

Contrôle diagnostic B

Durée : 4 h

Indications

- Le sujet est divisé en 5 parties **indépendantes**.
- Une calculatrice **non programmable** ou une calculatrice **programmable en mode examen** est autorisée.
- Une absence d'unité non justifiée à la fin d'une application numérique **ne comptera aucun point**.
- Indiquer clairement le numéro de la question, aérer la copie et encadrer vos résultats afin de **faciliter le travail du correcteur**.

Données

- Surface d'une sphère de rayon R : $V = 4\pi R^2$.
- Rayon de la Terre : $R_T \approx 6000$ km.
- Développements limités à l'ordre 1 en zéro de fonctions trigonométriques :

$$\cos \alpha \approx 1 \quad ; \quad \sin \alpha \approx \alpha \quad ; \quad \tan \alpha \approx \alpha.$$

1 La troposphère vu comme une machine thermique

Adapté du concours X-ENS - MP (2021)

On se propose de modéliser le courant atmosphérique représenté sur la Figure 1 par une machine thermique cyclique.

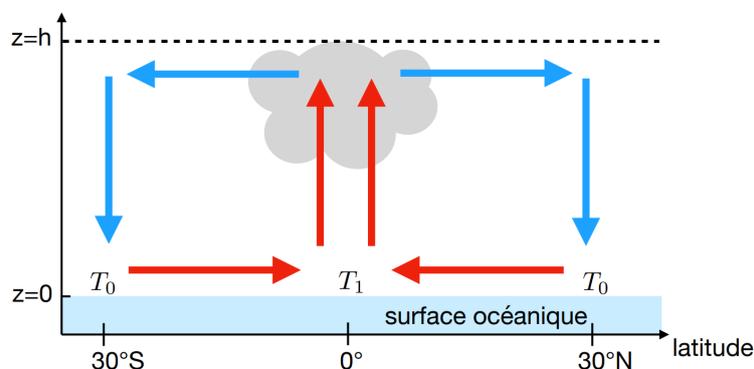


Figure 1: La circulation de Hadley correspond aux mouvements atmosphériques dominants dans un plan méridional (latitude - altitude). La température de surface au niveau de l'océan est supérieure au voisinage de l'équateur (T_1) qu'aux latitudes subtropicales ($T_0 < T_1$). Les flèches illustrent la direction dominante du vent.

La thermodynamique nous permet alors de déterminer une borne supérieure sur la fraction du transfert thermique incident qui est transformée en travail mécanique sous la forme de vents. Dans ce but, on revient dans un premier temps sur le fonctionnement et le rendement des moteurs dithermes cycliques. Pour les applications numériques demandées dans les deux dernières questions de cette partie, on considérera la Terre comme une sphère dont le rayon vaut approximativement 6400 km.

1. On considère tout d'abord un moteur ditherme cyclique en interaction avec un thermostat chaud de température T_c et un thermostat froid de température T_f . Définissez le rendement ξ de ce moteur. Établissez la valeur théorique maximale ξ_c de ce rendement (le rendement de Carnot), atteinte si les transformations associées au cycle sont réversibles.

Une machine thermique entièrement réversible n'est pas un bon modèle d'une machine réelle : les processus mis en jeu doivent être infiniment lents, en particulier les transferts thermiques. Si le travail fourni par la machine est non nul, ce travail est fourni en un temps infini ! Autrement dit, la puissance engendrée (travail fourni par unité de temps) tend vers zéro dans la limite de transformations parfaitement réversibles. Pour résoudre ce problème on considère la situation représentée sur la Figure 2.

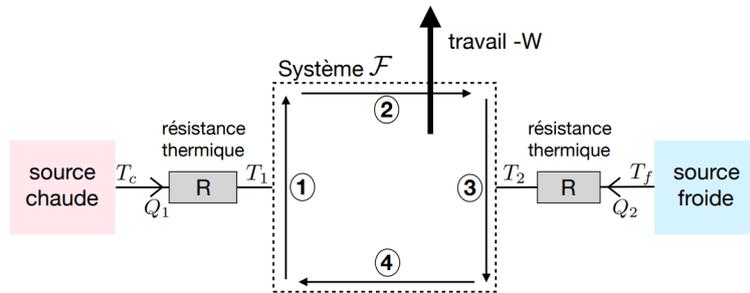


Figure 2: Une machine cyclique est connectée aux sources chaude et froide par le biais de résistances thermiques. Le système \mathcal{F} subit alors de façon cyclique les 4 étapes décrites dans le texte, représentées schématiquement par les chiffres entourés.

