

## Contrôle diagnostic B

Durée : 4 h

### Indications

- Le sujet est divisé en 5 parties **indépendantes**.
- Une calculatrice **non programmable** ou une calculatrice **programmable en mode examen** est autorisée.
- Une absence d'unité non justifiée à la fin d'une application numérique **ne comptera aucun point**.
- Indiquer clairement le numéro de la question, aérer la copie et encadrer vos résultats afin de **faciliter le travail du correcteur**.

### Données

- Surface d'une sphère de rayon  $R$  :  $V = 4\pi R^2$ .
- Rayon de la Terre :  $R_T \approx 6000$  km.
- Développements limités à l'ordre 1 en zéro de fonctions trigonométriques :

$$\cos \alpha \approx 1 \quad ; \quad \sin \alpha \approx \alpha \quad ; \quad \tan \alpha \approx \alpha.$$

## 1 La troposphère vu comme une machine thermique

*Adapté du concours X-ENS - MP (2021)*

On se propose de modéliser le courant atmosphérique représenté sur la Figure 1 par une machine thermique cyclique.

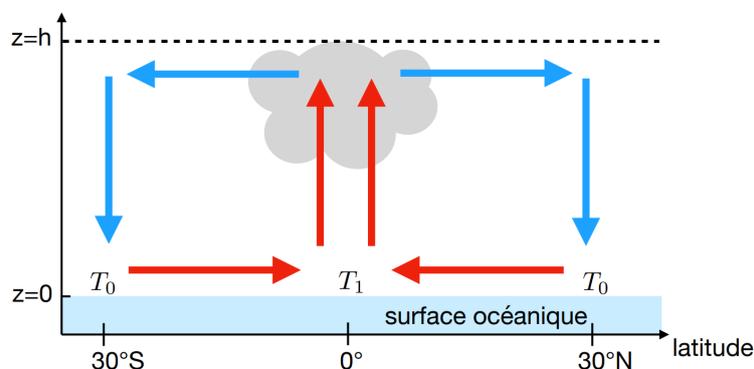


Figure 1: La circulation de Hadley correspond aux mouvements atmosphériques dominants dans un plan méridional (latitude - altitude). La température de surface au niveau de l'océan est supérieure au voisinage de l'équateur ( $T_1$ ) qu'aux latitudes subtropicales ( $T_0 < T_1$ ). Les flèches illustrent la direction dominante du vent.

La thermodynamique nous permet alors de déterminer une borne supérieure sur la fraction du transfert thermique incident qui est transformée en travail mécanique sous la forme de vents. Dans ce but, on revient dans un premier temps sur le fonctionnement et le rendement des moteurs dithermes cycliques. Pour les applications numériques demandées dans les deux dernières questions de cette partie, on considérera la Terre comme une sphère dont le rayon vaut approximativement 6400 km.

- On considère tout d'abord un moteur ditherme cyclique en interaction avec un thermostat chaud de température  $T_c$  et un thermostat froid de température  $T_f$ . Définissez le rendement  $\xi$  de ce moteur. Établissez la valeur théorique maximale  $\xi_c$  de ce rendement (le rendement de Carnot), atteinte si les transformations associées au cycle sont réversibles.

Le rendement d'un moteur est

$$\xi = -\frac{W}{Q_{ch}}$$

avec  $Q_f$  et  $Q_c$  les transferts thermiques entre le moteur et la source froide, et entre le système.

Le rendement de Carnot d'un moteur est

$$\xi_c = 1 - \frac{T_f}{T_c}$$

avec  $T_f$  et  $T_c$  les températures de contact entre les thermostats et le système  $\mathcal{F}$ . Ici les températures des thermostats en contact avec  $\mathcal{F}$  sont  $T_2$  et  $T_1$ , donc le rendement de Carnot pour le système  $\mathcal{F}$  est

$$\xi_c = 1 - \frac{T_1}{T_2}$$

Une machine thermique entièrement réversible n'est pas un bon modèle d'une machine réelle : les processus mis en jeu doivent être infiniment lents, en particulier les transferts thermiques. Si le travail fourni par la machine est non nul, ce travail est fourni en un temps infini ! Autrement dit, la puissance engendrée (travail fourni par unité de temps) tend vers zéro dans la limite de transformations parfaitement réversibles. Pour résoudre ce problème on considère la situation représentée sur la Figure 2.

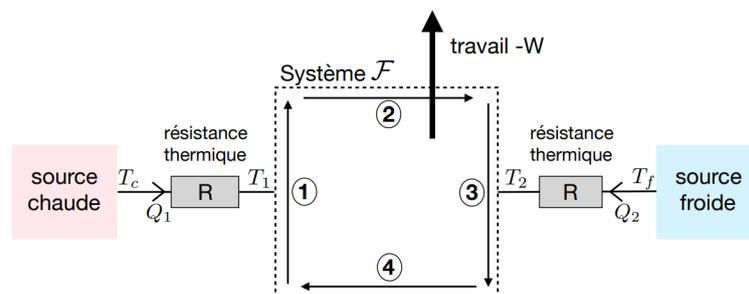


Figure 2: Une machine cyclique est connectée aux sources chaude et froide par le biais de résistances thermiques. Le système  $\mathcal{F}$  subit alors de façon cyclique les 4 étapes décrites dans le texte, représentées schématiquement par les chiffres entourés.

La machine comprend un fluide, le système  $\mathcal{F}$  à l'intérieur du cadre pointillé, qui subit de façon cyclique 4 transformations :

- Une étape isotherme, à température  $T_1$ , pendant laquelle le fluide reçoit un transfert thermique algébrique  $Q_1$  depuis le thermostat chaud, à température  $T_c$ . Le thermostat est connecté au système par une résistance thermique  $R$ . Cette étape est supposée durer un temps  $\tau$ . On notera que la température au voisinage immédiat du système  $\mathcal{F}$  (au bord du domaine pointillé) est bien  $T_1$  : c'est la température effective de la source chaude pour le système  $\mathcal{F}$ .

- (b) Une détente adiabatique rapide du fluide. Si nécessaire, une telle détente peut être effectuée rapidement tout en restant réversible (il suffit que le temps soit long devant le temps de propagation des ondes sonores dans le fluide). Sa durée est donc négligeable par rapport au temps  $\tau$ .
- (c) Une étape isotherme, à température  $T_2$ , pendant laquelle le fluide reçoit un transfert thermique algébrique  $Q_2$ , à travers une résistance thermique  $R$ , depuis un thermostat froid à température  $T_f$ . Cette étape dure un temps  $\tau$  égal à celui de l'étape 1. On notera encore une fois que la température au voisinage immédiat du système  $\mathcal{F}$  est  $T_2$  : c'est la température effective de la source froide pour le système  $\mathcal{F}$ .
- (d) Une compression adiabatique rapide du fluide (qui peut néanmoins être réversible, si nécessaire), dont la durée est négligeable par rapport au temps  $\tau$ .

On note  $W$  le travail algébrique reçu par le système pendant un cycle. Les températures des thermostats  $T_c$  et  $T_f$  sont fixées, mais on suppose que l'on peut ajuster les températures de fonctionnement  $T_1$  et  $T_2$  du moteur pour obtenir un fonctionnement optimal.

2. Donnez les signes de  $Q_1$ ,  $Q_2$  et  $W$  dans ce qui vous semble être le régime de fonctionnement normal du moteur. Ordonnez les températures  $T_c$ ,  $T_f$ ,  $T_1$  et  $T_2$  dans ce régime de fonctionnement, en justifiant très brièvement. On supposera cet ordre des températures respecté dans la suite.

Pour un moteur normal, le signe du transfert de chaleur de la source chaude est positif  $Q_1 > 0$  (c'est l'énergie payée par le moteur), le signe du transfert de chaleur de la source froide est négatif  $Q_2 < 0$  (c'est la chaleur relâchée par le moteur) et le travail mécanique  $W < 0$  car le moteur fournit un travail mécanique.

La température la plus haute est la température de la source chaude  $T_c$  et la température la plus froide est la température de la source froide  $T_f$ .

La température  $T_1$  est la température de la source chaude pour le système  $\mathcal{F}$ , comme il y a transfert thermique  $Q_1 > 0$ , la température  $T_c$  est plus importante que  $T_1$ .

La température  $T_2$  est la température de la source froide pour le système  $\mathcal{F}$ , comme il y a transfert thermique  $Q_2 < 0$ , la température  $T_f$  est moins importante que  $T_2$ .

Ainsi  $T_c > T_1 > T_2 > T_f$ .

3. On définit la résistance thermique  $R$  d'un matériel comme la différence de températures  $\Delta T > 0$  entre les deux extrémités de ce matériau multiplié par une durée  $\tau$ , divisée par la quantité de chaleur  $Q$  circulant dans ce matériau durant la durée  $\tau$ , soit

$$R = \frac{\Delta T \tau}{Q}.$$

En vous aidant de la Figure 2, exprimez les transferts thermiques algébriques  $Q_1$  et  $Q_2$  reçus par le système  $\mathcal{F}$  pendant les étapes (a) et (c), en fonction de  $R$ ,  $T_1$ ,  $T_2$ ,  $T_c$ ,  $T_f$  et  $\tau$ .

À l'étape (a) le transfert  $Q_1 > 0$  a lieu entre le thermostat de température  $T_c$  et la source chaude pour  $\mathcal{F}$  de température  $T_1$  au travers un matériel de résistance thermique  $R$  pendant une durée  $\tau$ , ainsi

$$R = \frac{(T_c - T_1) \tau}{Q_1}$$

donc

$$Q_1 = \frac{(T_c - T_1) \tau}{R}.$$

À l'étape (c) le transfert  $Q_2 < 0$  a lieu entre le thermostat de température  $T_f$  et la source froide pour  $\mathcal{F}$  de température  $T_2$  au travers un matériel de résistance thermique  $R$  pendant une durée  $\tau$ , ainsi

$$R = \frac{(T_f - T_2) \tau}{Q_2}$$

donc

$$Q_2 = \frac{(T_f - T_2) \tau}{R}.$$

4. Définissez la puissance motrice du moteur  $\mathcal{P} > 0$  (en W ou  $\text{J} \cdot \text{s}^{-1}$ ) en fonction du travail mécanique  $W < 0$  fourni par le moteur et la durée totale du cycle  $2\tau$ . Exprimez  $\mathcal{P}$  en fonction de  $R$ ,  $T_1$ ,  $T_2$ ,  $T_f$  et  $T_c$ .

La puissance motrice est le travail fourni par la formule

$$\mathcal{P} = -\frac{W}{2\tau}.$$

D'après le premier principe de la thermodynamique appliqué à un cycle du système  $\mathcal{F}$ , la variation de l'énergie interne de  $\mathcal{F}$  est

$$\Delta U = W + Q_1 + Q_2 = 0.$$

Ainsi

$$-W = Q_1 + Q_2$$

donc la puissance motrice est

$$\mathcal{P} = \frac{Q_1 + Q_2}{2\tau}$$

soit

$$\mathcal{P} = \frac{\tau}{2R\tau} ((T_c - T_1) + (T_f - T_2))$$

donc

$$\mathcal{P} = \frac{1}{2R} (T_c - T_1 + T_f - T_2).$$

5. À l'aide du second principe de la thermodynamique, établir une inégalité entre  $T_1$ ,  $T_2$ ,  $T_f$  et  $T_c$ . Pour simplifier les calculs, on admet que le rendement maximal est obtenu lorsque les transformations sont réversibles pour le système  $\mathcal{F}$ . On remplacera alors cette inégalité par une égalité dans ce qui suit.

D'après le deuxième principe de la thermodynamique appliquée à un cycle du système  $\mathcal{F}$ , la variation d'entropie de ce système est

$$\Delta S = S_r + S_c = 0$$

avec  $S_r$  l'entropie reçue du fait de contacts thermiques avec des thermostats. Ici le système  $\mathcal{F}$  est en contact thermiques avec les thermostats de températures  $T_1$  et  $T_2$  avec qui il échange les transferts thermiques  $Q_1$  et  $Q_2$ , donc

$$\Delta S = \frac{Q_1}{T_1} + \frac{Q_2}{T_2} + S_c$$

donc

$$S_c = -\frac{Q_1}{T_1} - \frac{Q_2}{T_2}$$

or comme l'entropie reçue est positive ou nulle, il vient que

$$-\frac{Q_1}{T_1} - \frac{Q_2}{T_2} \geq 0.$$

En remplaçant  $Q_1$  et  $Q_2$  par les expressions obtenues précédemment il vient que

$$-\frac{(T_c - T_1)\tau}{RT_1} - \frac{(T_f - T_2)\tau}{RT_2} \geq 0$$

soit

$$2 - \frac{T_c}{T_1} - \frac{T_f}{T_2} \geq 0$$

ou

$$\frac{T_c}{T_1} + \frac{T_f}{T_2} - 2 \leq 0.$$

Dans le cas de transformations réversibles cette inégalité devient l'égalité

$$\frac{T_c}{T_1} + \frac{T_f}{T_2} - 2 = 0.$$

6. À l'aide des réponses aux deux questions précédentes, éliminez  $T_2$  pour exprimer la puissance  $\mathcal{P}$  sous la forme :

$$P = \frac{T_c}{2R} \times f(X, \eta)$$

avec  $X = T_1/T_c$  et  $\eta = T_f/T_c$

Dans le cas de transformations réversibles, on peut utiliser l'égalité précédente pour exprimer  $T_2$  en fonction des autres températures, soit

$$\begin{aligned} \frac{T_f}{T_2} &= 2 - \frac{T_c}{T_1} \\ T_2 &= \frac{T_f}{2 - \frac{T_c}{T_1}}. \end{aligned}$$

Ainsi, d'après l'expression de la puissance motrice obtenue plus tôt, il vient que

$$\begin{aligned} \mathcal{P} &= \frac{1}{2R} \left( T_c - T_1 + T_f - \frac{T_f}{2 - \frac{T_c}{T_1}} \right) \\ \mathcal{P} &= \frac{T_c}{2R} \left( 1 - \frac{T_1}{T_c} + \frac{T_f}{T_c} - \frac{T_f/T_c}{2 - \frac{T_c}{T_1}} \right) \end{aligned}$$

soit

$$\mathcal{P} = \frac{T_c}{2R} \left( 1 - X + \eta - \frac{\eta}{2 - \frac{1}{X}} \right).$$

7. À l'aide des réponses aux deux questions 2 et 5, notamment la question 2, montrez que  $X > 1/2$ .

