres caractéristiques du système. On garde les mêmes conditions initiales.

D'après le théorème de l'énergie mécanique, la variation d'énergie mécanique est égale à la somme des travaux des forces non conservatives. Comme la tension du fil ne travaille pas car orthogonale au mouvement, la seule

force travaillant est le poids qui est une force conservative. Ainsi, le travail des forces non conservatives est nulle donc l'énergie mécanique ne varie : **elle se conserve au cours du mouvement.**

Comme l'énergie mécanique est telle que

$$\mathcal{E}_m = \mathcal{E}_c + \mathcal{E}_p$$

à  $t = 0$  il vient que

$$\mathcal{E}_m(t=0) = \mathcal{E}_p(t=0) = mgl(1 - \cos \theta_0)$$

car à  $t = 0$  la vitesse est nulle d'après l'énoncé.

A un autre instant  $t$  quelconque

$$\mathcal{E}_m(t) = \frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}^2 + mgl(1 - \cos \theta).$$

Comme l'énergie mécanique ne varie pas au cours du mouvement, il vient que

$$\mathcal{E}_m(t=0) = \mathcal{E}_m(t)$$

soit

$$mgl(1 - \cos \theta_0) = \frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}^2 + mgl(1 - \cos \theta)$$

$$g(\cos \theta - \cos \theta_0) = \frac{1}{2}l\dot{\theta}^2 +$$

donc

$$\dot{\theta} = \sqrt{2\frac{g}{l}(\cos \theta - \cos \theta_0)}$$

$$\dot{\theta} = \pm \sqrt{2\omega_0^2(\cos \theta - \cos \theta_0)}$$

avec choix du signe dépendant du sens du mouvement.

46. Donner l'expression de la période  $T(\theta)$  sous forme d'une intégrale en fonction  $\theta$ ,  $\theta_0$  et des paramètres caractéristiques du système. On précisera soigneusement les bornes d'intégration.

On remarque que le passage de la position  $\theta = 0$  à la position  $\theta = \theta_0$  se fait durant une durée  $\frac{T}{4}$ . On peut donc intégrer la différentielle de temps  $dt$  entre ces deux positions pour obtenir la valeur de  $\frac{T}{4}$ .

Pour obtenir l'expression de la différentielle de temps  $dt$ , on utilise l'équation obtenue précédemment, soit

$$\frac{d\theta}{dt} = \pm \sqrt{2\omega_0^2(\cos \theta - \cos \theta_0)}.$$

Afin de choisir le bon signe, il faut remarquer que lors du passage de la position  $\theta = 0$  à la position  $\theta = \theta_0$ , d'après l'orientation de  $\theta$  donné par le schéma, la vitesse diminue mais reste positive, il faut donc choisir la racine positive (si on avait étudié le mouvement entre  $\theta_0$  et 0, la vitesse aurait été négative).

Il vient que

$$dt = \frac{1}{\sqrt{2\omega_0^2(\cos \theta - \cos \theta_0)}}d\theta.$$

donc

$$\frac{T}{4} = \int_0^{\theta_0} \frac{1}{\sqrt{2\omega_0^2(\cos \theta - \cos \theta_0)}}d\theta$$

et finalement

$$T = 4 \int_0^{\theta_0} \frac{1}{\sqrt{2\omega_0^2(\cos \theta - \cos \theta_0)}}d\theta.$$

**N.B.** On aurait pu intégrer la différentiel de temps entre  $\theta_0$  et  $-\theta_0$ , puis entre  $-\theta_0$  et  $\theta_0$  pour obtenir  $T$  directement, mais il aurait fallu distinguer les trajets avec vitesse positive et négative, et utiliser la symétrie du mouvement

$$T = \int_{\theta_0}^{-\theta_0} -\frac{1}{\sqrt{2\omega_0^2(\cos\theta - \cos\theta_0)}} d\theta + \int_{-\theta_0}^{\theta_0} \frac{1}{\sqrt{2\omega_0^2(\cos\theta - \cos\theta_0)}} d\theta$$

$$T = \int_{-\theta_0}^{\theta_0} \frac{1}{\sqrt{2\omega_0^2(\cos\theta - \cos\theta_0)}} d\theta + \int_{-\theta_0}^{\theta_0} \frac{1}{\sqrt{2\omega_0^2(\cos\theta - \cos\theta_0)}} d\theta = 2 \int_{-\theta_0}^{\theta_0} \frac{1}{\sqrt{2\omega_0^2(\cos\theta - \cos\theta_0)}} d\theta.$$