La machine comprend un fluide, le système \mathcal{F} à l'intérieur du cadre pointillé, qui subit de façon cyclique 4 transformations :

- (a) Une étape isotherme, à température T_1 , pendant laquelle le fluide reçoit un transfert thermique algébrique Q_1 depuis le thermostat chaud, à température T_c . Le thermostat est connecté au système par une résistance thermique R . Cette étape est supposée durer un temps τ . On notera que la température au voisinage immédiat du système \mathcal{F} (au bord du domaine pointillé) est bien T_1 : c'est la température effective de la source chaude pour le système \mathcal{F} .
- (b) Une détente adiabatique rapide du fluide. Si nécessaire, une telle détente peut être effectuée rapidement tout en restant réversible (il suffit que le temps soit long devant le temps de propagation des ondes sonores dans le fluide). Sa durée est donc négligeable par rapport au temps τ .
- (c) Une étape isotherme, à température T_2 , pendant laquelle le fluide reçoit un transfert thermique algébrique Q_2 , à travers une résistance thermique R , depuis un thermostat froid à température T_f . Cette étape dure un temps τ égal à celui de l'étape 1. On notera encore une fois que la température au voisinage immédiat du système \mathcal{F} est T_2 : c'est la température effective de la source froide pour le système \mathcal{F} .
- (d) Une compression adiabatique rapide du fluide (qui peut néanmoins être réversible, si nécessaire), dont la durée est négligeable par rapport au temps τ .

On note W le travail algébrique reçu par le système pendant un cycle. Les températures des thermostats T_c et T_f sont fixées, mais on suppose que l'on peut ajuster les températures de fonctionnement T_1 et T_2 du moteur pour obtenir un fonctionnement optimal.

2. Donnez les signes de Q_1 , Q_2 et W dans ce qui vous semble être le régime de fonctionnement normal du moteur. Ordonnez les températures T_c , T_f , T_1 et T_2 dans ce régime de fonctionnement, en justifiant très brièvement. On supposera cet ordre des températures respecté dans la suite.
3. On définit la résistance thermique R d'un matériel comme la différence de températures $\Delta T > 0$ entre les deux extrémités de ce matériau multiplié par une durée τ , divisée par la quantité de chaleur Q circulant dans ce matériau durant la durée τ , soit

$$R = \frac{\Delta T \tau}{Q}.$$

En vous aidant de la Figure 2, exprimez les transferts thermiques algébriques Q_1 et Q_2 reçus par le système \mathcal{F} pendant les étapes (a) et (c), en fonction de R , T_1 , T_2 , T_c , T_f et τ .

4. Définissez la puissance motrice du moteur $\mathcal{P} > 0$ (en W ou $\text{J} \cdot \text{s}^{-1}$) en fonction du travail mécanique $W < 0$ fourni par le moteur et la durée totale du cycle 2τ . Exprimez \mathcal{P} en fonction de R , T_1 , T_2 , T_f et T_c .
5. À l'aide du second principe de la thermodynamique, établir une inégalité entre T_1 , T_2 , T_f et T_c . Pour simplifier les calculs, on admet que le rendement maximal est obtenu lorsque les transformations sont réversibles pour le système \mathcal{F} . On remplacera alors cette inégalité par une égalité dans ce qui suit.
6. À l'aide des réponses aux deux questions précédentes, éliminez T_2 pour exprimer la puissance \mathcal{P} sous la forme :

$$P = \frac{T_c}{2R} \times f(X, \eta)$$

avec $X = T_1/T_c$ et $\eta = T_f/T_c$

7. À l'aide des réponses aux deux questions 2 et 5, notamment la question 2, montrez que $X > 1/2$.
8. En pratique, les moteurs réels fonctionnent dans un régime où T_1 (et donc T_2) est choisie pour maximiser la puissance motrice délivrée, à T_c et T_f fixées. Calculez la valeur X_+ de X associée à ce maximum, en fonction de η . Donnez la valeur du maximum de puissance en fonction de R , T_c et η .
9. Donnez l'expression du rendement ξ du moteur en fonction de X et η en tenant compte du fait que le transfert thermique entre le système \mathcal{F} et la source chaude est le transfert Q_1 . Montrez que le rendement du moteur à puissance maximale vaut $\xi(X_+) = 1 - \sqrt{\eta}$. Comment cette expression du rendement se compare-t-elle au rendement de Carnot ?
10. La différence de valeur entre ces deux rendements signifie que certains processus apparaissant sur la Figure 2 sont irréversibles. Quels sont-ils ?
11. On définit le taux de création d'entropie \dot{S} comme le rapport de l'entropie créée par ces processus irréversibles pendant un cycle divisée par la durée d'un cycle. En appliquant le second principe de la thermodynamique au système \mathcal{F} et aux parois, soit un système global au contact aux deux thermostats de températures T_c et T_f et plus T_1 et T_2 , calculez \dot{S} en fonction de R et η dans le régime de fonctionnement à puissance maximale du moteur (on utilisera l'expression de T_2 utilisée questions 5 et 6 car elle implique des transformations réversibles pour \mathcal{F} uniquement).

