

DEVOIR SURVEILLÉ N°4

Classe MPI - Promotion 2025



Composition de Physique

Durée : 4 heures

Le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction. Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

- Utiliser uniquement un stylo noir ou bleu foncé pour la rédaction de votre composition ; d'autres couleurs peuvent être utilisées, mais exclusivement pour les schémas et la mise en évidence des résultats.
- Écrire le mot FIN à la fin de votre composition.

Les calculatrices sont autorisées.

Les différentes parties sont indépendantes.

► Données numériques :

→ **Constantes :** $R = 8,31 \text{ J}\cdot\text{mol}^{-1}\cdot\text{K}^{-1}$ $\mathcal{N}_a = 6,022 \times 10^{23} \text{ mol}^{-1}$ $\mathcal{F} = 96\,500 \text{ C}\cdot\text{mol}^{-1}$
 $c = 3,00 \times 10^8 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$ $h = 6,63 \times 10^{-34} \text{ J}\cdot\text{s}^{-1}$ $G = 6,67 \times 10^{-11} \text{ m}^3\cdot\text{kg}^{-1}\cdot\text{s}^{-2}$
 $\epsilon_0 = 8,85 \times 10^{-12} \text{ F}\cdot\text{m}^{-1}$ $\mu_0 = 4\pi 10^{-7} \text{ H}\cdot\text{m}^{-1}$ $k_B = 1,38 \times 10^{-23} \text{ J}\cdot\text{K}^{-1}$
 $e = 1,602 \times 10^{-19} \text{ C}$

→ **La planète Terre :** $g = 9,81 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$

→ **L'atome :** $m_{\text{nucléon}} = 1,7 \times 10^{-27} \text{ kg}$ $m_{\text{électron}} = 9,1 \times 10^{-31} \text{ kg}$

► Systèmes d'unité et conversion :

→ **Conversion :** $1 \text{ eV} = 1,602 \times 10^{-19} \text{ J}$ $T(\text{K}) = t(^{\circ}\text{C}) + 273$

► Formulaire d'analyse réelle :

→ **Trigonométrie :** $\cos(a - b) = \cos(a) \cos(b) + \sin(a) \sin(b)$

→ **Dérivation :** $(g \circ f(x))' = f'(x) \times g'(f(x))$ $\arcsin(x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

► Formulaire d'analyse vectorielle :

→ **Opérateurs en coordonnées cylindriques (r, θ, z) :**

→ **Gradient :** $\vec{\text{grad}} U = \frac{\partial U}{\partial r} \vec{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial U}{\partial \theta} \vec{e}_\theta + \frac{\partial U}{\partial z} \vec{e}_z$

→ **Divergence :** $\text{div} \vec{U} = \frac{1}{r} \frac{\partial(r U_r)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial U_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial U_z}{\partial z}$

→ **Rotationnel :** $\vec{\text{rot}} \vec{U} = \left(\frac{1}{r} \frac{\partial(U_z)}{\partial \theta} - \frac{\partial(U_\theta)}{\partial z} \right) \vec{u}_r + \left(\frac{\partial(U_r)}{\partial z} - \frac{\partial(U_z)}{\partial r} \right) \vec{u}_\theta + \left(\frac{1}{r} \frac{\partial(r U_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial(U_r)}{\partial \theta} \right) \vec{u}_z$

Vis-à-vis de la propagation des ondes électromagnétiques, les premières couches de l'atmosphère peuvent être assimilées au vide. À partir de 80 km d'altitude, dans l'ionosphère, il y a présence d'un gaz ionisé, très dilué, appelé plasma. Le vide et le plasma ont pour permittivité diélectrique ϵ_0 et pour perméabilité magnétique μ_0 .

Propagation dans le vide

L'onde de communication envoyée depuis la surface de la Terre vers le satellite est supposée plane, progressive selon l'axe (Ox) et harmonique de pulsation ω et de vecteur d'onde $k\vec{u}_x$. En notation complexe, son champ électrique s'écrit

$$\vec{E}(M, t) = E_0 e^{i(\omega t - kx)} \vec{u}_y$$

où $i^2 = -1$ et E_0 est un nombre qui peut être supposé réel grâce à un choix judicieux de l'origine des temps.

1. Rappeler les équations de Maxwell dans le vide et établir l'équation de propagation du champ électrique dans le vide, en l'absence de charge et de courant.
2. Établir la relation de dispersion de l'onde de champ électrique complexe $\vec{E}(M, t)$ dans le vide. Le vide est-il un milieu dispersif ?
3. Déterminer, en notation complexe, le champ magnétique $\vec{B}(M, t)$ associé au champ électrique $\vec{E}(M, t)$.