Or comme la fonction est paire, il vient que

$$T = 4 \int_0^{\theta_0} \frac{1}{\sqrt{2\omega_0^2(\cos\theta - \cos\theta_0)}} d\theta.$$

**On ne demande pas de calculer cette intégrale.**

Une intégration numérique donne la courbe ci-dessous. Commenter la courbe obtenue.

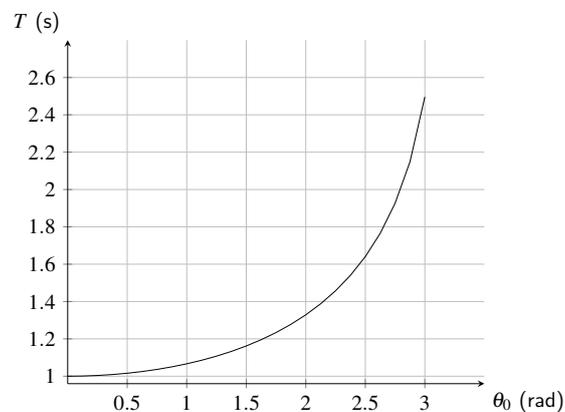


Figure 12: Variation de la période  $T$  d'un pendule en fonction de son angle initial  $\theta_0$ .

On constate que pour les faibles valeurs d'angle initial  $\theta_0 \ll 1$  on a bien un mouvement isochrone : la période ne dépend pas de  $\theta_0$ .

47. Proposer une méthode pour déterminer expérimentalement les valeurs de  $T$ .

Pour différentes valeurs de  $\theta_0$ , particulières, on mesure la durée entre deux passages successifs par la verticale, dans le même sens. soit  $\theta = 0$ , dans le même sens. On obtient la période  $T$  pour les différentes valeurs de  $\theta_0$ .

## 5.2 Oscillateur amorti

Lorsque l'on enregistre expérimentalement  $\theta(t)$ , on constate que l'amplitude de  $\theta$  diminue lentement. On interprète ce résultat par la présence de frottements que l'on modélise par :  $\vec{f} = -\alpha \vec{v}$ , avec  $\vec{v}$  la vitesse du point  $M$  et  $\alpha$ , une constante positive.

48. Établir l'équation différentielle du second ordre vérifiée par  $\theta$ .

En se limitant aux petits angles, écrire l'équation sous la forme :

$$\ddot{\theta} + \frac{2}{\tau} \dot{\theta} + \omega_0^2 \theta = 0.$$

Donner l'expression de  $\tau$  et son interprétation physique.

On peut utiliser le théorème de la puissance cinétique utilisé plus tôt, en ajoutant la puissance des forces de frottements, soit

$$\frac{d\mathcal{E}_c}{dt} = \mathcal{P}(\vec{P}) + \mathcal{P}(\vec{f})$$

$$ml^2\ddot{\theta} = -mg \sin \theta l \dot{\theta} - \alpha v^2$$

$$ml^2\ddot{\theta} = -mg \sin \theta l \dot{\theta} - \alpha l^2 \dot{\theta}^2.$$

Il vient donc que

$$\ddot{\theta} + \frac{\alpha}{m} \dot{\theta}^2 + \frac{g}{l} \sin \theta \dot{\theta} = 0.$$

En se limitant aux petits angles

$$\ddot{\theta} + \frac{\alpha}{m} \dot{\theta}^2 + \frac{g}{l} \theta \dot{\theta} = 0.$$

En divisant par  $\dot{\theta} \neq 0$

$$\ddot{\theta} + \frac{\alpha}{m} \dot{\theta} + \frac{g}{l} \theta = 0.$$

On peut alors identifier les différents termes de cette équation avec les termes de l'énoncé.