On souhaite appliquer le modèle précédent aux courants atmosphériques. Le système est la totalité de la troposphère, que l'on considère comme une couche de fluide de hauteur $h = 10\text{km}$ à la surface de la Terre, et de densité $\rho = 1\text{kg} \cdot \text{m}^{-3}$ considérée constante pour ces calculs d'ordre de grandeur. Le transfert thermique Q_1 reçu par la troposphère est dû au rayonnement solaire incident qui atteint la surface terrestre. Ce rayonnement a une intensité $I = 220\text{W} \cdot \text{m}^{-2}$ en moyenne sur une journée et sur toute la surface de la Terre. Q_2 correspond alors au transfert thermique sous forme de rayonnement infrarouge émis au niveau du sommet de la troposphère (on néglige la stratosphère), tandis que $|W|$ est l'énergie qui est transformée en travail moteur sous la forme de vents, ou courants atmosphériques. La température moyenne au niveau du sol est $T_f = 220\text{K}$, tandis que la température moyenne au sommet de la troposphère est $T_c = 290\text{K}$.

12. En supposant que le système fonctionne à puissance maximale, calculez approximativement l'énergie cédée aux vents et courants atmosphériques par unité de temps.
13. On admet que les courants atmosphériques ainsi engendrés dissipent leur énergie cinétique à un taux D (énergie dissipée par unité de temps), de l'ordre de $\mathcal{D} \approx 0,05 \times \mathcal{M}v^3/h$, où \mathcal{M} est la masse totale de la troposphère et v la vitesse typique des courants atmosphériques. En déduire un ordre de grandeur de v . Commentez.

2 L'accordeur de guitare

Adapté du concours CCS TSI (2019)

Nous allons étudier quelques aspects d'un accordeur de guitare. La problématique est la suivante.

- La guitare comporte six cordes : Mi grave, La, Ré, Sol, Si, Mi aigu.
- Les fréquences fondamentales théoriques de vibration de ces cordes, notées f_{ac} sont données dans le Tableau 1.

Corde	Fréquences f_{ac} (Hz)
Mi grave	82,4
La	110,0
Ré	146,8
Sol	196
Si	246,9
Mi aiguë	329,6

Tableau 1: Fréquences fondamentales de vibration des cordes de guitare

On souhaite accorder une corde légèrement désaccordée : on notera f_{co} la fréquence fondamentale de vibration de la corde en question.

Principe de l'accordeur

- Sélection de la corde à accorder (donc f_{ac} est fixée).
- Création d'un signal carré de référence de fréquence f_{ac} avec un oscillateur de type astable.
- Enregistrement du signal $u_e(t)$ provenant de l'excitation de la corde à accorder : signal quelconque, d'amplitude assez faible, de fréquence f_{co} .
- Amplification et filtrage de ce signal.
- Extraction de la fondamentale du signal : obtention d'un signal sinusoïdal de fréquence f_{co} par l'utilisation d'un filtre à fréquence caractéristique réglable par le signal extérieur de référence.
- Mise en forme de ce signal : obtention d'un signal carré de fréquence f_{co} .
- On a donc à disposition deux signaux carrés (signaux logiques) de fréquences respectives f_{ac} et f_{co} . Dans les accordeurs récents le traitement est numérique : les signaux sont envoyés dans un calculateur numérique intégré qui calcule l'écart de fréquence et indique à l'utilisateur quand la corde est accordée, c'est-à-dire quand $f_{co} = f_{ac}$.

Ce principe général est schématisé sur la Figure 3.