D'après l'égalité de la question 5, on sait que

$$\frac{T_c}{T_1} + \frac{T_f}{T_2} - 2 = 0$$

donc

$$\frac{1}{X} + \frac{T_f}{T_2} - 2 = 0$$

soit

$$X = \frac{1}{2 - \frac{T_f}{T_2}}.$$

Or d'après la question 2, on sait que

$$T_2 > T_f \quad \text{soit} \quad 0 < \frac{T_f}{T_2} < 1$$

donc

$$1 < 2 - \frac{T_f}{T_2} < 2 \quad \text{soit} \quad 1 > \frac{1}{2 - \frac{T_f}{T_2}} > \frac{1}{2}$$

ainsi

$$X > \frac{1}{2}.$$

8. En pratique, les moteurs réels fonctionnent dans un régime où  $T_1$  (et donc  $T_2$ ) est choisie pour maximiser la puissance motrice délivrée, à  $T_c$  et  $T_f$  fixées. Calculez la valeur  $X_+$  de  $X$  associée à ce maximum, en fonction de  $\eta$ . Donnez la valeur du maximum de puissance en fonction de  $R$ ,  $T_c$  et  $\eta$ .

Afin de trouver le maximum de  $\mathcal{P}$  on dérive cette grandeur en fonction de  $X$ , soit

$$\begin{aligned}\frac{d\mathcal{P}}{dX} &= \frac{T_c}{2R} \left( -1 - (-1) \frac{1}{X^2} \frac{\eta}{\left(2 - \frac{1}{X}\right)^2} \right) \\ &= \frac{T_c}{2R} \left( -1 + \frac{\eta}{(2X-1)^2} \right).\end{aligned}$$

L'extremum de  $\mathcal{P}$  est atteint pour  $\frac{d\mathcal{P}}{dX} = 0$ , soit pour

$$\frac{\eta}{(2X-1)^2} = 1 \quad \text{soit} \quad 2X-1 = \sqrt{\eta} \quad \text{soit} \quad X = \frac{1+\sqrt{\eta}}{2}.$$

Comme  $X$  est compris entre  $1/2$  et  $+\infty$ , on peut analyser la fonction  $\mathcal{P}$  entre  $1/2$  et  $+\infty$ .

La dérivée de  $\frac{d\mathcal{P}}{dX}$  tend vers  $+\infty$  lorsque  $X$  tend vers  $\frac{1}{2}$ , elle est donc positive entre  $X \rightarrow 1/2$  et la valeur de  $X$  pour l'extremum ; la dérivée de  $\frac{d\mathcal{P}}{dX}$  tend vers  $-T_c/R$  lorsque  $X$  tend vers  $+\infty$ , elle est donc négative entre la valeur de  $X$  pour l'extremum et  $X \rightarrow +\infty$ . Donc l'extremum est un maximum, ainsi

$$X_+ = \frac{1+\sqrt{\eta}}{2}.$$

Pour cette valeur de  $X_+$ , la puissance motrice maximale est

$$\begin{aligned}\mathcal{P}(X_+) &= \frac{T_c}{2R} \left( 1 - X_+ + \eta - \frac{\eta}{2 - \frac{1}{X_+}} \right) \\ &= \frac{T_c}{2R} \left( 1 - \frac{1+\sqrt{\eta}}{2} + \eta - \frac{\eta}{2 - \frac{2}{1+\sqrt{\eta}}} \right) \\ &= \frac{T_c}{2R} \left( \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{\eta}}{2} + \eta - \frac{\eta(1+\sqrt{\eta})}{2+2\sqrt{\eta}-2} \right) \\ &= \frac{T_c}{2R} \left( \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{\eta}}{2} + \eta - \frac{\sqrt{\eta}}{2} - \frac{\eta}{2} \right) \\ &= \frac{T_c}{4R} (1 - 2\sqrt{\eta} + \eta)\end{aligned}$$

soit

$$\mathcal{P}(X_+) = \frac{T_c}{4R} (1 - \sqrt{\eta})^2.$$

9. Donnez l'expression du rendement  $\xi$  du moteur en fonction de  $X$  et  $\eta$  en tenant compte du fait que le transfert thermique entre le système  $\mathcal{F}$  et la source chaude est le transfert  $Q_1$ . Montrez que le rendement du moteur à puissance maximale vaut  $\xi(X_+) = 1 - \sqrt{\eta}$ . Comment cette expression du rendement se compare-t-elle au rendement de Carnot ?

D'après la première question le rendement du moteur est

$$\xi = -\frac{W}{Q_{ch}}.$$

Dans le cas du système  $\mathcal{F}$  le transfert thermique avec la source chaude est  $Q_1$  donc le rendement est

$$\xi = -\frac{W}{Q_1}.$$

On exprime  $W$  et  $Q_1$  en fonction des expressions obtenues plus tôt, soit

$$\mathcal{P} = -\frac{W}{2\tau} \quad \text{et} \quad Q_1 = \frac{(T_c - T_1)\tau}{R}$$

il vient que

$$\xi = \frac{2R\mathcal{P}\tau}{(T_c - T_1)\tau}$$

Or on a montré que

$$\mathcal{P} = \frac{T_c}{2R} \left( 1 - X + \eta - \frac{\eta}{2 - \frac{1}{X}} \right)$$

donc

$$\begin{aligned} \xi &= \frac{2RT_c}{2R(T_c - T_1)} \left( 1 - X + \eta - \frac{\eta}{2 - \frac{1}{X}} \right) \\ &= \frac{1}{1 - \frac{T_1}{T_c}} \left( 1 - X + \eta - \frac{\eta}{2 - \frac{1}{X}} \right) \end{aligned}$$

soit

$$\xi = \frac{1}{1 - X} \left( 1 - X + \eta - \frac{\eta}{2 - \frac{1}{X}} \right).$$

Le rendement du moteur à puissance maximale est donc

$$\begin{aligned} \xi(X_+) &= \frac{1}{1 - X_+} \left( 1 - X_+ + \eta - \frac{\eta}{2 - \frac{1}{X_+}} \right) \\ &= \frac{1}{1 - \frac{1 + \sqrt{\eta}}{2}} \left( 1 - \frac{1 + \sqrt{\eta}}{2} + \eta - \frac{\eta}{2 - \frac{2}{1 + \sqrt{\eta}}} \right) \\ &= \frac{2}{2 - 1 - \sqrt{\eta}} \left( \frac{2 - 1 - \sqrt{\eta}}{2} + \eta - \frac{\eta(1 + \sqrt{\eta})}{2 + 2\sqrt{\eta} - 2} \right) \\ &= \frac{1}{1 - \sqrt{\eta}} (1 - \sqrt{\eta} + 2\eta - \sqrt{\eta} - \eta) \\ &= \frac{1}{1 - \sqrt{\eta}} (1 - 2\sqrt{\eta} + \eta) \\ &= \frac{1}{1 - \sqrt{\eta}} (1 - \sqrt{\eta})^2 \end{aligned}$$

il vient donc

$$\xi(X_+) = 1 - \sqrt{\eta}.$$

Nous avons vu que le rendement de Carnot était

$$\xi_c = 1 - \frac{T_f}{T_c}$$

soit

$$\xi_c = 1 - \eta.$$

Ainsi comme  $T_f/T_c < 1$ , il vient que

$$\sqrt{\frac{T_f}{T_c}} < 1 \quad \text{donc} \quad \frac{T_f}{T_c} < \sqrt{\frac{T_f}{T_c}}$$

ainsi

$$\eta < \sqrt{\eta} \quad \text{donc} \quad 1 - \eta > 1 - \sqrt{\eta}.$$

On en conclut que le rendement maximal du moteur est inférieur au rendement de Carnot

$$\xi(X_+) < \xi_c.$$

10. La différence de valeur entre ces deux rendements signifie que certains processus apparaissant sur la Figure 2 sont irréversibles. Quels sont-ils ?

Les processus irréversibles sont les processus de transferts thermiques (a) et (c).

11. On définit le taux de création d'entropie  $\dot{S}$  comme le rapport de l'entropie créée par ces processus irréversibles pendant un cycle divisée par la durée d'un cycle. En appliquant le second principe de la thermodynamique au système  $\mathcal{F}$  et aux parois, soit un système global au contact aux deux thermostats de températures  $T_c$  et  $T_f$  et plus  $T_1$  et  $T_2$ , calculez  $\dot{S}$  en fonction de  $R$  et  $\eta$  dans le régime de fonctionnement à puissance maximale du moteur (on utilisera l'expression de  $T_2$  utilisée questions 5 et 6 car elle implique des transformations réversibles pour  $\mathcal{F}$  uniquement).

On applique le second principe sur le système global, il vient que

$$\Delta S = S_r + S_c.$$

Ayant affaire à un cycle  $\Delta S = 0$ , il vient que

$$0 = \frac{Q_1}{T_c} + \frac{Q_2}{T_f} + S_c$$

soit

$$S_c = -\frac{Q_1}{T_c} - \frac{Q_2}{T_f}.$$

Ainsi le taux de création d'entropie calculé sur la durée d'un cycle de  $2\tau$  est

$$\dot{S} = \frac{S_c}{2\tau} = -\frac{1}{2\tau} \left( \frac{Q_1}{T_c} + \frac{Q_2}{T_f} \right).$$

En utilisant les expressions de  $Q_1$  et  $Q_2$  obtenues plus tôt, il vient que

$$\begin{aligned} \dot{S} &= -\frac{1}{2\tau} \left( \frac{1}{T_c} \frac{(T_c - T_1)\tau}{R} + \frac{1}{T_f} \frac{(T_f - T_2)\tau}{R} \right) \\ &= -\frac{1}{2R} \left( 1 - \frac{T_1}{T_c} + 1 - \frac{T_2}{T_f} \right) \\ &= -\frac{1}{2R} \left( 2 - X - \frac{T_2}{f} \right). \end{aligned}$$

Si on utilise l'expression de  $T_2$  obtenue plus tôt, soit

$$T_2 = \frac{T_f}{2 - \frac{T_c}{T_f}} = \frac{T_f}{2 - \frac{1}{X}}$$

il vient que

$$\dot{S} = -\frac{1}{2R} \left( 2 - X - \frac{1}{2 - \frac{1}{X}} \right).$$

On calcule alors le taux de création d'entropie dans le régime de fonctionnement à puissance maximale du moteur, soit pour  $X_+$ , ainsi

$$\begin{aligned}
 \dot{S}(X_+) &= -\frac{1}{2R} \left( 2 - X_+ - \frac{1}{2 - \frac{1}{X_+}} \right) \\
 &= -\frac{1}{2R} \left( 2 - \frac{1 + \sqrt{\eta}}{2} - \frac{1}{2 - \frac{2}{1 + \sqrt{\eta}}} \right) \\
 &= -\frac{1}{2R} \left( 2 - \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \sqrt{\eta} - \frac{1 + \sqrt{\eta}}{2 + 2\sqrt{\eta} - 2} \right) \\
 &= -\frac{1}{2R} \left( \frac{3}{2} - \frac{1}{2} \sqrt{\eta} - \frac{1}{2\sqrt{\eta}} - \frac{1}{2} \right) \\
 &= -\frac{1}{4R} \left( 2 - \sqrt{\eta} - \frac{1}{\sqrt{\eta}} \right) \\
 &= \frac{1}{4R\sqrt{\eta}} (1 - 2\sqrt{\eta} + \eta)
 \end{aligned}$$

il vient donc que

$$\dot{S}(X_+) = \frac{(1 - \sqrt{\eta})^2}{4R\sqrt{\eta}}.$$

On souhaite appliquer le modèle précédent aux courants atmosphériques. Le système est la totalité de la troposphère, que l'on considère comme une couche de fluide de hauteur  $h = 10\text{km}$  à la surface de la Terre, et de densité  $\rho = 1\text{kg}\cdot\text{m}^{-3}$  considérée constante pour ces calculs d'ordre de grandeur. Le transfert thermique  $Q_1$  reçu par la troposphère est dû au rayonnement solaire incident qui atteint la surface terrestre. Ce rayonnement a une intensité  $I = 220\text{W}\cdot\text{m}^{-2}$  en moyenne sur une journée et sur toute la surface de la Terre.  $Q_2$  correspond alors au transfert thermique sous forme de rayonnement infrarouge émis au niveau du sommet de la troposphère (on néglige la stratosphère), tandis que  $|W|$  est l'énergie qui est transformée en travail moteur sous la forme de vents, ou courants atmosphériques. La température moyenne au niveau du sol est  $T_f = 220\text{K}$ , tandis que la température moyenne au sommet de la troposphère est  $T_c = 290\text{K}$ .