On retrouve la pulsation propre du système

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{l}}$$

et le **temps caractéristique  $\tau$  d'évolution du système** tel que

$$\frac{2}{\tau} = \frac{\alpha}{m}$$

donc

$$\tau = \frac{2m}{\alpha}.$$

49. A quelle condition obtient-on un régime pseudo-périodique ?

Le régime est pseudopériodique si le facteur de qualité  $Q$  est supérieur à 1/2.

Le facteur de qualité est lié à la constante de temps du système de telle manière que

$$\frac{1}{Q\omega_0} = \frac{2}{\tau\omega_0^2}$$

soit

$$Q = \frac{\omega_0\tau}{2}$$

donc il faut que

$$\frac{\omega_0\tau}{2} > \frac{1}{2}$$

donc

$$\omega_0 > \frac{1}{\tau}.$$

Dans le cadre d'un régime pseudo-périodique, calculer la pseudo-pulsation  $\omega$  et la pseudo-période  $T$ .

La pseudo-pulsation, par définition, est

$$\omega = \omega_0 \sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}}$$

soit

$$\omega = \omega_0 \sqrt{1 - \frac{1}{\omega_0^2 \tau^2}} = \sqrt{\omega_0^2 - \frac{1}{\tau^2}}.$$

Et la pseudo-période est

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega_0^2 - \frac{1}{\tau^2}}}$$

50. On appelle décrément logarithmique la quantité

$$\delta = \ln \left( \frac{\theta(t)}{\theta(t+T)} \right).$$

Exprimer  $\delta$  en fonction de  $T$  et  $\tau$ .

L'expression générale de  $\theta$  en régime pseudo-périodique est

$$\theta(t) = \theta_0 e^{-t/\tau} \left( \cos(\omega_0 t) + \frac{1}{\omega\tau} \sin(\omega_0 t) \right)$$

il vient donc que

$$\frac{\theta(t)}{\theta(t+T)} = \frac{e^{-t/\tau} \left( \cos(\omega_0 t) + \frac{1}{\omega\tau} \sin(\omega_0 t) \right)}{e^{-(t+T)/\tau} \left( \cos(\omega_0(t+T)) + \frac{1}{\omega\tau} \sin(\omega_0(t+T)) \right)}.$$

Le régime étant pseudo-périodique  $\cos(\omega_0 t) = \cos(\omega_0(t+T))$  et  $\sin(\omega_0 t) = \sin(\omega_0(t+T))$  donc

$$\frac{\theta(t)}{\theta(t+T)} = \frac{e^{-t/\tau}}{e^{-(t+T)/\tau}} = e^{-t/\tau + t/\tau + T/\tau} = e^{T/\tau}.$$

Ainsi le décrément logarithmique est simplement le rapport entre la pseudo-période et le temps caractéristique d'évolution du système

$$\delta = \ln \left( \frac{\theta(t)}{\theta(t+T)} \right) = \ln \left( e^{T/\tau} \right) = \frac{T}{\tau}.$$

51. La masse est  $m = 470$  g. La figure ci-après représente les variations de  $\theta$  avec le temps.

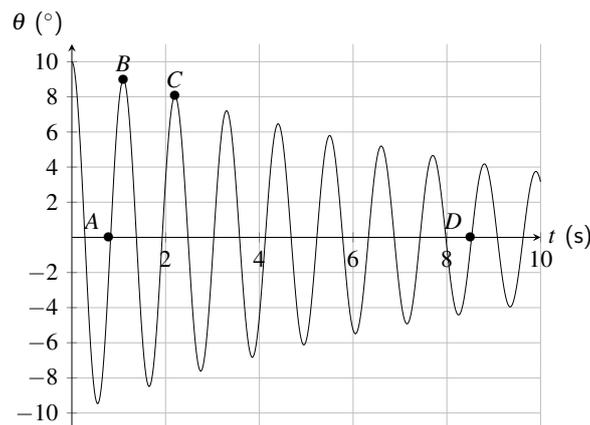


Figure 13: Variation de la coordonnée  $\theta$  d'un pendule amorti en fonction du temps.