Propagation dans un plasma

L'onde de communication doit ensuite traverser l'ionosphère. Le plasma ionosphérique se caractérise par une densité volumique d'électrons libres n_e de charge $-e$, de masse m_e , et une densité volumique de cations $n_c = n_e$ de charge $+e$, de masse m_c ; l'ensemble est donc localement neutre. L'onde étudiée est maintenant notée

$$\vec{E}(M, t) = E_0 e^{i(\omega t - kx)} \vec{u}_y$$

où on pose $k = k' + ik''$. On considère que n_c , n_e , E_0 , ω , k' , et k'' sont réels, uniformes et constants. De plus, on s'intéresse uniquement à la situation où $k' \geq 0$ et $k'' \leq 0$. Dans le plasma, les électrons et les ions sont soumis à la force de Lorentz due aux champs électrique et magnétique de l'onde. On négligera toute autre action et on supposera, en outre, que les particules possèdent des vitesses très petites devant c .

4. En admettant que le rapport des amplitudes du champ électrique et du champ magnétique dans le plasma soit assimilable à celui dans le vide, montrer que les effets de la partie magnétique de la force de Lorentz sont négligeables devant ceux de la partie électrique.
5. En admettant que l'accélération d'un électron du plasma soit donnée par $\frac{\partial \vec{v}_e}{\partial t}$, déterminer l'expression du vecteur vitesse complexe $\vec{v}_e$ d'un électron, positionné en M à l'instant t , en fonction de m_e , c , ω et $\vec{E}(M, t)$. De la même façon, donner l'expression du vecteur vitesse $\vec{v}_c$ d'un cation. Que peut-on dire de $\|\vec{v}_c\|$ par rapport à $\|\vec{v}_e\|$?
6. Justifier qu'il existe dans le plasma une densité de courant $\vec{j}(M, t)$. En déduire, en utilisant les résultats précédents, que l'expression de la conductivité complexe du plasma notée $\underline{\gamma}$ s'écrit de façon approchée

$$\underline{\gamma} \sim -i \frac{n_e e^2}{m_e \omega}$$

7. Calculer la puissance volumique moyenne fournie par le champ électromagnétique aux électrons libres. Commenter.
8. Établir l'équation de propagation du champ $\vec{E}(M, t)$ dans le plasma

9. En déduire l'expression de k^2 dans le plasma. Mettre en évidence une pulsation caractéristique, dite pulsation plasma, notée ω_P dont on fournira l'expression en fonction des grandeurs utiles parmi c , ϵ_0 , e , m_e et n_e . On suppose dans un premier temps $\omega < \omega_P$.

10. Expliciter l'expression de k et en déduire les expressions des champs réels $\vec{E}(M, t)$ et $\vec{B}(M, t)$. On fera apparaître une épaisseur caractéristique δ_P que l'on définira et que l'on exprimera en fonction de ω , ω_P et c .

11. Représenter l'évolution spatiale à un instant quelconque des profils des champs électrique et magnétique de l'onde et décrire leur évolution temporelle.

12. Calculer la valeur moyenne du vecteur de Poynting associé à cette onde. Caractériser l'onde obtenue. On suppose désormais que $\omega > \omega_P$.

13. De la même façon que pour le premier cas, expliciter l'expression de k . En déduire les expressions des champs réels $\vec{E}(M, t)$ et $\vec{B}(M, t)$, puis établir l'expression de la valeur moyenne du vecteur de Poynting.

14. Déterminer l'expression de la vitesse de phase v_ϕ ainsi que celle de la vitesse de groupe v_g en fonction de ω_P , ω et c . Tracer v_g et v_ϕ en fonction de ω . Le milieu est-il dispersif ? Comparer ces vitesses à c et commenter. En réalité, la densité électronique n_e dans l'ionosphère varie dans le temps et en fonction de l'altitude. La figure suivante présente son évolution.