12. En supposant que le système fonctionne à puissance maximale, calculez approximativement l'énergie cédée aux vents et courants atmosphériques par unité de temps.

L'énergie cédée aux vents et courants atmosphériques par unité de temps correspond à la valeur absolue du travail  $|W|$  divisé par la durée d'un cycle, soit  $2\tau$ , ce qui correspond en réalité à la puissance motrice  $\mathcal{P}$ , soit

$$\mathcal{P} = \frac{|W|}{2\tau}.$$

Or la puissance maximale est définie telle que

$$\mathcal{P}(X_+) = \frac{T_c}{4R} (1 - \sqrt{\eta})^2$$

soit

$$\mathcal{P}(X_+) = \frac{T_c}{4R} \left( 1 - \sqrt{\frac{T_f}{T_c}} \right)^2.$$

Afin d'exprimer la résistance thermique de l'atmosphère on utilise l'expression de la résistance thermique donnée plus haut

$$R = \frac{\Delta T \tau}{Q}.$$

On considère ici que la différence de température est en ordre de grandeur  $\Delta T = T_c - T_f$  et  $Q_1$  est le transfert thermique reçu par la troposphère dû au rayonnement solaire. On peut l'obtenir à partir de l'intensité  $I$  du

rayonnement, la surface  $S$  incidente, soit la moitié de la surface de la Terre au Soleil, et la durée du rayonnement de une journée qu'on considère être la durée du cycle  $2\tau$ , ainsi

$$Q_1 = S \times I \times \tau = \frac{1}{2} 4\pi R_T^2 I \tau.$$

Il vient que la résistance thermique est

$$R = \frac{(T_c - T_f) \tau}{2\pi R_T^2 I \tau}.$$

Ainsi la puissance maximale est telle que

$$\mathcal{P}(X_+) = \frac{\pi T_c R_T^2 I}{2(T_c - T_f)} \left(1 - \sqrt{\frac{T_f}{T_c}}\right)^2.$$

Ici on a considéré l'intensité du Soleil pendant une journée, ainsi la durée d'un cycle étudié  $2\tau$  est de un jour. On peut alors faire l'application numérique.

**A.N.**

$$\mathcal{P}(X_+) = \frac{\pi \times 290 \text{ K} \times (6 \times 10^6 \text{ m})^2 \times 220 \text{ W} \cdot \text{m}^{-2}}{2(290 \text{ K} - 220 \text{ K})} \left(1 - \sqrt{\frac{220 \text{ K}}{290 \text{ K}}}\right)^2 = 1 \times 10^{15} \text{ W}.$$

13. On admet que les courants atmosphériques ainsi engendrés dissipent leur énergie cinétique à un taux  $D$  (énergie dissipée par unité de temps), de l'ordre de  $\mathcal{D} \approx 0,05 \times \mathcal{M} v^3 / h$ , où  $\mathcal{M}$  est la masse totale de la troposphère et  $v$  la vitesse typique des courants atmosphériques. En déduire un ordre de grandeur de  $v$ . Commentez.

Afin, d'obtenir la vitesse typique des courants, il faut isoler  $v$  dans l'expression donnée

$$\mathcal{D} \approx 0,05 \times \frac{\mathcal{M} v^3}{h}$$

soit

$$v \approx \left(\frac{h \mathcal{D}}{0,05 \mathcal{M}}\right)^{1/3}.$$

Le taux  $\mathcal{D}$  correspond en fait à l'énergie cédée aux vents et courant atmosphériques par unité de temps calculé plus tôt soit  $\mathcal{D} \equiv \mathcal{P}(X_+)$ .

Pour obtenir la masse de la troposphère  $\mathcal{M}$  on utilise la densité fournie (plutôt masse volumique)

$$\mathcal{M} = \rho V$$

avec  $V$  le volume de la troposphère qui est la différence entre le volume d'une sphère de rayon égal au rayon de la Terre plus la hauteur de la troposphère moins et le volume d'une sphère de rayon égal au rayon de la Terre, soit

$$V = \frac{4}{3} \pi ((R_T + h)^3 - R_T^3)$$

ainsi l'expression de la vitesse  $v$  devient

$$\begin{aligned} v &\approx \left(h \frac{\mathcal{P}(X_+)}{0,05 \rho V}\right)^{1/3} \\ &\approx \left(\frac{h \mathcal{P}(X_+)}{0,05 \times \frac{4}{3} \pi \rho ((R_T + h)^3 - R_T^3)}\right)^{1/3}. \end{aligned}$$

**A.N.**

$$v \approx \left(\frac{10 \times 10^3 \text{ m} \times 1 \times 10^{15} \text{ W}}{0,05 \times \frac{4}{3} \pi \times 1 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3} \times ((6 \times 10^6 \text{ m} + 10 \times 10^3 \text{ m})^3 - (6 \times 10^6 \text{ m})^3)}\right)^{1/3} \approx 5 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}.$$

On constate qu'en ordre de grandeur cette valeur de vitesse des vents atmosphériques  $5 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1} \approx 20 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$  concorde avec les valeurs réelles : l'étude est cohérente.

## 2 L'accordeur de guitare

Adapté du concours CCS TSI (2019)

Nous allons étudier quelques aspects d'un accordeur de guitare. La problématique est la suivante.

- La guitare comporte six cordes : Mi grave, La, Ré, Sol, Si, Mi aigu.
- Les fréquences fondamentales théoriques de vibration de ces cordes, notées  $f_{ac}$  sont données dans le Tableau 1.

Corde	Fréquences $f_{ac}$ (Hz)
Mi grave	82,4
La	110,0
Ré	146,8
Sol	196
Si	246,9
Mi aiguë	329,6

Tableau 1: Fréquences fondamentales de vibration des cordes de guitare

On souhaite accorder une corde légèrement désaccordée : on notera  $f_{co}$  la fréquence fondamentale de vibration de la corde en question.

### Principe de l'accordeur

- Sélection de la corde à accorder (donc  $f_{ac}$  est fixée).
- Création d'un signal carré de référence de fréquence  $f_{ac}$  avec un oscillateur de type astable.
- Enregistrement du signal  $u_e(t)$  provenant de l'excitation de la corde à accorder : signal quelconque, d'amplitude assez faible, de fréquence  $f_{co}$ .
- Amplification et filtrage de ce signal.
- Extraction de la fondamentale du signal : obtention d'un signal sinusoïdal de fréquence  $f_{co}$  par l'utilisation d'un filtre à fréquence caractéristique réglable par le signal extérieur de référence.
- Mise en forme de ce signal : obtention d'un signal carré de fréquence  $f_{co}$ .
- On a donc à disposition deux signaux carrés (signaux logiques) de fréquences respectives  $f_{ac}$  et  $f_{co}$ . Dans les accordeurs récents le traitement est numérique : les signaux sont envoyés dans un calculateur numérique intégré qui calcule l'écart de fréquence et indique à l'utilisateur quand la corde est accordée, c'est-à-dire quand  $f_{co} = f_{ac}$ .

Ce principe général est schématisé sur la Figure 3.

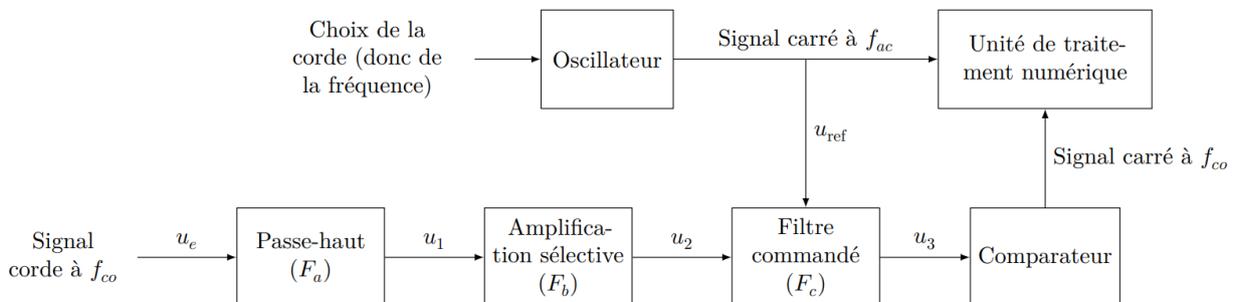


Figure 3: Principe de fonctionnement de l'accordeur de guitare

Ce problème s'intéresse au traitement du signal venant de la corde

## 2.1 Le signal

La Figure 4 montre un exemple de signal électrique à la sortie du micro d'une guitare électrique.

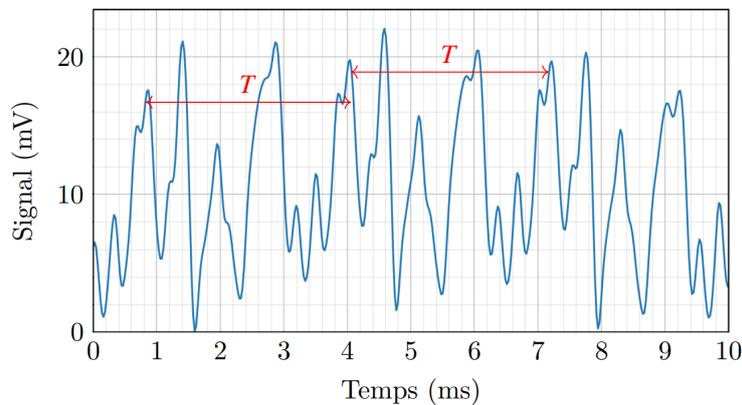


Figure 4: Signal de la guitare

14. Donner une valeur approchée de la valeur moyenne de ce signal.

On constate que le signal oscille d'une valeur proche de 10 mV. **La valeur moyenne est donc de 10 mV, c'est également l'amplitude de la composante continue du signal.**

15. Donner une estimation de la valeur de la fréquence de ce signal (on peut supposer qu'en première approximation le signal est périodique).

On voit qu'une forme caractéristique du signal se répète deux fois entre 0,8 ms et 7,2 ms, la période de ce signal est donc

**A.N.**

$$T = \frac{7,2 \times 10^{-3} \text{ s} - 0,8 \times 10^{-3} \text{ s}}{2} = 3,2 \times 10^{-3} \text{ s}$$

la fréquence est donc

$$f = \frac{1}{T} = \frac{1}{3,2 \times 10^{-3} \text{ s}} = 3,1 \times 10^2 \text{ Hz.}$$

16. De quelle corde de guitare s'agit-il ?

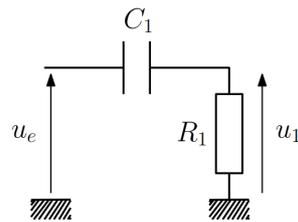
D'après le Tableau 1, il s'agirait de **la corde Mi aiguë**.

17. L'analyse spectrale de ce signal fera-t-elle apparaître des harmoniques ? Justifier.

Le signal, supposé périodique, ne correspond pas à un signal sinusoïdal. Or, on sait que tout signal périodique peut se mettre sous la forme d'un développement de Fourier, soit d'une somme de signaux sinusoïdaux de fréquences, d'amplitudes et de phases différentes. Donc ce signal a bien des harmoniques. Les fréquences de ces harmoniques sont multiples de la fréquence du fondamental. Ce signal présente de nombreuses discontinuités, l'amplitude des harmoniques de rang élevé est donc importante.

## 2.2 Premier filtre

Avant toute chose, le signal électrique provenant du micro de la guitare est envoyé sur le filtre de la Figure 5 (filtre ( $F_a$ )).

Figure 5: Filtre ( $F_a$ )

18. En supposant l'entrée sinusoïdale, définir et exprimer la fonction de transfert  $\underline{H}_1(j\omega)$  de ce filtre en fonction de  $R_1$ ,  $C_1$  et de la pulsation  $\omega$  du signal.