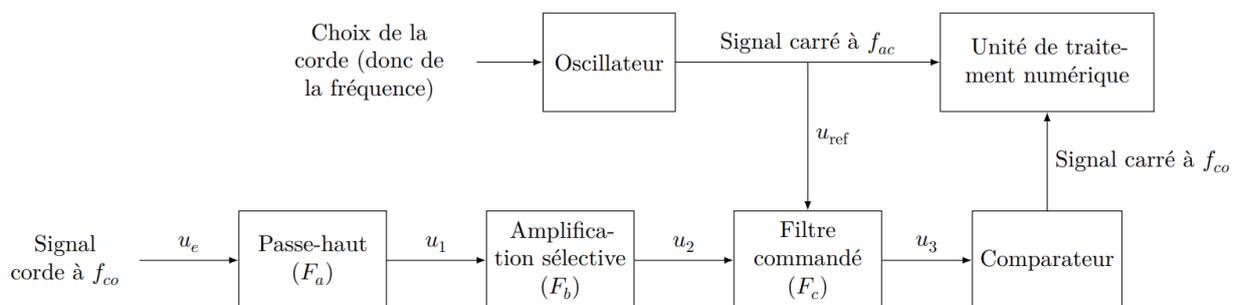


Figure 3: Principe de fonctionnement de l'accordeur de guitare

Ce problème s'intéresse au traitement du signal venant de la corde

2.1 Le signal

La Figure 4 montre un exemple de signal électrique à la sortie du micro d'une guitare électrique.

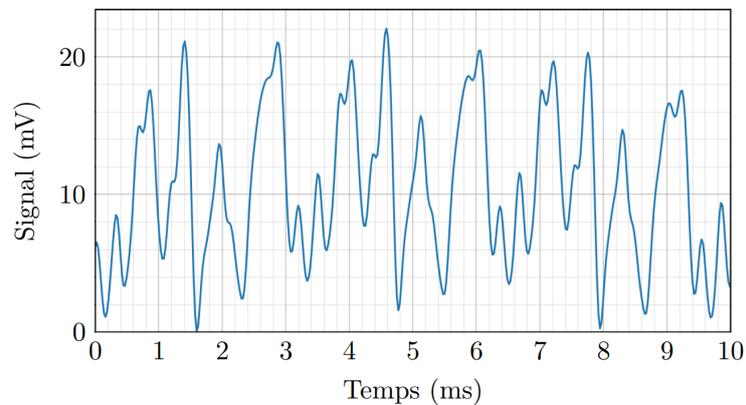


Figure 4: Signal de la guitare

14. Donner une valeur approchée de la valeur moyenne de ce signal.
15. Donner une estimation de la valeur de la fréquence de ce signal (on peut supposer qu'en première approximation le signal est périodique).
16. De quelle corde de guitare s'agit-il ?
17. L'analyse spectrale de ce signal fera-t-elle apparaître des harmoniques ? Justifier.

2.2 Premier filtre

Avant toute chose, le signal électrique provenant du micro de la guitare est envoyé sur le filtre de la Figure 5 (filtre (F_a)).

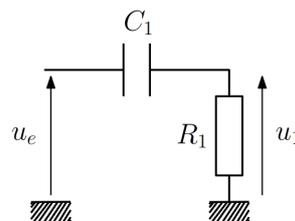


Figure 5: Filtre (F_a)

18. En supposant l'entrée sinusoïdale, définir et exprimer la fonction de transfert $\underline{H}_1(j\omega)$ de ce filtre en fonction de R_1 , C_1 et de la pulsation ω du signal.
19. De quel type de filtre s'agit-il ? Faire apparaître une pulsation caractéristique ω_1 en fonction de R_1 et C_1 et préciser sa signification.
20. Tracer sans calcul l'allure du diagramme de Bode asymptotique relatif au gain.
21. On a choisi $R_1 = 100\text{k}\Omega$ et $C_1 = 100\text{nF}$. Calculer la fréquence de coupure f_1 à -3 dB de ce filtre. Au vu de l'allure du signal de la Figure 4, quel est le rôle de ce premier filtre ?

2.3 Filtrage (très) sélectif commandé

On souhaite maintenant sélectionner la fréquence fondamentale f_{co} du signal u_2 , dont la valeur est à priori voisine de celle de la fréquence fondamentale théorique de vibration de la corde sélectionnée sur l'accordeur (f_{ac}) (on suppose que la corde est légèrement désaccordée). On suppose pour la suite que c'est la corde Mi aiguë que l'on souhaite accorder.

Le principe du filtre (F_c) est que sa fréquence caractéristique soit réglée par le signal de référence de fréquence f_{ac} .

2.3.1 Diagramme de Bode

La Figure 6 représente le diagramme de Bode relatif au gain du filtre (F_c) tracé à deux échelles différentes.