On précise les coordonnées de 4 points particuliers:

Points	A	B	C	D
$t$ (s)	0,53	1,1	2,2	8,25
$\theta$ ( $^\circ$ )	0	8,95	8,02	0

Calculer numériquement à partir des valeurs expérimentales le décrément logarithmique  $\delta$ .

En étudiant les deux maxima successifs  $B$  et  $C$  on le décrément logarithmique. Comme ils sont séparés d'une période, le rapport de leur valeur de  $\theta$  est

$$\frac{\theta(B)}{\theta(C)} = \frac{\theta(t)}{\theta(t+T)}$$

donc il vient que

$$\delta = \ln\left(\frac{\theta(B)}{\theta(C)}\right).$$

**A.N.**

$$\delta = \ln\left(\frac{8,95}{8,02}\right) = 0,110.$$

52. Calculer numériquement à partir des valeurs expérimentales la pseudo-période,  $T$ .

On peut mesurer la durée séparant les points  $B$  et  $C$  afin d'obtenir la pseudo-période  $T$ .

**A.N.**

$$T = 2,2 - 1,1 = 1,1 \text{ s.}$$

53. Calculer numériquement à partir des valeurs expérimentales le temps  $\tau$ .

On obtient le temps  $\tau$  à partir des deux dernières questions. En effet, on a montré que

$$\delta = \frac{T}{\tau}$$

donc

$$\tau = \frac{T}{\delta}.$$

**A.N.**

$$\tau = \frac{1,1}{0,110} = 10 \text{ s.}$$

54. Calculer numériquement à partir des valeurs expérimentales la constante  $\alpha$ .

On a montré que le temps  $\tau$  était défini tel que

$$\tau = \frac{2m}{\alpha}$$

donc

$$\alpha = \frac{2m}{\tau}.$$

**A.N.**

$$\alpha = \frac{2 \times 0,470 \text{ kg}}{10 \text{ s}} = 9,4 \cdot 10^{-2} \text{ kg} \cdot \text{s}^{-1}.$$

## 6 Générateur de Thévenin

Un générateur débite un courant électrique d'intensité  $I = 200$  mA lorsqu'il impose une tension  $U_{AB} = 4$  V, et un courant d'intensité  $I = 800$  mA lorsqu'il impose une tension  $U_{AB} = 1$  V. On modélise ce générateur par un générateur de Thévenin avec une force électromotrice  $E$  et une résistance interne  $r$ .

55. Déterminer la valeur de  $E$  et  $r$ .

La tension  $U_{AB}$  aux bornes du générateur de Thévenin est fonction de sa force électromotrice  $E$ , de sa résistance interne  $r$  et de l'intensité du courant qu'il débite dans le circuit  $I$ , telle que

$$U_{AB} = E - rI.$$

Lorsqu'il est branché à un premier circuit la tension qu'il impose et l'intensité du courant qu'il débite sont tels que

$$U'_{AB} = E - rI'$$

avec  $U'_{AB} = 4$  V et  $I' = 200$  mA.

Lorsqu'il est branché à un deuxième circuit la tension qu'il impose et l'intensité du courant qu'il débite sont tels que

$$U''_{AB} = E - rI''$$

avec  $U''_{AB} = 1$  V et  $I'' = 800$  mA.

En utilisant les expressions de  $U'_{AB}$  et  $U''_{AB}$  on peut obtenir l'expression de  $r$  : soustrayons  $U''_{AB}$  à  $U'_{AB}$

$$U'_{AB} - U''_{AB} = E - rI' - (E - rI'')$$

$$U'_{AB} - U''_{AB} = r(I'' - I')$$

$$r = \frac{U'_{AB} - U''_{AB}}{I'' - I'}$$

**A.N.**

$$r = \frac{(4 - 1) \text{ V}}{(800 - 200) \cdot 10^{-3} \text{ A}}$$

$$r = 5 \text{ } \Omega.$$

On peut obtenir l'expression à partir de  $U'_{AB}$  ou  $U''_{AB}$

$$E = U'_{AB} + rI'$$

**A.N.**

$$E = 1 \text{ V} + 5 \text{ } \Omega \times 800 \cdot 10^{-3} \text{ A}$$

$$E = 5 \text{ V.}$$

56. Déterminer la valeur de l'intensité du courant de court-circuit  $I_{cc}$ , courant pour lequel la tension imposée par le générateur  $U_{AB}$  est nulle.