En effectuant un pont diviseur de tension pour obtenir la tension complexe  $\underline{u}_1$  du résistor de résistance  $R_1$  il vient que

$$\underline{u}_1 = \underline{u}_e \frac{\underline{Z}_{R_1}}{\underline{Z}_{R_1} + \underline{Z}_{C_1}} = \underline{u}_e \frac{R_1}{R_1 + \frac{1}{jC_1\omega}} = \underline{u}_e \frac{jR_1C_1\omega}{1 + jR_1C_1\omega}.$$

La fonction de transfert  $\underline{H}_1(j\omega)$  est donc

$$\underline{H}_1(j\omega) = \frac{\underline{u}_1}{\underline{u}_e} = \frac{jR_1C_1\omega}{1 + jR_1C_1\omega}.$$

19. De quel type de filtre s'agit-il ? Faire apparaître une pulsation caractéristique  $\omega_1$  en fonction de  $R_1$  et  $C_1$  et préciser sa signification.

Il s'agit d'un **filtre passe-haut** de fonction de transfert canonique

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{H_0 j \frac{\omega}{\omega_0}}{1 + j \frac{\omega}{\omega_0}}.$$

On peut identifier la pulsation caractéristique  $\omega_1 \equiv \omega_0$  en égalisant les dénominateurs des deux expressions de la fonction de transfert

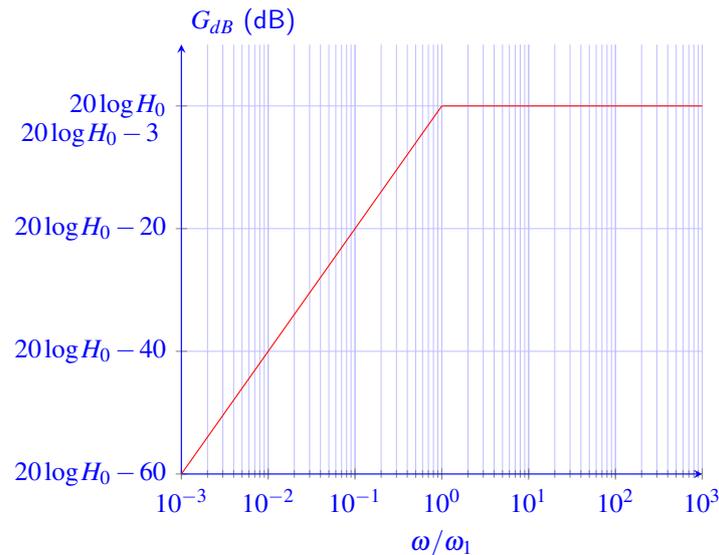
$$1 + jR_1C_1\omega = 1 + j \frac{\omega}{\omega_1}$$

soit

$$\omega_1 = \frac{1}{R_1C_1}.$$

Il s'agit de la pulsation en dessous de laquelle le gain en décibel du filtre diminue selon une droite asymptote de -20 dB lorsque les pulsations diminuent de une décade, soit la pulsation de coupure, la pulsation à partir de laquelle les basses fréquences sont coupées.

20. Tracer sans calcul l'allure du diagramme de Bode asymptotique relatif au gain.



21. On a choisi  $R_1 = 100\text{k}\Omega$  et  $C_1 = 100\text{nF}$ . Calculer la fréquence de coupure  $f_1$  à -3 dB de ce filtre. Au vu de l'allure du signal de la Figure 4, quel est le rôle de ce premier filtre ?

La fréquence de coupure  $f_1$  est définie telle que

$$f_1 = \frac{\omega_1}{2\pi} = \frac{1}{2\pi \times R_1 C_1}$$

soit

**A.N.**

$$f_1 = \frac{1}{2\pi \times 100 \times 10^3 \Omega \times 100 \times 10^{-9} \text{nF}} = 15,9\text{Hz.}$$

D'après l'allure du signal, ce filtre **permet de supprimer la composante continu** à  $f = 0\text{Hz}$ , seule composante ayant une fréquence inférieure à la fréquence de coupure du filtre passe-haut. Le signal a alors une valeur moyenne nulle.

## 2.3 Filtrage (très) sélectif commandé

On souhaite maintenant sélectionner la fréquence fondamentale  $f_{co}$  du signal  $u_2$ , dont la valeur est à priori voisine de celle de la fréquence fondamentale théorique de vibration de la corde sélectionnée sur l'accordeur ( $f_{ac}$ ) (on suppose que la corde est légèrement désaccordée). On suppose pour la suite que c'est la corde Mi aiguë que l'on souhaite accorder.

Le principe du filtre ( $F_c$ ) est que sa fréquence caractéristique soit réglée par le signal de référence de fréquence  $f_{ac}$ .

### 2.3.1 Diagramme de Bode

La Figure 6 représente le diagramme de Bode relatif au gain du filtre ( $F_c$ ) tracé à deux échelles différentes.

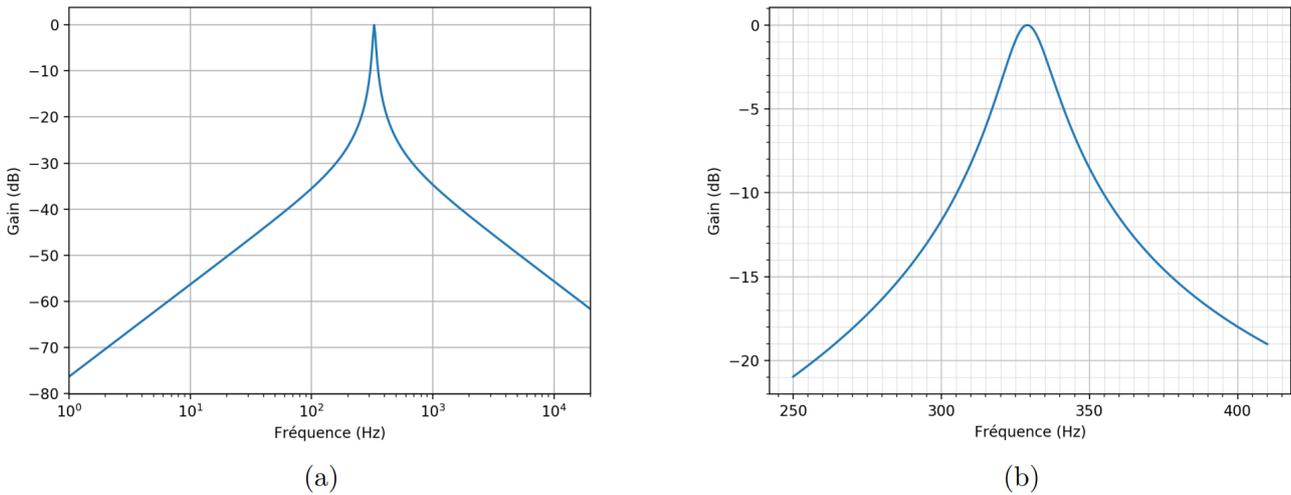


Figure 6: Diagramme de Bode en gain du filtre ( $F_c$ )

22. Dire en le justifiant rapidement, de quel type de filtre il s'agit. Quelle est sa fréquence centrale caractéristique ?  
 On constate qu'il s'agit d'un **filtre passe-bande** : il filtre les basses et les hautes fréquences autour d'une certaine fréquence caractéristique.  
 Cette fréquence est la fréquence pour laquelle le gain et le gain en décibel est maximal. Elle correspond à une valeur de 330Hz d'après la Figure 6.

23. Donner une estimation de sa bande-passante à -3 dB après l'avoir définie.  
 On peut estimer que la bande passante à -3 dB correspond à la largeur en fréquence pour laquelle le gain en décibel est supérieur au gain maximal -3 dB, soit ici -3 dB.  
 Toujours d'après la Figure 6, cette bande passante notée  $\Delta f$  est

$$\Delta f \approx 340\text{Hz} - 320\text{Hz} = 20\text{Hz}.$$

24. Si la corde est désaccordée à  $f_{co} = 315\text{Hz}$ , estimer, en le justifiant, de quel facteur est atténuée sa composante spectrale fondamentale en sortie de ce filtre.  
 La composante fondamentale est la composante de fréquence  $f_{co}$ , donc, d'après la Figure 6, le gain en décibel pour une fréquence  $f_{co} = 315\text{Hz}$  est  $G_{dB}(f_{co}) = -6\text{dB}$ , le gain  $G(f_{co})$  est défini tel que

$$G_{dB}(f_{co}) = 20\log(G(f_{co}))$$

donc

$$G(f_{co}) = 10^{G_{dB}(f_{co})/20}.$$

**A.N.**

$$G(f_{co}) = 10^{-6/20} = \frac{1}{2}.$$

### 2.3.2 Analyse spectrale

La Figure 7 correspond au spectre du signal d'entrée  $u_e$  représenté sur la Figure 4.

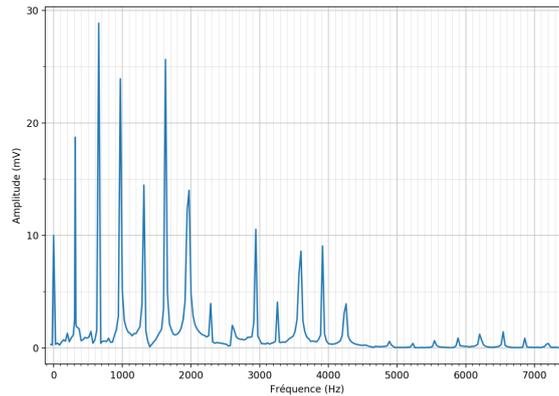


Figure 7: Spectre du signal d'entrée  $u_e$

25. Justifier qu'il est parfaitement cohérent qu'il s'agisse du spectre du signal de la Figure 4.

On constate d'abord que la composante continue à 0Hz a une amplitude de 10 mV, ce qui correspond bien à la valeur estimée au début.

De plus, on observe que le fondamental, donc le pic de première fréquence après la fréquence nulle, correspond à une fréquence proche de 300Hz, ce qui correspond également à la valeur estimée au début.

Enfin, on constate que tous les harmoniques sont espacés de près de 300Hz, donc de fréquences multiples de celle du fondamental.

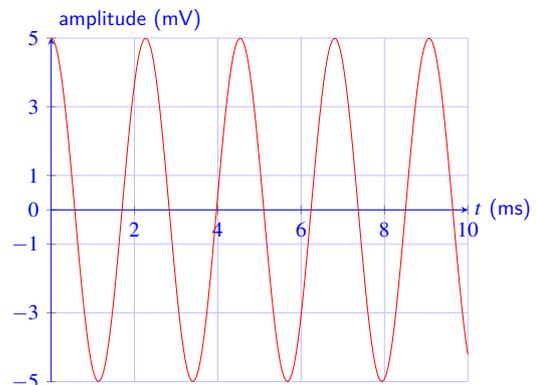
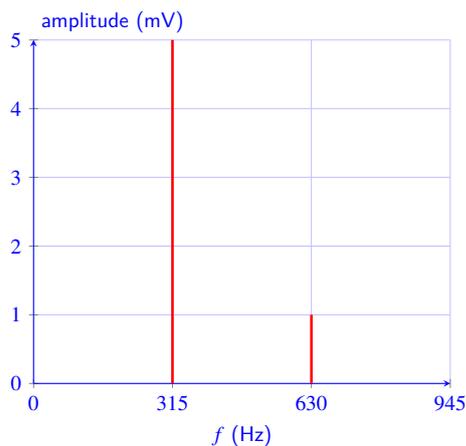
26. En le justifiant soigneusement, dire quel spectre de la Figure 8 correspond à la sortie du premier filtre ( $F_a$ ).

En sortant du premier filtre ( $F_a$ ), seule la composante continue est supprimée, le spectre en sortie est donc identique au spectre d'entrée, exceptée la composante continue à 0Hz, **il s'agit donc du spectre (a)**.

27. Tracer l'allure du spectre du signal en sortie du filtre ( $F_c$ ). Tracer l'allure du signal (temporel) correspondant.

En sortir du filtre passe-bande ( $F_c$ ), seule le fondamental à  $f_{co} = 315\text{Hz}$  et l'harmonique de rang 2, donc de fréquence  $2f_{co} = 630\text{Hz}$ , subsistent. D'après l'étude précédente, l'amplitude du fondamental est divisé par deux, et l'amplitude de l'harmonique de rang 2 est fortement amorti.

Le fondamental, ayant une amplitude beaucoup plus importante que l'harmonique de rang 2, le signal en sortie du filtre ( $F_c$ ) correspond quasiment au fondamental seul, soit un signal sinusoïdal de fréquence  $f_{co} = 315\text{Hz}$ , donc de période 3 ms.