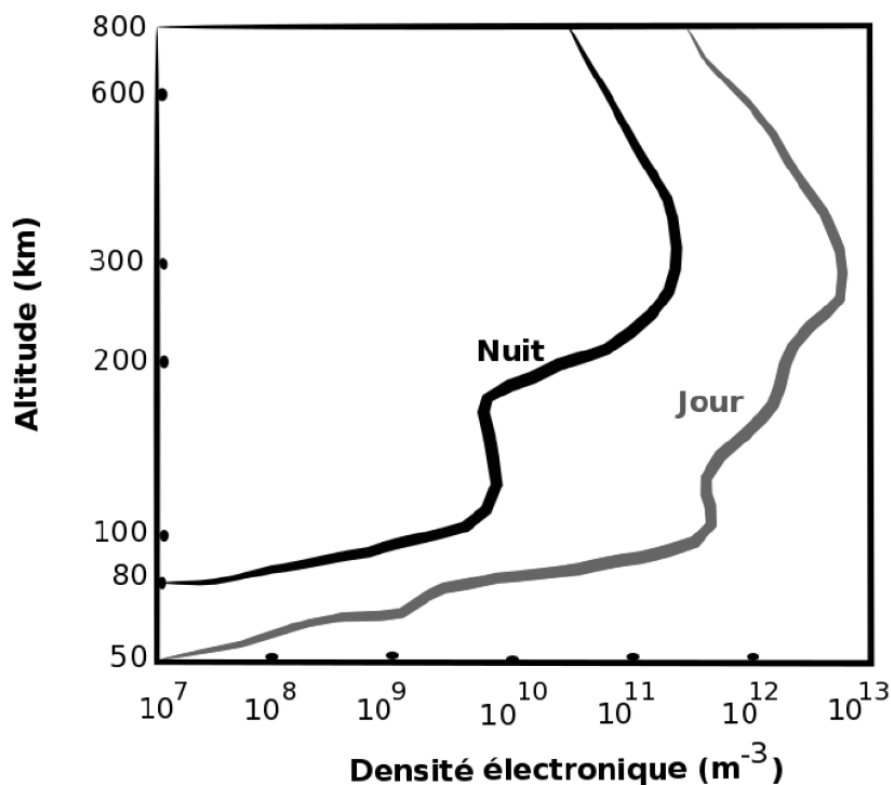


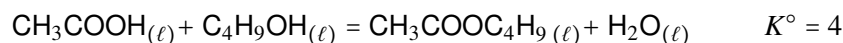
FIGURE 1 – Évolution de la densité électronique dans l'ionosphère en fonction de l'altitude (d'après Culture Sciences - Physique, ENS Lyon)

15. Calculer la valeur numérique de la fréquence minimale que doit posséder l'onde pour atteindre un satellite relais géostationnaire à partir de la surface de la Terre. À quel domaine du spectre électromagnétique appartient cette fréquence ?

Partie II - Synthèse d'un ester

(Baccalauréat général)

On réalise la synthèse de l'éthanoate de butyle en faisant réagir de l'acide éthanoïque CH_3COOH sur le butan-1-ol. On donne l'équation chimique de la réaction et la constante d'équilibre associée :



Les différents liquides sont miscibles et l'on identifiera l'activité des différentes espèces chimiques à leur fraction molaire dans le mélange.

Le protocole consiste à introduire dans un ballon 58,0 mL d'acide éthanoïque pur avec 92,0 mL de butan-1-ol et quelques gouttes d'acide sulfurique concentré. Le milieu réactionnel obtenu est chauffé à reflux et on suit l'avancement de la réaction en prélevant régulièrement quelques millilitres du mélange. Les prélèvements sont plongés dans un bain eau-glace avant d'y doser l'acide éthanoïque à l'aide d'une solution aqueuse de soude.

16. Donner le nom et la formule chimique brute de chacune des espèces en jeu dans la réaction étudiée.

17. Donner la définition d'une phase et justifier que le milieu réactionnel n'en comporte qu'une seule. Comment qualifie-t-on ce type de mélange ?

18. Déterminer les quantités de matières initiales des deux réactifs.

Au bout de 30 min, on détermine qu'il reste 0,762 mol d'acide éthanoïque dans le milieu réactionnel.

19. Calculer le quotient de réaction à l'instant $t = 30$ min. Le système est-il à l'équilibre ?

20. Déterminer l'avancement maximal ξ_{max} et l'avancement à l'équilibre ξ_{eq} de la réaction. En déduire une valeur du rendement de la synthèse.

Lorsqu'un matériau supraconducteur est soumis à un champ magnétique uniforme, le supraconducteur expulse les lignes de champ magnétique. On parle d'effet Meissner.

Comparaison à l'électromagnétisme classique

On se propose de réaliser une expérience mettant en évidence ce phénomène (figure 2). On pose un aimant permanent sur un matériau supraconducteur. On fait alors baigner le supraconducteur dans du diazote liquide pour abaisser sa température en-dessous de sa température critique. Il devient alors supraconducteur et se met à rejeter les lignes de champ magnétique de l'aimant : le champ magnétique à l'intérieur du supraconducteur devient nul et l'aimant se met alors à léviter.