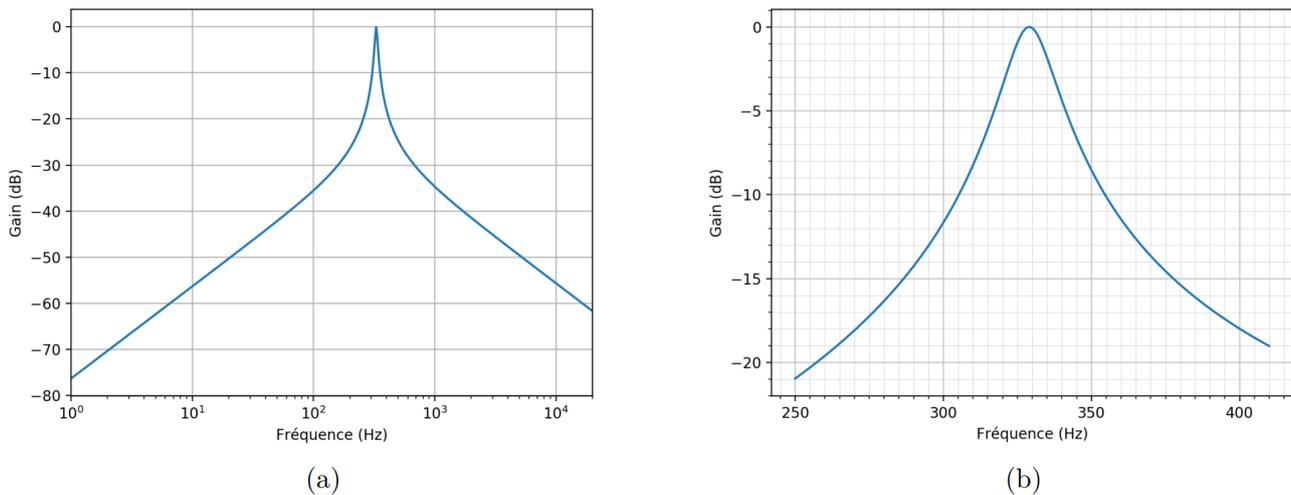


Figure 6: Diagramme de Bode en gain du filtre (F_c)

22. Dire en le justifiant rapidement, de quel type de filtre il s'agit. Quelle est sa fréquence centrale caractéristique ?
23. Donner une estimation de sa bande-passante à -3 dB après l'avoir définie.
24. Si la corde est désaccordée à $f_{co} = 315 \text{ Hz}$, estimer, en le justifiant, de quel facteur est atténuée sa composante spectrale fondamentale en sortie de ce filtre.

2.3.2 Analyse spectrale

La Figure 7 correspond au spectre du signal d'entrée u_e représenté sur la Figure 4.

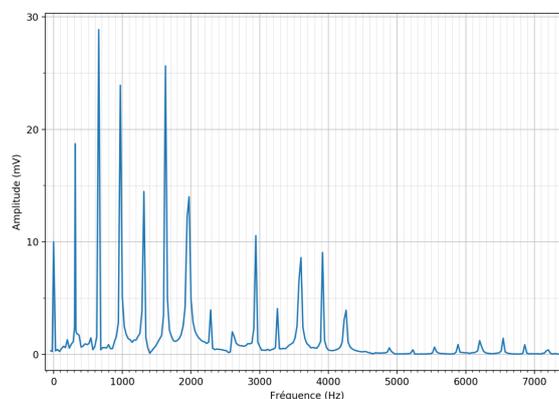


Figure 7: Spectre du signal d'entrée u_e

25. Justifier qu'il est parfaitement cohérent qu'il s'agisse du spectre du signal de la Figure 4.
26. En le justifiant soigneusement, dire quel spectre de la Figure 8 correspond à la sortie du premier filtre (F_a).
27. Tracer l'allure du spectre du signal en sortie du filtre (F_c). Tracer l'allure du signal (temporel) correspondant.