Si  $U_{AB}$  est nulle alors

$$U_{AB} = E - rI_{cc} = 0$$

$$I_{cc} = \frac{E}{r}$$

**A.N.**

$$I_{cc} = \frac{5 \text{ V}}{5 \text{ } \Omega}$$

$$I_{cc} = 1 \text{ A.}$$

57. À partir des valeurs de  $E$  et  $r$  obtenues, donner l'expression de la tension  $U_{AB}$  en fonction de l'intensité du courant  $I$ . Représenter graphiquement  $U_{AB}(I)$ , soit la caractéristique du générateur de Thévenin.

D'après les valeurs obtenues

$$U_{AB}(I) = 5 - 5I.$$

On peut représenter graphiquement  $U_{AB}$  en fonction de  $I$ .

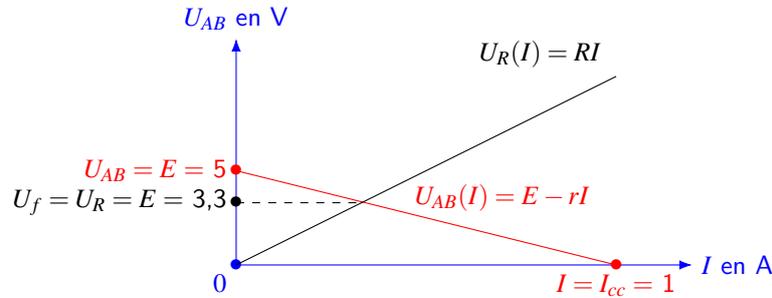


Figure 14: Caractéristiques du générateur de Thévenin  $U_{AB}(I)$  et d'un résistor branché en série  $U_R(I)$ .

58. Quelle doit être la valeur de la résistance  $R$  d'un résistor branché aux bornes du générateur pour qu'il fournisse une intensité  $I = 0,5$  A ?

Un résistor branché aux bornes du générateur a une tension  $U_R$  telle que

$$U_R = U_{AB}$$

soit

$$RI = E - rI$$

donc

$$R = \frac{E}{I} - r.$$

**A.N.**

$$R = \frac{5 \text{ V}}{0,5 \text{ A}} - 5 \Omega$$

$$R = 5 \Omega.$$

59. Le point de fonctionnement du circuit électrique composé du générateur et d'un résistor branché à ses bornes correspond à une tension  $U_f$  qui est obtenue lorsqu'on égalise l'expression de la tension du générateur  $U_{AB}$  et l'expression de la tension aux bornes du résistor  $U_R$ . Déterminer la valeur de  $U_f$  pour un résistor de résistance  $R = 10 \Omega$ .

Pour trouver la tension du point de fonctionnement  $U_f$  on égalise la tension aux bornes du résistor  $U_R$  et la tension imposée par le générateur de Thévenin  $U_{AB}$

$$U_f \equiv U_R = U_{AB}$$

soit

$$RI = E - rI.$$

Dans cette expression nous connaissons  $R$ ,  $E$  et  $r$ , et nous pouvons déterminer  $I$

$$I = \frac{E}{R+r}.$$

La tension aux bornes du résistor est alors

$$U_f \equiv U_R = RI$$

$$U_f = E \frac{R}{R+r}$$

on retrouve l'expression du diviseur de tension. **A.N.**

$$U_f = 5 \text{ V} \frac{10}{10+5}$$

$$U_f = 3,3 \text{ V.}$$

60. En traçant la caractéristique du résistor de résistance  $R = 10 \text{ } \Omega$  sur le même graphique que la caractéristique du générateur, déterminer graphiquement la valeur de tension  $U_f$  du point de fonctionnement.

Égaliser les tensions aux bornes du résistor et celle imposée par le générateur de Thévenin revient à étudier le point de croisement de leur caractéristiques  $U_R(I)$  et  $U_{AB}(I)$ .

Le graphique présenté Figure 14 nous permet de voir que ce point de croisement correspond à une tension  $U_f = 3,3 \text{ V}$ .