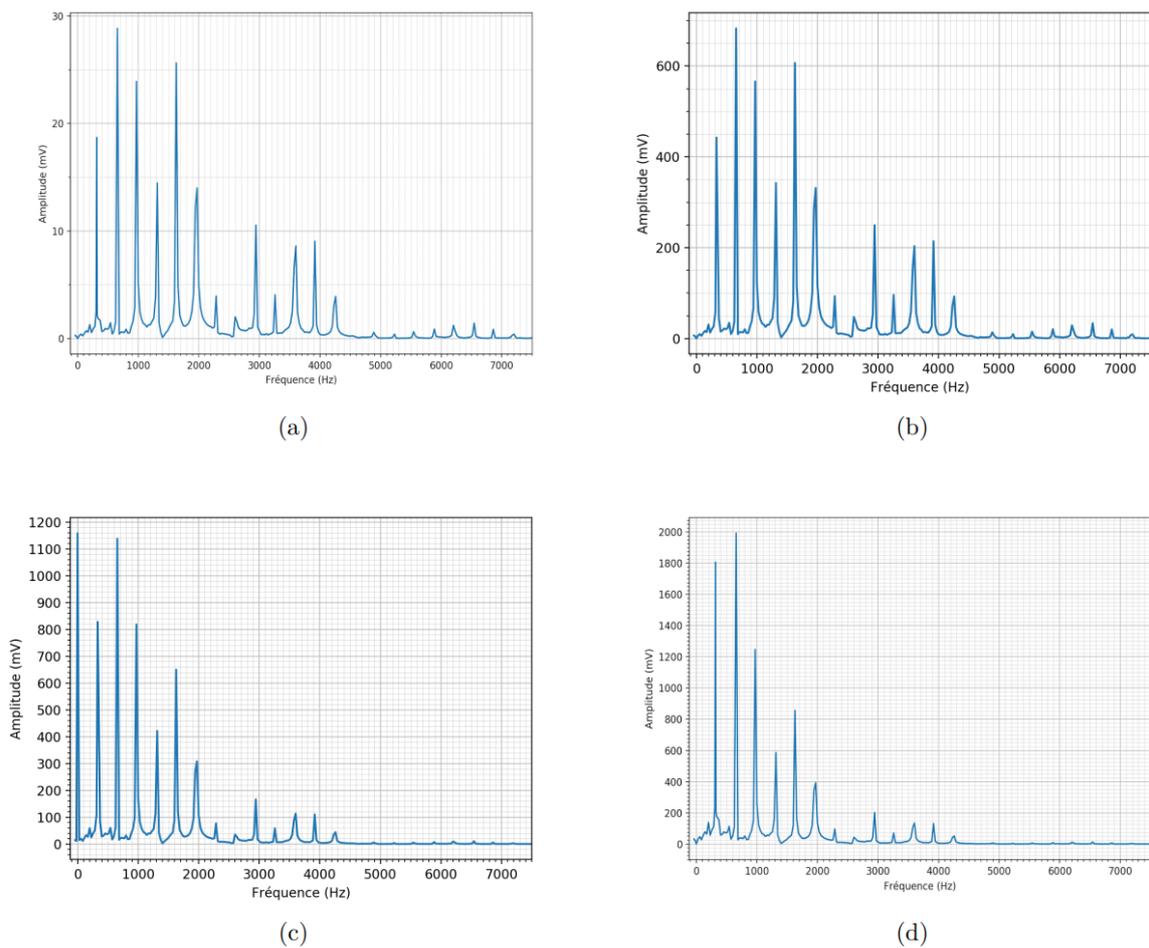


Figure 8: Spectres

### 3 Etude d'un filtre

Adapté de banque PT (2021)

Sur la Figure 9 on donne le schéma d'un filtre. On note  $\underline{H}_F(\omega)$  sa fonction de transfert.

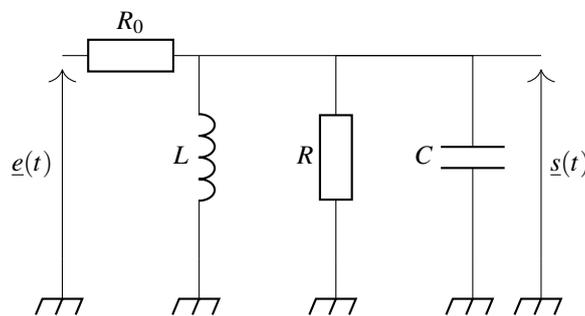


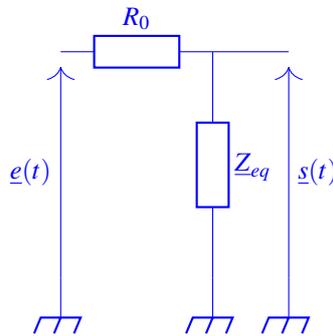
Figure 9: Schéma électrique.

28. Déterminer l'expression de  $\underline{H}_F(\omega)$  et la mettre sous la forme

$$\underline{H}_F(\omega) = \frac{H_0}{1 + jQ_F \left(x - \frac{1}{x}\right)}$$

avec  $x = \frac{\omega}{\omega_0}$ .

On réalise le schéma équivalent du circuit



L'impédance complexe équivalente  $Z_{eq}$  s'obtient à partir de la loi d'association des impédances complexes en parallèle, soit

$$Z_{eq} = \frac{1}{\frac{1}{Z_L} + \frac{1}{Z_R} + \frac{1}{Z_C}}$$

$$Z_{eq} = \frac{1}{\frac{1}{jL\omega} + \frac{1}{R} + jC\omega} = \frac{1}{\frac{1}{R} + j(C\omega - \frac{1}{L\omega})} = \frac{R}{1 + jR(C\omega - \frac{1}{L\omega})}$$

On peut alors obtenir la tension  $s(t)$  aux bornes de cette association de dipôle à partir d'un pont diviseur de tension

$$s(t) = e(t) \frac{Z_{eq}}{Z_{eq} + R_0}$$

$$s(t) = e(t) \frac{R}{1 + jR(C\omega - \frac{1}{L\omega})} \frac{1}{\frac{R}{1 + jR(C\omega - \frac{1}{L\omega})} + R_0} = e(t) \frac{R}{R + R_0 + jR_0R(C\omega - \frac{1}{L\omega})}$$

$$s(t) = e(t) \frac{\frac{R}{R+R_0}}{\frac{R+R_0}{R+R_0} + j \frac{R_0R}{R+R_0} (C\omega - \frac{1}{L\omega})} = e(t) \frac{\frac{R}{R+R_0}}{1 + j \frac{R_0R}{R+R_0} (C\omega - \frac{1}{L\omega})} = e(t) \frac{\frac{R}{R+R_0}}{1 + j \frac{R_0R}{R+R_0} \left( \sqrt{C}\sqrt{C}\frac{\sqrt{L}}{\sqrt{L}}\omega - \frac{1}{\omega} \frac{1}{\sqrt{L}\sqrt{L}} \frac{\sqrt{C}}{\sqrt{C}} \right)}$$

$$s(t) = e(t) \frac{\frac{R}{R+R_0}}{1 + j \frac{R_0R}{R+R_0} \sqrt{\frac{C}{L}} \left( \sqrt{LC}\omega - \frac{1}{\omega\sqrt{LC}} \right)}$$

La fonction de transfert est donc

$$H(j\omega) = \frac{s(t)}{e(t)} = \frac{\frac{R}{R+R_0}}{1 + j \frac{R_0R}{R+R_0} \sqrt{\frac{C}{L}} \left( \sqrt{LC}\omega - \frac{1}{\omega\sqrt{LC}} \right)}$$

29. Expliciter littéralement  $Q_F$ ,  $H_0$  et  $f_0$ .

On peut comparer la forme de la fonction de transfert obtenue précédemment à la forme

$$H_F(\omega) = \frac{H_0}{1 + jQ_F \left( x - \frac{1}{x} \right)}$$

On identifie alors la pulsation propre  $\omega_0$  à l'aide du terme entre parenthèses au dénominateur

$$\sqrt{LC}\omega - \frac{1}{\omega\sqrt{LC}} = x - \frac{1}{x} = \frac{\omega_0}{\omega} - \frac{\omega}{\omega_0}$$

donc

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}.$$

Il vient que la fréquence propre est

$$f_0 = \frac{\omega_0}{2\pi} = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}.$$

On obtient par identification directe les termes  $H_0$  et  $Q_F$

$$H_0 = \frac{R}{R+R_0} \quad \text{et} \quad Q_F = \frac{R_0 R}{R+R_0} \sqrt{\frac{C}{L}}.$$

30. Donner la relation reliant le facteur de qualité, la fréquence propre et la bande passante à -3 dB.

On a vu que pour une résonance en intensité le facteur de qualité était lié à la bande passante par la relation

$$Q_F = \frac{f_0}{\Delta f}$$

avec  $\Delta f$  la bande passante, soit l'écart entre les deux fréquences pour lesquelles l'amplitude maximal en sortie du circuit est divisé par  $\sqrt{2}$ , soit

$$G(f) = \frac{H_0}{\sqrt{2}}$$

donc

$$G_{dB}(f) = 20 \log \left( \frac{H_0}{\sqrt{2}} \right) = 20 \log(H_0) - 20 \log(\sqrt{2})$$

$$G_{dB}(f) = 20 \log(H_0) - 3 \text{ dB}$$

d'où le terme bande passante à -3 dB.

31. Faire l'application numérique pour  $R_0 = 470 \Omega$ ,  $R = 120 \Omega$ ,  $L = 50 \mu\text{H}$  et  $C = 50 \text{nF}$ .

**A.N.**

$$H_0 = \frac{R}{R+R_0} = \frac{120 \Omega}{120 \Omega + 470 \Omega} = 0,2.$$

$$Q_F = \frac{R_0 R}{R+R_0} \sqrt{\frac{C}{L}} = \frac{470 \Omega \times 120 \Omega}{120 \Omega + 470 \Omega} \sqrt{\frac{50 \times 10^{-9} \text{F}}{50 \times 10^{-6} \text{H}}} = 3.$$

$$f_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}} = \frac{1}{2\pi\sqrt{50 \times 10^{-6} \text{H} \times 50 \times 10^{-9} \text{F}}} = 100 \text{kHz}.$$

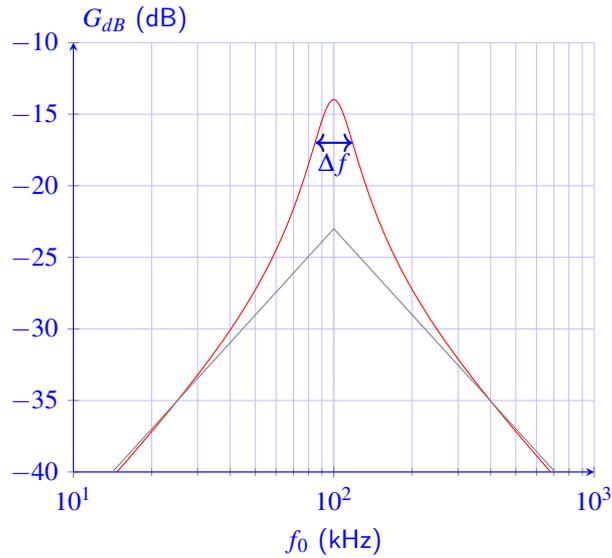
$$\Delta f = \frac{f_0}{Q_F} = \frac{100 \text{kHz}}{3} = 33 \text{kHz}.$$

32. Faire une représentation graphique approchée du gain en décibel  $G_{dB}$  en fonction de  $\log(x)$  ; préciser quelques valeurs sur ce graphe. Faire apparaître sur ce graphe la bande passante à -3 dB.

Le maximum du gain en décibel est atteint lorsque  $f = f_0$  soit  $xx = 1$ , donc **A.N.**

$$G_{dB} = 20 \log(H_0) = 20 \log(0,2) = -14 \text{dB}.$$

La bande passante à -3 dB  $\Delta f$  correspond aux fréquences correspondant à un gain en décibel de  $G_{dB} = -14 - 3 = -17 \text{dB}$ .



### 4 Microscope de Van Leeuwenhoek

Adapté du concours commun Mines-Ponts - Physique II - PC (2020)

Le premier microscope de Van Leeuwenhoek était rudimentaire et reposait sur l'utilisation d'une seule lentille boule utilisée comme objectif. Après polissage d'une goutte de silice fondue, Van Leeuwenhoek, obtint des lentilles boule de rayon  $R = 0,60$  mm de centre  $C$ . L'indice optique de la silice sera noté  $n$ , les foyers objet et image de la lentille sont respectivement notés  $F$  et  $F'$ .

Sur la Figure 10 on a représenté la trajectoire d'un rayon lumineux initialement parallèle à l'axe optique ( $Cz$ ) se propageant dans une lentille boule d'indice optique  $n$  placée dans l'air d'indice unitaire. Les rayons incidents et émergents se coupent dans un plan passant par  $C$ , perpendiculaire à l'axe ( $Cz$ ). L'étude sera menée dans l'approximation de Gauss (c'est-à-dire qu'on approximera les fonctions trigonométriques par leur développement limité à l'ordre 1 en 0).

Les angles formés entre les rayons lumineux et les normales aux dioptries sont notés  $i_1$ , au point  $I$  en entrée de la lentille et  $i_2$  à l'extérieur de la lentille au point  $J$ , en sortie. De même, les angles intérieurs seront notés  $r_1$  et  $r_2$ . L'angle  $\widehat{F' C J}$  est noté  $\beta_r$  et l'angle de déviation  $\widehat{C F' K}$  sera noté  $\beta$ .