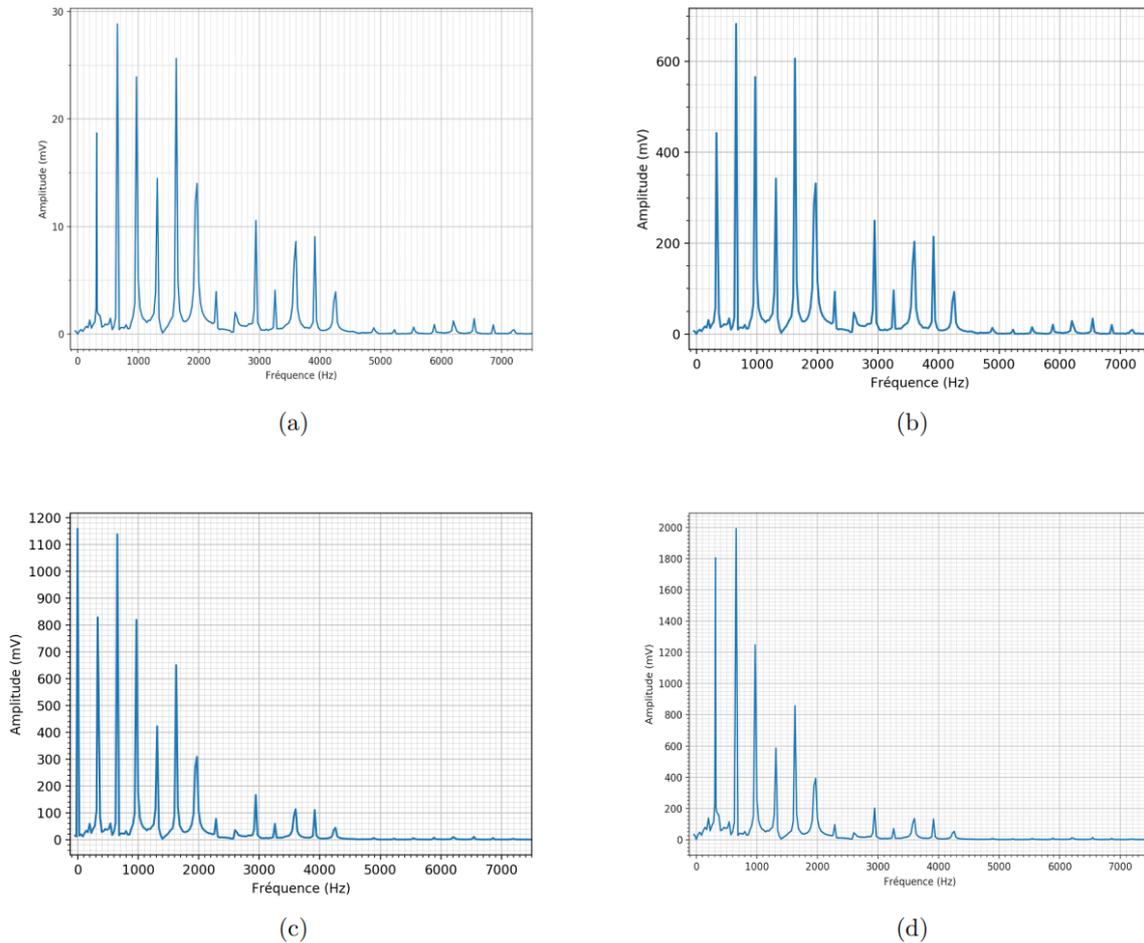


Figure 8: Spectres

3 Etude d'un filtre

Adapté de banque PT (2021)

Sur la Figure 9 on donne le schéma d'un filtre. On note $H_F(\omega)$ sa fonction de transfert.

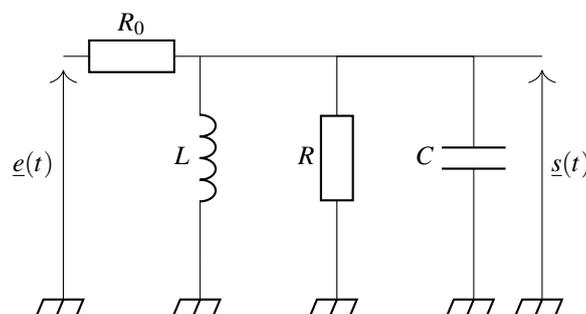


Figure 9: Schéma électrique.

28. Déterminer l'expression de $\underline{H}_F(\omega)$ et la mettre sous la forme

$$\underline{H}_F(\omega) = \frac{H_0}{1 + jQ_F \left(x - \frac{1}{x}\right)}$$

avec $x = \frac{\omega}{\omega_0}$.

29. Expliciter littéralement Q_F , H_0 et f_0 .

30. Donner la relation reliant le facteur de qualité, la fréquence propre et la bande passante à -3 dB.

31. Faire l'application numérique pour $R_0 = 470\Omega$, $R = 120\Omega$, $L = 50\mu\text{H}$ et $C = 50\text{nF}$.

32. Faire une représentation graphique approchée du gain en décibel G_{dB} en fonction de $\log(x)$; préciser quelques valeurs sur ce graphe. Faire apparaître sur ce graphe la bande passante à -3 dB.

4 Microscope de Van Leeuwenhoek

Adapté du concours commun Mines-Ponts - Physique II - PC (2020)

Le premier microscope de Van Leeuwenhoek était rudimentaire et reposait sur l'utilisation d'une seule lentille boule utilisée comme objectif. Après polissage d'une goutte de silice fondue, Van Leeuwenhoek, obtint des lentilles boule de rayon $R = 0,60$ mm de centre C . L'indice optique de la silice sera noté n , les foyers objet et image de la lentille sont respectivement notés F et F' .

Sur la Figure 10 on a représenté la trajectoire d'un rayon lumineux initialement parallèle à l'axe optique (Cz) se propageant dans une lentille boule d'indice optique n placée dans l'air d'indice unitaire. Les rayons incidents et émergents se coupent dans un plan passant par C , perpendiculaire à l'axe (Cz). L'étude sera menée dans l'approximation de Gauss (c'est-à-dire qu'on approximera les fonctions trigonométriques par leur développement limité à l'ordre 1 en 0).

Les angles formés entre les rayons lumineux et les normales aux dioptries sont notés i_1 , au point I en entrée de la lentille et i_2 à l'extérieur de la lentille au point J , en sortie. De même, les angles intérieurs seront notés r_1 et r_2 . L'angle $\widehat{F' CJ}$ est noté β_r et l'angle de déviation $\widehat{CF' K}$ sera noté β .

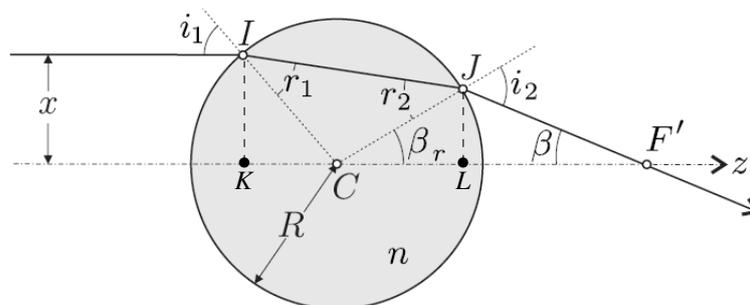


Figure 10: Lentille boule.

33. Déterminer la relation entre i_1 et i_2 .

34. Exprimer i_1 en fonction de x et R .

35. Exprimer β_r en fonction de i_1 et n , puis en fonction de x , R et n .

36. Exprimer β en fonction de i_1 et β_r puis de x , R et n .

37. En déduire la distance focale f'_L définie comme la distance CF' sur la Figure 10 en fonction de n et R .

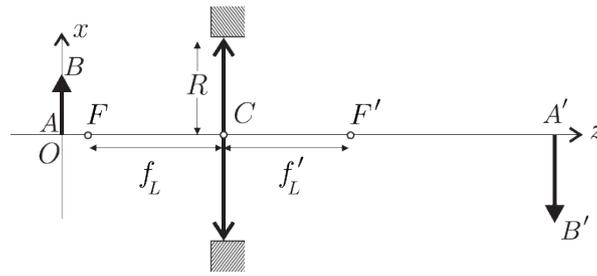


Figure 11: Lentille mince équivalente à la lentille boule.

38. Estimer enfin numériquement f'_L en prenant $n = 1,5$.

Dans toute la suite, (Ox) désigne la direction transverse à l'axe optique contenant l'objet étudié. On limite l'étude au plan (Ox, Oz) et on prendra $f'_L = 1,0$ mm. On utilise à présent un modèle de lentille mince équivalent à la lentille boule, possédant la même distance focale f'_L et le même rayon R . Celle-ci est représentée sur la Figure 11.

Une des normes actuelles est d'imposer une distance $l = 195$ mm sur l'axe optique entre un objet et son image à travers l'objectif.

39. Exprimer l en fonction de \overline{CA} et $\overline{CA'}$.

40. Montrer que \overline{CA} peut-être mis sous la forme d'une équation du second degré telle que

$$\overline{CA}^2 + l\overline{CA} + lf'_L = 0.$$

41. Afin que le grandissement transversal γ du microscope de Van Leeuwenhoek soit supérieur à 1 en valeur absolue, montrer que

$$|\overline{CA}| < \frac{l}{2}.$$

42. À partir des deux derniers résultats, déterminer l'expression de \overline{CA} en fonction de l et f'_L .

43. Calculer la valeur numérique de \overline{CA} et $\overline{CA'}$. Par quelles grandeurs peut-on les approximer ? Exprimer γ en fonction de ces grandeurs et calculer sa valeur numérique.

5 Trajectoire d'un volant de badminton

Adapté du concours X-ENS-ESPCI - PC (2015)

Le badminton est un sport dans lequel les joueurs frappent un projectile, appelé volant, à l'aide d'une raquette. Le but de ce problème est de proposer une modélisation simplifiée de la trajectoire du volant sous l'effet conjuguée de la pesanteur et de la résistance de l'air, et de confronter le modèle aux résultats d'une expérience. On négligera la poussée d'Archimède dans tout le problème.

On néglige dans un premier temps la force de freinage exercée par l'air.