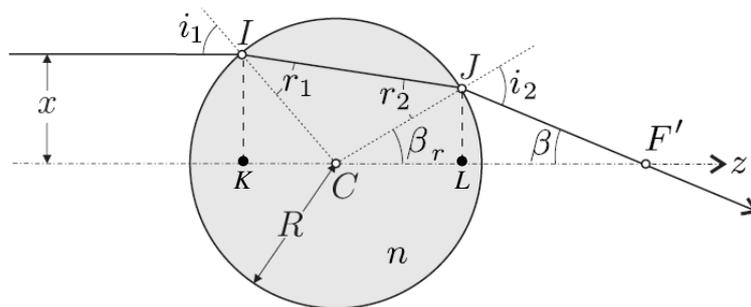


Figure 10: Lentille boule.

- 33. Déterminer la relation entre  $i_1$  et  $i_2$ .

On constate que le triangle  $ICJ$  est un triangle isocèle : les côtés  $IC$  et  $CJ$  correspondent au rayon  $R$  de la boule. Les valeurs absolues des angles  $r_1$  et  $r_2$  sont donc égaux. D'après le schéma  $r_1$  est positif et  $r_2$  est négatif si l'on utilise l'orientation des angles dans le sens trigonométrique.

De plus, d'après la loi de la réfraction de Snell-Descartes

$$n_{air} \sin i_1 = n \sin r_1 \quad \text{et} \quad n \sin r_2 = n_{air} \sin i_2$$

comme  $r_1 = -r_2$  on note  $r_1 = -r_2 \equiv r$ .

$$n_{air} \sin i_1 = n \sin r \quad \text{et} \quad n \sin(-r) = n_{air} \sin i_2$$

$$n_{air} \sin i_1 = n \sin r \quad \text{et} \quad -n \sin r = n_{air} \sin i_2$$

donc

$$n_{air} \sin i_1 = -n_{air} \sin i_2$$

$$\sin i_1 = -\sin i_2$$

$$i_1 = -i_2.$$

34. Exprimer  $i_1$  en fonction de  $x$  et  $R$ .

Le rayon lumineux arrivant parallèlement à l'axe optique ( $Cz$ ), si l'on considère la droite passant par les points  $I$  et  $C$ , l'angle qu'elle forme avec le rayon parallèle, soit  $i_1$ , est le même que l'angle qu'elle forme avec l'axe optique ( $Cz$ ), qu'on appelle ici  $\widehat{ICK}$ . Ainsi on peut se placer dans le triangle rectangle d'hypoténuse  $ICK$  pour exprimer la relation entre l'angle  $i_1$  et les côtés de ce triangle

$$\sin \widehat{ICJ} = \sin i_1 = \frac{IK}{CI}$$

or  $IK = x$  et  $CI = R$ , donc

$$\sin i_1 = \frac{x}{R}$$

et si on exprime la fonction sinus par son développement limité à l'ordre 1 en 0

$$\sin i_1 \approx i_1 \approx \frac{x}{R}.$$

35. Exprimer  $\beta_r$  en fonction de  $i_1$  et  $n$ , puis en fonction de  $x$ ,  $R$  et  $n$ .

Considérons l'angle  $\widehat{ICJ}$ . La somme des angles d'un triangle étant de  $\pi$ , on écrit que

$$\widehat{ICJ} = \pi - |r_1| - |r_2|$$

soit

$$\widehat{ICJ} = \pi - 2r.$$

On constate également que les angles  $\widehat{ICK} = i_1$ ,  $\widehat{ICJ}$  et  $\beta_r$  s'étendent sur un demi-cercle, leur somme est donc égale à  $\pi$ , soit

$$\pi = i_1 + \widehat{ICJ} + \beta_r$$

soit

$$\beta_r = \pi - i_1 - \widehat{ICJ}$$

$$\beta_r = \pi - i_1 - (\pi - 2r)$$

$$\beta_r = 2r - i_1.$$

Les angles  $i_1$  et  $r$  sont liés par la relation des Descartes  $n_{air} \sin i_1 = n \sin r$  qu'on peut approximer grâce au développement limité de la fonction sinus

$$n_{air} \sin i_1 \approx n_{air} i_1$$

$$n \sin r \approx nr$$

et comme  $n_{air}$  est pris égal à 1 il vient que

$$i_1 = nr \quad \text{ou} \quad r = \frac{i_1}{n}.$$

On peut ainsi exprimer  $\beta_r$

$$\beta_r \approx 2 \left( \frac{i_1}{n} \right) - i_1$$

$$\beta_r \approx i_1 \left( \frac{2}{n} - 1 \right).$$

En utilisant l'expression de  $i_1$  trouvé précédemment

$$\beta_r \approx \frac{x}{R} \left( \frac{2}{n} - 1 \right).$$

On considère maintenant que l'on peut utiliser l'égalité = à la place de l'approximation  $\approx$ .

36. Exprimer  $\beta$  en fonction de  $i_1$  et  $\beta_r$  puis de  $x$ ,  $R$  et  $n$ .

Considérons l'angle  $\widehat{CJF'}$ . On constate que cet angle et l'angle  $i_2$  s'étendent sur demi-cercle, soit

$$\pi = i_2 + \widehat{CJF'}$$

soit

$$\widehat{CJF'} = \pi - i_2$$

$$\widehat{CJF'} = \pi - i_1.$$

Dans le triangle  $CJF'$ , la somme des angles donne un angle de  $\pi$ , soit

$$\pi = \beta_r + \widehat{CJF'} + \beta$$

ainsi

$$\beta = \pi - \beta_r - \widehat{CJF'}$$

$$\beta = \pi - \beta_r - (\pi - i_1)$$

$$\beta = i_1 - \beta_r$$

soit

$$\beta = i_1 - i_1 \left( \frac{2}{n} - 1 \right)$$

$$\beta = 2i_1 \left( 1 - \frac{1}{n} \right)$$

$$\beta = \frac{2x}{R} \left( 1 - \frac{1}{n} \right).$$

37. En déduire la distance focale  $f'_L$  définie comme la distance  $CF'$  sur la Figure 10 en fonction de  $n$  et  $R$ .  
Afin d'obtenir la distance  $CF'$ , on estime d'abord les distances  $CL$  et  $LF'$  telles que  $CF' = CL + LF'$ .  
Pour obtenir la distance  $CL$  on se place dans le triangle  $CJL$ , il vient que

$$\cos \beta_r = \frac{CL}{CJ}$$

avec  $CJ = R$  et  $\cos \alpha \approx 1$  il vient que

$$1 = \frac{CL}{R}$$

donc

$$CL = R.$$

Exprimons également la distance  $JL$  qui est commune aux deux triangles d'intérêt ici  $CJL$  et  $LF'J$ . Dans le triangle  $CJL$  on peut écrire que

$$\sin \beta_r = \frac{JL}{CJ}$$

avec  $CJ = R$  et  $\sin \alpha \approx \alpha$  il vient que

$$\beta_r = \frac{JL}{R}$$

soit

$$JL = R\beta_r.$$

Pour obtenir la distance  $CL$  on se place dans le triangle  $LF'J$ , il vient que

$$\tan \beta = \frac{JL}{LF'}$$

avec  $JL = R\beta_r$  et  $\tan \alpha \approx \alpha$  il vient que

$$\beta = R \frac{\beta_r}{LF'}$$

soit

$$LF' = R \frac{\beta_r}{\beta}.$$

La distance focale  $f'_L = CF'$  est donc

$$CF' = CL + LF'$$

$$CF' = R + R \frac{\beta_r}{\beta}$$

$$CF' = R \left( 1 + \frac{x}{R} \left( \frac{2}{n} - 1 \right) \times \frac{R}{2x} \frac{1}{1 - \frac{1}{n}} \right)$$

$$CF' = R \left( 1 + \frac{1}{2} \left( \frac{2-n}{n} \right) \times \frac{n}{n-1} \right)$$

$$CF' = R \left( 1 + \frac{1}{2} \frac{2-n}{n-1} \right)$$

$$CF' = R \left( \frac{2n-2}{2n-2} + \frac{2-n}{2n-2} \right)$$

$$CF' = R \frac{2n-2+2-n}{2n-2}$$

$$CF' = R \frac{n}{2n-2}$$

$$CF' = \frac{R}{2} \frac{n}{n-1}.$$

38. Estimer enfin numériquement  $f'_L$  en prenant  $n = 1,5$ .

**A.N.**

$$f'_L = \frac{R}{2} \frac{n}{n-1}$$

$$f'_L = \frac{0,60 \text{ mm}}{2} \frac{1,5}{1,5-1}$$

$$f'_L = \frac{0,60 \text{ mm}}{2} \frac{1,5}{1,5-1}$$

$$f'_L = 0,90 \text{ mm.}$$

Dans toute la suite,  $(Ox)$  désigne la direction transverse à l'axe optique contenant l'objet étudié. On limite l'étude au plan  $(Ox, Oz)$  et on prendra  $f'_L = 1,0$  mm. On utilise à présent un modèle de lentille mince équivalent à la lentille boule, possédant la même distance focale  $f'_L$  et le même rayon  $R$ . Celle-ci est représentée sur la Figure 11.

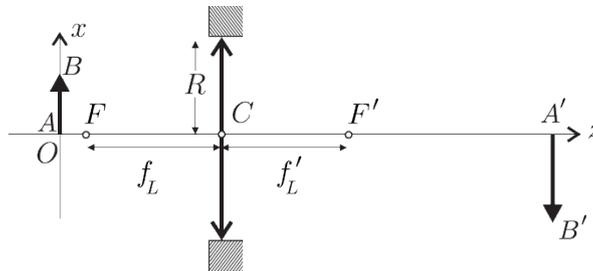


Figure 11: Lentille mince équivalente à la lentille boule.

Une des normes actuelles est d'imposer une distance  $l = 195$  mm sur l'axe optique entre un objet et son image à travers l'objectif.

39. Exprimer  $l$  en fonction de  $\overline{CA}$  et  $\overline{CA'}$ .

La distance  $l$  correspond à la distance entre un objet positionné en  $A$  et son image positionnée en  $A'$ , soit  $\overline{AA'}$ . On peut exprimer cette distance en fonction des distances de l'objet et de l'image par rapport au centre optique  $C$  de la lentille

$$l = \overline{AC} + \overline{CA'}$$

soit

$$l = -\overline{CA} + \overline{CA'}$$

$$l = \overline{CA'} - \overline{CA}.$$

40. Montrer que  $\overline{CA}$  peut-être mis sous la forme d'une équation du second degré telle que

$$\overline{CA}^2 + l\overline{CA} + lf'_L = 0.$$

L'équation présentée contient des termes que l'on retrouve dans la relation de conjugaison de Descartes liée à la position :  $f'_L$  la distance focale de la lentille et  $\overline{CA}$  la distance entre le centre optique et la position de l'objet.

Exprimons cette relation

$$\frac{1}{\overline{CA'}} - \frac{1}{\overline{CA}} = \frac{1}{f'_L}$$

or  $l = \overline{CA'} - \overline{CA}$ , donc

$$\overline{CA'} = l + \overline{CA}$$

donc

$$\begin{aligned}\frac{1}{l+\overline{CA}} - \frac{1}{\overline{CA}} &= \frac{1}{f'_L} \\ \frac{\overline{CA} - l - \overline{CA}}{\overline{CA}(l+\overline{CA})} &= \frac{1}{f'_L} \\ -\frac{l}{\overline{CA}(l+\overline{CA})} &= \frac{1}{f'_L} \\ -\frac{\overline{CA}(l+\overline{CA})}{l} &= f'_L \\ -\overline{CA}^2 - l\overline{CA} &= lf'_L\end{aligned}$$

$$\overline{CA}^2 + l\overline{CA} + lf'_L = 0.$$

41. Afin que le grandissement transversal  $\gamma$  du microscope de Van Leeuwenhoek soit supérieur à 1 en valeur absolue, montrer que

$$|\overline{CA}| < \frac{l}{2}.$$

Exprimons le grandissement à partir de la relation de conjugaison de Descartes du grandissement, soit

$$\gamma = \frac{\overline{CA'}}{\overline{CA}}.$$

Pour que  $|\gamma| > 1$ , comme  $\gamma < 0$ , il faut que  $\gamma < -1$ , soit

$$\frac{\overline{CA'}}{\overline{CA}} < -1$$

or  $\overline{CA'} = l + \overline{CA}$  donc

$$\frac{l + \overline{CA}}{\overline{CA}} < -1$$

si on multiplie par  $\overline{CA} < 0$  des deux côtés de l'inégalité, on doit changer son sens, soit

$$l + \overline{CA} > -\overline{CA}$$

$$l > -2\overline{CA}$$

$$\frac{l}{2} > -\overline{CA}$$

or comme  $\overline{CA} < 0$ , on peut écrire que  $-\overline{CA} = |\overline{CA}|$  soit

$$|\overline{CA}| < \frac{l}{2}.$$

42. À partir des deux derniers résultats, déterminer l'expression de  $\overline{CA}$  en fonction de  $l$  et  $f'_L$ .  
En résolvant l'équation du second degré précédente, on trouve deux solutions pour  $\overline{CA}$ .

$$\Delta = l^2 - 4lf'_L$$

$$\overline{CA}_- = -\frac{l}{2} - \frac{\sqrt{l^2 - 4lf'_L}}{2}$$

$$\overline{CA}_+ = -\frac{l}{2} + \frac{\sqrt{l^2 - 4lf'_L}}{2}.$$

Or on a montré que pour obtenir une image agrandie, il fallait que  $|\overline{CA}| < l/2$ , soit  $\overline{CA} > -l/2$ . Afin d'obtenir une image agrandie, seule la solution  $\overline{CA}_+$  respecte cette condition, ainsi il vient que

$$\overline{CA} = -\frac{l}{2} + \frac{\sqrt{l^2 - 4lf'_L}}{2}.$$

43. Calculer la valeur numérique de  $\overline{CA}$  et  $\overline{CA}'$ . Par quelles grandeurs peut-on les approximer ? Exprimer  $\gamma$  en fonction de ces grandeurs et calculer sa valeur numérique.