44. On lance depuis le sol le volant de masse m avec une vitesse initiale U_0 , dans une direction faisant un angle θ_0 avec le plan du sol, supposé horizontal. Quelle est la nature de la trajectoire ? Dessiner son allure. Déterminer la portée L_0 (distance horizontale à laquelle le volant retombe sur le sol) en fonction de U_0 de θ_0 , et de l'accélération de la pesanteur g .
45. Validez dimensionnellement l'expression de L_0 obtenue et vérifiez-la sur des cas limites simples que vous choisirez.
46. La vitesse initiale étant fixée, quel angle θ_0 permet d'envoyer le volant le plus loin possible ?

On tient maintenant compte du freinage de l'air, modélisé en assimilant le volant à une sphère solide en mouvement dans un fluide. On écrit la force de freinage sous la forme $\vec{F} = -\frac{1}{2}\rho S C_x U \vec{U}$ où \vec{U} est la vitesse du volant et U sa norme, ρ la masse volumique de l'air, S la surface de référence du volant, et C_x le coefficient de traînée constant.

47. Déterminer la dimension de C_x .

48. Écrire l'équation du mouvement du volant. Montrer qu'elle admet une solution particulière, correspondant à un mouvement rectiligne uniforme dont on exprimera la vitesse, notée U_∞ , en fonction des paramètres du problème.
49. Récrire l'équation du mouvement en faisant notamment apparaître le rapport \vec{U}/U_∞ .
50. À quelle condition sur U peut-on négliger la pesanteur ? On suppose dans toute la suite du problème que cette condition est initialement vérifiée.

On peut montrer que la trajectoire est rectiligne et orientée dans le sens de la vitesse initiale U_0 . Si on projette l'équation précédente sur la direction de la trajectoire il vient que

$$\frac{dU}{dt} = -g \frac{U^2}{U_\infty^2}.$$

51. Intégrer l'équation précédente pour obtenir U en fonction du temps (utiliser les deux différentielles de l'équation comme variables d'intégration de deux intégrales différentes).
52. En utilisant cette expression, déterminer et calculer le temps $t_{1/2}$ pour lequel la vitesse est égale à la moitié de la vitesse initiale. Repérer le point correspondant sur la chronophotographie de la Figure 12. Vérifier, par une mesure que l'on expliquera, que la vitesse en ce point est bien approximativement la moitié de la vitesse initiale.

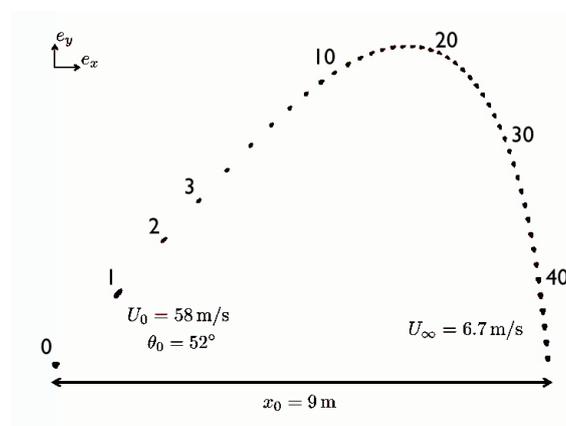


Figure 12: Positions successives d'un volant de badminton allant de la gauche vers la droite, enregistrées toutes les 50 ms. Le premier point, repéré par le chiffre 0, correspond au lancer à $t = 0$.

53. Toujours dans le cadre de l'approximation de la question 50 montrer que l'expression donnant la distance horizontale $x(t)$ parcourue au temps t est

$$x(t) = \cos \theta_0 \frac{U_\infty^2}{g} \ln \left(1 + \frac{gU_0 t}{U_\infty^2} \right).$$

54. Obtenir x en fonction de U .
55. On suppose que l'approximation de la question 50 cesse d'être valable lorsque la composante verticale de la force de freinage est égale au poids. Quelle est l'expression de U à cet instant ? En déduire la distance horizontale parcourue L .
On modélise la trajectoire du volant en distinguant trois régimes successifs : (1) le régime que l'on vient d'étudier, durant lequel l'accélération de la pesanteur est négligeable ; (2) un régime intermédiaire ; (3) un régime limite durant lequel l'accélération du volant est négligeable.
56. Localiser sur la chronophotographie le régime limite ainsi défini, en justifiant précisément votre réponse.
57. Une approximation de la trajectoire consiste à oublier la partie correspondant au régime intermédiaire. Dessiner la trajectoire obtenue dans cette approximation.
58. Donner l'expression littérale de la portée du tir dans cette approximation. Comment se compare-t-elle à la portée en l'absence de freinage, déterminée à la question 44 ?
59. Estimer numériquement la portée du tir. Comparer le résultat avec la valeur indiquée sur la chronophotographie.