**A.N.**

$$\overline{CA} = -\frac{l}{2} + \frac{\sqrt{l^2 - 4lf'_L}}{2}$$

$$\overline{CA} = -\frac{195 \text{ mm}}{2} + \frac{\sqrt{195^2 - 4 \times 195 \times 0,90}}{2}$$

$$\overline{CA} = -0,90 \text{ mm.}$$

$$l = \overline{CA}' - \overline{CA}$$

$$\overline{CA}' = l + \overline{CA}$$

$$\overline{CA}' = 195 \text{ mm} + (-0,90 \text{ mm})$$

$$\overline{CA}' = 194 \text{ mm.}$$

On peut approximer  $\overline{CA}$  à  $f_L = -f'_L = -0,90 \text{ mm}$ , la distance focale objet de la lentille, et on peut approximer  $\overline{CA}'$  à  $l = 195 \text{ mm}$ , la distance entre l'objet et l'image. Ainsi

$$\gamma = \frac{\overline{CA}'}{\overline{CA}} \approx -\frac{l}{f'_L}.$$

**A.N.**

$$\gamma = -\frac{195 \text{ mm}}{0,90 \text{ mm}} = 217.$$

## 5 Trajectoire d'un volant de badminton

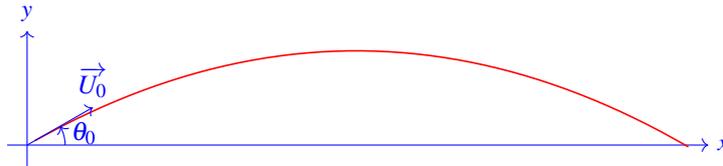
*Adapté du concours X-ENS-ESPCI - PC (2015)*

Le badminton est un sport dans lequel les joueurs frappent un projectile, appelé volant, à l'aide d'une raquette. Le but de ce problème est de proposer une modélisation simplifiée de la trajectoire du volant sous l'effet conjuguée de la pesanteur et de la résistance de l'air, et de confronter le modèle aux résultats d'une expérience. On négligera la poussée d'Archimède dans tout le problème.

On néglige dans un premier temps la force de freinage exercée par l'air.

44. On lance depuis le sol le volant de masse  $m$  avec une vitesse initiale  $U_0$ , dans une direction faisant un angle  $\theta_0$  avec le plan du sol, supposé horizontal. Quelle est la nature de la trajectoire ? Dessiner son allure. Déterminer la portée  $L_0$  (distance horizontale à laquelle le volant retombe sur le sol) en fonction de  $U_0$  de  $\theta_0$ , et de l'accélération de la pesanteur  $g$ .

Le système étudié est le volant. Le référentiel d'étude est le référentielle du laboratoire lié au référentiel terrestre. Le système n'est soumis qu'à son poids  $\vec{P} = m\vec{g}$ . On peut dessiner les conditions initiales en utilisant un système de coordonnées cartésien. Initialement le système est à l'origine  $O$  du repère, et il est affecté d'une vitesse initiale  $U_0$  dans une direction faisant un angle  $\theta_0$  avec l'axe  $(Ox)$  horizontal. L'accélération de la pesanteur  $\vec{g}$  est dirigée dans le sens opposé à l'axe  $(Oy)$ .



En utilisant le principe fondamental de la dynamique, il vient que

$$\begin{cases} m\ddot{x} = 0 \\ m\ddot{y} = -mg \\ m\ddot{z} = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} \ddot{x} = 0 \\ \ddot{y} = -g \\ \ddot{z} = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} \dot{x} = \dot{x}_0 = U_0 \cos \theta_0 \\ \dot{y} = -gt + y_0 = -gt + U_0 \sin \theta_0 \\ \dot{z} = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x = U_0 \cos \theta_0 t + x_0 \\ y = -\frac{1}{2}gt^2 + U_0 \sin \theta_0 t + y_0 \\ z = z_0 = 0 \end{cases}$$

soit

$$\begin{cases} x = U_0 \cos \theta_0 t \\ y = -\frac{1}{2}gt^2 + U_0 \sin \theta_0 t \\ z = 0 \end{cases}$$

On peut alors exprimer la variable de temps  $t$  en fonction de la coordonnée  $x$ , soit  $t = \frac{x}{U_0 \cos \theta_0}$ , et l'introduire dans l'équation horaire de la coordonnée  $y$

$$y(x) = -\frac{1}{2}g \frac{x^2}{U_0^2 \cos^2 \theta_0} + U_0 \sin \theta_0 \frac{x}{U_0 \cos \theta_0}$$

$$y(x) = -\frac{1}{2}g \frac{x^2}{U_0^2 \cos^2 \theta_0} + x \tan \theta_0.$$

On constate que **la trajectoire du système correspond à une parabole**, dessinée en rouge sur la figure précédente, et que **celle-ci est inscrite dans un plan défini par le vecteur vitesse initiale  $\vec{U}_0$  et la verticale**.

On peut calculer la portée  $L_0$  du tir, il s'agit de la valeur de  $x$  lorsque  $y = 0$ , soit

$$0 = -\frac{1}{2}g \frac{L_0^2}{U_0^2 \cos^2 \theta_0} + L_0 \tan \theta_0$$

soit

$$\frac{1}{2}g \frac{L_0^2}{U_0^2 \cos^2 \theta_0} = L_0 \tan \theta_0$$

$$L_0 = \frac{2U_0^2}{g} \cos^2 \theta_0 \tan \theta_0 = \frac{2U_0^2}{g} \cos \theta_0 \sin \theta_0.$$

45. Validez dimensionnellement l'expression de  $L_0$  obtenue et vérifiez-la sur des cas limites simples que vous choisirez.

Si on mène une analyse dimensionnelle sur  $L_0$  il vient que

$$[L_0] = \left[ \frac{2U_0^2}{g} \cos \theta_0 \sin \theta_0 \right] = \left[ \frac{2U_0^2}{g} \right] = \frac{(LT^{-1})^2}{LT^{-2}} = \frac{L^2T^{-2}}{LT^{-2}}$$

on constate que  $L_0$  est bien homogène à une distance

$$[L_0] = L.$$

46. La vitesse initiale étant fixée, quel angle  $\theta_0$  permet d'envoyer le volant le plus loin possible ?

Envoyer le volant le plus loin possible correspond à maximiser  $L_0$ , soit maximiser le produit  $\sin \theta_0 \cos \theta_0$ . Ces deux fonctions évolue de manière opposée mais sont égales pour  $\theta_0 = \pi/4$ , **c'est donc l'angle pour lequel leur produit est maximum**. Ainsi

$$L_{0,max} = \frac{2U_0^2}{g} \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{U_0^2}{g}.$$

On tient maintenant compte du freinage de l'air, modélisé en assimilant le volant à une sphère solide en mouvement dans un fluide. On écrit la force de freinage sous la forme  $\vec{F} = -\frac{1}{2}\rho S C_x U \vec{U}$  où  $\vec{U}$  est la vitesse du volant et  $U$  sa norme,  $\rho$  la masse volumique de l'air,  $S$  la surface de référence du volant, et  $C_x$  le coefficient de traînée constant.

47. Déterminer la dimension de  $C_x$ .

Si on mène une analyse dimensionnelle sur  $\vec{F}$  il vient que

$$[F] = N = MLT^{-2}.$$

D'après la relation donnée dans l'énoncée, la dimension de  $C_x$  est telle que

$$[C_x] = \left[ \frac{F}{\rho S U U} \right] = \frac{MLT^{-2}}{ML^{-3}L^2LT^{-1}LT^{-1}} = \frac{MLT^{-2}}{MLT^{-2}} = 0.$$

On constate que  $C_x$  est un coefficient sans dimension.

48. Écrire l'équation du mouvement du volant. Montrer qu'elle admet une solution particulière, correspondant à un mouvement rectiligne uniforme dont on exprimera la vitesse, notée  $U_\infty$ , en fonction des paramètres du problème.

On exprime le PFD de manière vectorielle, il vient que

$$\begin{aligned} m \frac{d\vec{U}}{dt} &= \vec{P} + \vec{F} \\ m \frac{d\vec{U}}{dt} &= m \vec{g} - \frac{1}{2} \rho S C_x U \vec{U} \\ m \frac{d\vec{U}}{dt} - \frac{1}{2} \rho S C_x U \vec{U} &= m \vec{g}. \end{aligned}$$

Il s'agit d'une équation différentielle du deuxième ordre. La solution particulière  $U_\infty$  de cette équation est de la même forme que le second membre, soit ici de forme constante, ainsi

$$\frac{d\vec{U}_\infty}{dt} = \vec{0}$$

donc

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \rho S C_x U_\infty \vec{U}_\infty &= m \vec{g}. \\ U_\infty \vec{U}_\infty &= \frac{2m}{\rho S C_x} \vec{g}. \end{aligned}$$

La vitesse limite est donc dans la même direction et le même sens que  $\vec{g}$ , soit selon  $-\vec{u}_y$ .

On obtient la valeur de  $U_\infty$  en appliquant le produit scalaire avec  $\vec{u}_y$  des deux côté de l'équation précédente, soit

$$U_\infty \vec{U}_\infty \cdot \vec{u}_y = \frac{2m}{\rho S C_x} \vec{g} \cdot \vec{u}_y.$$

$$-U_\infty^2 = -\frac{2mg}{\rho SC_x}$$

$$U_\infty = \sqrt{\frac{2mg}{\rho SC_x}}$$

Ainsi la vitesse limite du volant est

$$\vec{U}_\infty = -\sqrt{\frac{2mg}{\rho SC_x}} \vec{u}_y.$$

49. Récrire l'équation du mouvement en faisant notamment apparaître le rapport  $\vec{U}/U_\infty$ .

En utilisant l'équation obtenue plus tôt

$$m \frac{d\vec{U}}{dt} - \frac{1}{2} \rho SC_x U \vec{U} = m \vec{g}$$

on peut faire apparaître le terme  $U_\infty$

$$\frac{d\vec{U}}{dt} - \frac{1}{2m} \rho SC_x U \vec{U} = \vec{g}$$

$$\frac{d\vec{U}}{dt} - g \frac{\rho SC_x}{2mg} U \vec{U} = \vec{g}$$

$$\frac{d\vec{U}}{dt} - g \frac{1}{U_\infty^2} U \vec{U} = \vec{g}$$

$$\frac{d\vec{U}}{dt} - g \frac{U}{U_\infty} \frac{\vec{U}}{U_\infty} = \vec{g}.$$

50. À quelle condition sur  $U$  peut-on négliger la pesanteur ? On suppose dans toute la suite du problème que cette condition est initialement vérifiée.

Si on récrit l'équation précédente il vient que

$$\frac{d\vec{U}}{dt} = \vec{g} + g \frac{U}{U_\infty} \frac{\vec{U}}{U_\infty}.$$

On constate que l'on peut négliger la pesanteur si

$$\|\vec{g}\| \ll \|g \frac{1}{U_\infty^2} U \vec{U}\|$$

donc

$$1 \ll \frac{U^2}{U_\infty^2} \quad \text{ou} \quad U_\infty^2 \ll U^2.$$

On peut négliger la pesanteur dans la partie du mouvement où la valeur de **la vitesse du système est très supérieure à la vitesse limite**.

On peut montrer que la trajectoire est rectiligne et orientée dans le sens de la vitesse initiale  $U_0$ . Si on projette l'équation précédente sur la direction de la trajectoire il vient que

$$\frac{dU}{dt} = -g \frac{U^2}{U_\infty^2}.$$

51. Intégrer l'équation précédente pour obtenir  $U$  en fonction du temps (utiliser les deux différentielles de l'équation comme variables d'intégration de deux intégrales différentes).

On peut voir la dérivée temporelle comme un rapport de différentielle, on peut donc, à partir de l'équation donnée dans l'énoncé, écrire que

$$dU = -g \frac{U^2}{U_\infty^2} dt.$$

On regroupe la variable  $U$  et la différentielle  $dU$

$$\frac{1}{U^2} dU = -\frac{g}{U_\infty^2} dt$$

ce qui nous permet d'intégrer chaque côté de l'équation avec les bornes adéquates

$$\int_{U(t=0)}^{U(t)} \frac{1}{U^2} dU = -\frac{g}{U_\infty^2} \int_{t=0}^t dt$$

$$\left[ -\frac{1}{U} \right]_{U(t=0)}^{U(t)} = -\frac{g}{U_\infty^2} t$$

$$\frac{1}{U(t=0)} - \frac{1}{U(t)} = -\frac{g}{U_\infty^2} t$$

or à  $t = 0$ ,  $U(t = 0) = U_0$  donc

$$\frac{1}{U_0} - \frac{1}{U(t)} = -\frac{g}{U_\infty^2} t$$

soit

$$\frac{1}{U(t)} = \frac{1}{U_0} + \frac{g}{U_\infty^2} t$$

$$U(t) = \frac{1}{\frac{1}{U_0} + \frac{g}{U_\infty^2} t}.$$

52. En utilisant cette expression, déterminer et calculer le temps  $t_{1/2}$  pour lequel la vitesse est égale à la moitié de la vitesse initiale. Repérer le point correspondant sur la chronophotographie de la Figure 12. Vérifier, par une mesure que l'on expliquera, que la vitesse en ce point est bien approximativement la moitié de la vitesse initiale.

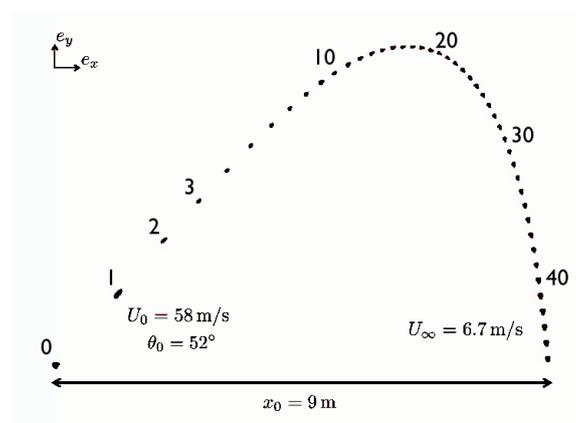


Figure 12: Positions successives d'un volant de badminton allant de la gauche vers la droite, enregistrées toutes les 50 ms. Le premier point, repéré par le chiffre 0, correspond au lancer à  $t = 0$ .

Selon l'énoncé on peut écrire

$$U(t_{1/2}) = \frac{U_0}{2} = \frac{1}{\frac{1}{U_0} + \frac{g}{U_\infty^2} t_{1/2}}$$

soit

$$\frac{1}{2} = \frac{U_0}{U_0 + \frac{gU_0}{U_\infty^2} t_{1/2}}$$

$$2 = 1 + \frac{gU_0}{U_\infty^2} t_{1/2}$$

$$\frac{gU_0}{U_\infty^2} t_{1/2} = 1$$

soit finalement

$$t_{1/2} = \frac{U_\infty^2}{gU_0}.$$

**A.N.**

$$t_{1/2} = \frac{6,7^2}{9,8 \times 58} = 79 \text{ ms.}$$

Sur la chronophotographie, pour obtenir  $t_{1/2}$ , on repère le point à partir duquel la distance parcourue entre deux points est la moitié de la distance entre les deux premiers points. C'est entre le point 2 et le point 3. Donc, **d'après la chronophotographie  $t_{1/2}$  est compris entre 100 et 150 ms, ce qui correspond au calcul précédent en ordre de grandeur.**

53. Toujours dans le cadre de l'approximation de la question 50 montrer que l'expression donnant la distance horizontale  $x(t)$  parcourue au temps  $t$  est

$$x(t) = \cos \theta_0 \frac{U_\infty^2}{g} \ln \left( 1 + \frac{gU_0 t}{U_\infty^2} \right).$$

Si on projette la vitesse  $\vec{U}$  sur l'axe  $(Ox)$  il vient que

$$U_x(t) = \vec{U}(t) \cdot \vec{u}_x = U(t) \cos \theta(t)$$

comme la trajectoire est considérée comme rectiligne  $\theta_0 = \theta(t)$  donc

$$U_x(t) = U(t) \cos \theta(t).$$

On sait que la composante de la vitesse selon l'axe  $(Ox)$  correspond au rapport de la différentielle de coordonnée selon  $x$  et la différentielle de temps, soit

$$U_x(t) = \frac{dx}{dt} = U(t) \cos \theta_0$$

donc

$$dx = U(t) \cos \theta_0 dt.$$

On peut intégrer cette expression entre l'instant initial et un instant  $t$  quelconque

$$\int_{x(t=0)}^{x(t)} dx = \int_{t=0}^t U(t) \cos \theta_0 dt$$

$$x(t) - x(t=0) = \cos \theta_0 \int_{t=0}^t \frac{1}{\frac{1}{U_0} + \frac{g}{U_\infty^2} t} dt.$$

On sait qu'à  $t = 0$ ,  $x(t = 0) = 0$ , et que la dérivée temporelle du dénominateur de la fraction du terme de droite de l'équation est

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{1}{U_0} + \frac{g}{U_\infty^2} t \right) = \frac{g}{U_\infty^2}.$$

On peut donc réécrire la fraction

$$\frac{1}{\frac{1}{U_0} + \frac{g}{U_\infty^2} t} = \frac{U_\infty^2}{g} \frac{\frac{g}{U_\infty^2}}{\frac{1}{U_0} + \frac{g}{U_\infty^2} t} = \frac{U_\infty^2}{g} \frac{\frac{d}{dt} \left( \frac{1}{U_0} + \frac{g}{U_\infty^2} t \right)}{\frac{1}{U_0} + \frac{g}{U_\infty^2} t}$$

et si on introduit la fonction  $f(t) = \frac{1}{U_0} + \frac{g}{U_\infty^2} t$ , on peut écrire que

$$x(t) = \cos \theta_0 \int_{t=0}^t \frac{U_\infty^2}{g} \frac{\frac{df(t)}{dt}}{f(t)} dt$$

soit

$$x(t) = \frac{U_\infty^2}{g} \cos \theta_0 \int_{t=0}^t \frac{\frac{df(t)}{dt}}{f(t)} dt = \frac{U_\infty^2}{g} \int_{f(t=0)}^{f(t)} \frac{df(t)}{f(t)} dt.$$

D'après les données fournies, il vient que

$$x(t) = \frac{U_\infty^2}{g} \cos \theta_0 \ln \left( \frac{f(t)}{f(t=0)} \right)$$

soit

$$x(t) = \frac{U_\infty^2}{g} \cos \theta_0 \ln \left( \frac{\frac{1}{U_0} + \frac{g}{U_\infty^2} t}{\frac{1}{U_0}} \right) = \frac{U_\infty^2}{g} \cos \theta_0 \ln \left( \frac{U_0}{U_0} + \frac{gU_0}{U_\infty^2} t \right)$$

donc

$$x(t) = \cos \theta_0 \frac{U_\infty^2}{g} \ln \left( 1 + \frac{gU_0 t}{U_\infty^2} \right).$$

54. Obtenir  $x$  en fonction de  $U$ .

On a montré que

$$U(t) = \frac{1}{\frac{1}{U_0} + \frac{g}{U_\infty^2} t}$$

donc

$$1 + \frac{gU_0 t}{U_\infty^2} = \frac{U_0}{U(t)}$$

donc l'équation précédente devient

$$x(t) = \cos \theta_0 \frac{U_\infty^2}{g} \ln \left( 1 + \frac{gU_0 t}{U_\infty^2} \right) = \cos \theta_0 \frac{U_\infty^2}{g} \ln \left( \frac{U_0}{U(t)} \right)$$

ce qui nous permet d'exprimer  $x$  selon en fonction de  $U$ , soit

$$x(U) = \cos \theta_0 \frac{U_\infty^2}{g} \ln \left( \frac{U_0}{U(t)} \right).$$

55. On suppose que l'approximation de la question 50 cesse d'être valable lorsque la composante verticale de la force de freinage est égale au poids. Quelle est l'expression de  $U$  à cet instant ? En déduire la distance horizontale parcourue  $L$ .

La composante verticale de la force de freinage est dans notre repère

$$F_y = -\frac{1}{2}\rho SC_x U \vec{U} \cdot \vec{u}_y = -\frac{1}{2}\rho SC_x U^2 \sin \theta(t)$$

or comme le mouvement est rectiligne  $\theta(t) = \theta_0$  donc

$$F_y = -\frac{1}{2}\rho SC_x U^2 \sin \theta_0.$$

Cette composante s'annule lorsqu'elle est égale au poids, soit

$$-\frac{1}{2}\rho SC_x U^2 \sin \theta_0 = -mg$$

donc pour

$$U = \sqrt{\frac{2mg}{\rho SC_x \sin \theta_0}} = \frac{U_\infty}{\sqrt{\sin \theta_0}}.$$

On obtient la distance  $L$  parcourue jusqu'à ce que la composante verticale de la force de freinage soit égale au poids, en introduisant la valeur précédente de  $U$  dans l'expression de  $x(U)$ , soit

$$x(U) = \cos \theta_0 \frac{U_\infty^2}{g} \ln \left( \frac{U_0}{U(t)} \right) = \cos \theta_0 \frac{U_\infty^2}{g} \ln \left( \frac{U_0}{U_\infty} \sqrt{\sin \theta_0} \right)$$

ainsi

$$L = \cos \theta_0 \frac{U_\infty^2}{g} \ln \left( \frac{U_0}{U_\infty} \sqrt{\sin \theta_0} \right).$$

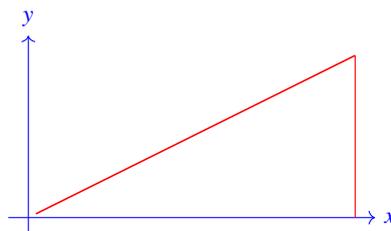
On modélise la trajectoire du volant en distinguant trois régimes successifs : (1) le régime que l'on vient d'étudier, durant lequel l'accélération de la pesanteur est négligeable ; (2) un régime intermédiaire ; (3) un régime limite durant lequel l'accélération du volant est négligeable.

56. Localiser sur la chronophotographie le régime limite ainsi défini, en justifiant précisément votre réponse.

Quand l'accélération du volant est négligeable, sa vitesse est constante : les points sur la chronophotographie sont régulièrement espacés. Et normalement, le mouvement est vertical. On lit sur la figure que cela se produit à partir du quarantième point, donc pour  $t > 2$  s.

57. Une approximation de la trajectoire consiste à oublier la partie correspondant au régime intermédiaire. Dessiner la trajectoire obtenue dans cette approximation.

Si on néglige le régime intermédiaire, la trajectoire a l'allure suivante



58. Donner l'expression littérale de la portée du tir dans cette approximation. Comment se compare-t-elle à la portée en l'absence de freinage, déterminée à la question 44 ?

On voit que dans cette approximation, la portée du tir correspond à la distance  $L$  obtenue plus tôt, soit

$$L = \cos \theta_0 \frac{U_\infty^2}{g} \ln \left( \frac{U_0}{U_\infty} \sqrt{\sin \theta_0} \right).$$

On peut comparer cette portée à la portée correspondant à la distance  $L_0$  calculée plus tôt

$$\frac{L}{L_0} = \cos \theta_0 \frac{U_\infty^2}{g} \ln \left( \frac{U_0}{U_\infty} \sqrt{\sin \theta_0} \right) \frac{g}{2U_0^2 \cos \theta_0 \sin \theta_0}$$

$$\frac{L}{L_0} = \frac{U_\infty^2}{2U_0^2 \sin \theta_0} \ln \left( \frac{U_0}{U_\infty} \sqrt{\sin \theta_0} \right)$$

comme nous nous plaçons dans le cas où nous négligeons la pesanteur dans la première partie de la trajectoire, nous considérons que  $U_\infty^2 \ll U^2$ , donc  $U_\infty^2 \ll U_0^2$  donc

$$\frac{U_\infty^2}{2U_0^2 \sin \theta_0} \ll 1$$

et

$$\frac{U_0}{U_\infty} \sqrt{\sin \theta_0} \gg 1$$

donc

$$\ln \left( \frac{U_0}{U_\infty} \sqrt{\sin \theta_0} \right) > 0$$

donc

$$\frac{L}{L_0} \ll 1.$$

La portée du tir en tenant compte des forces de frottement est très inférieure à la portée du tir sans ces forces.

59. Estimer numériquement la portée du tir. Comparer le résultat avec la valeur indiquée sur la chronophotographie.

**A.N.**

$$L = \cos(52^\circ) \frac{6,7^2}{9,8} \ln \left( \frac{58}{6,7} \sqrt{\sin(52^\circ)} \right) = 5,7 \text{ m.}$$

On constate que **cette valeur est inférieure à la portée du tir sur la chronophotographie** de 9 m. Cela s'explique par le fait que le régime transitoire sur la figure n'est pas négligeable.