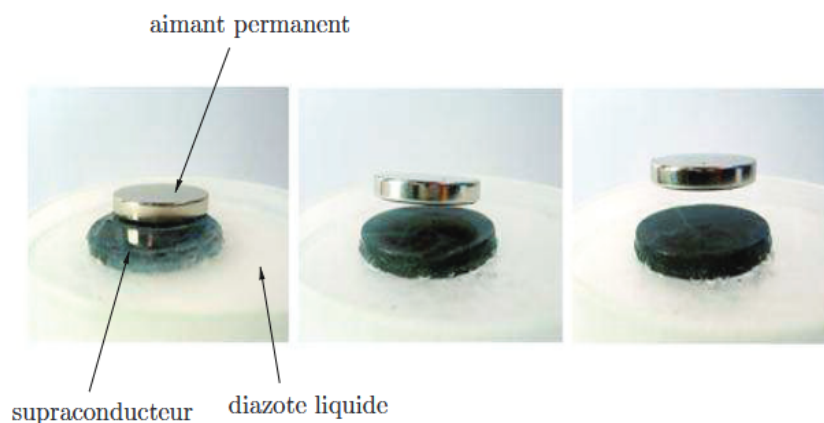


FIGURE 2 – Mise en évidence expérimentale de l'effet Meissner réalisée par J. Bobroff (LPS)

D'un point de vue microscopique, le supraconducteur crée des courants électriques qui s'opposent complètement à ce champ magnétique.

21. En l'absence de supraconduction et de basses températures, à quelle condition peut-on observer un phénomène d'induction ?

22. Au vu de l'expérience proposée, quelle est la différence fondamentale avec le phénomène d'induction évoqué précédemment.

L'effet Meissner ne peut pas être décrit en utilisant la théorie électromagnétique classique. Cependant, d'un point de vue purement électrique, le supraconducteur présente une résistance électrique rigoureusement nulle et ressemble donc à un conducteur électrique parfait.

Dans les questions suivantes, on s'intéresse à un conducteur électrique de conductivité γ soumis un champ électrique $\vec{E}$.

23. Rappeler la loi d'Ohm locale.

24. Qu'appelle-t-on conducteur parfait ? Que peut-on en déduire sur le champ électrique en son sein ?

25. À partir d'une des équations de Maxwell, en déduire que le champ magnétique $\vec{B}$ à l'intérieur du conducteur parfait est forcément un champ stationnaire.

On se propose de modéliser le supraconducteur par une boucle de courant circulaire de rayon R , parcourue par un courant d'intensité I . On veut estimer l'ordre de grandeur de l'intensité I nécessaire pour faire léviter l'aimant d'une hauteur h , estimée d'après la figure 2.

26. Donner l'expression du moment magnétique $\vec{\mu}$ de la boucle de courant.

En présence d'un champ magnétique $\vec{B}$, la boucle de courant va subir une force

$$\vec{F} = \text{grad}(\vec{\mu} \cdot \vec{B})$$

L'aimant permanent possède un moment magnétique $\mathcal{M}_1 = 10 \text{ A.m}^2$. On donne l'expression du champ magnétique créé par un moment magnétique $\vec{\mathcal{M}}$ à une distance $\vec{OM} = r\vec{e}_r$ de son centre :

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi r^3} \left[3(\vec{\mathcal{M}} \cdot \vec{e}_r)\vec{e}_r - \vec{\mathcal{M}} \right]$$

27. Exprimer l'ordre de grandeur du champ magnétique créé par l'aimant ressenti au niveau du supraconducteur.

28. Estimer par un raisonnement simple l'ordre de grandeur de l'intensité I nécessaire pour observer la lévitation à une hauteur h de l'aimant de la figure 2. On prendra une masse de 40 g pour l'aimant permanent.

Champ magnétique dans le supraconducteur

Pour expulser le champ magnétique, ce dernier doit être rigoureusement nul dans le supraconducteur contrairement à un conducteur parfait où on a seulement un champ stationnaire, a priori non nul comme vu précédemment. Pour expliquer cette différence, les frères London (1935) ont postulé que les électrons dans un supraconducteur ne suivent pas les mêmes lois que ceux du conducteur parfait. Ils montrèrent que la densité volumique de courant $\vec{j}$ dans le supraconducteur s'écrit

$$\text{rot } \vec{j} = -\frac{1}{\mu_0 \lambda^2} \vec{B}$$

avec $\vec{B}$ le champ magnétique dans le supraconducteur, λ une constante telle que $\lambda = \sqrt{m/(\mu_0 n e^2)}$ où m est la masse de l'électron, n la densité d'électrons supraconducteurs, e la charge de l'électron et μ_0 la perméabilité magnétique du vide.

29. Montrer que λ est homogène à une longueur.

30. Déterminer la valeur numérique de λ pour $n = 10^{29} \text{ m}^{-3}$.

Dans toute la suite de cette partie, on se place en régime permanent.

31. Montrer que l'équation différentielle vérifiée par le champ magnétique $\vec{B}$ dans le supraconducteur s'écrit alors

$$\Delta \vec{B} = \frac{1}{\lambda^2} \vec{B}$$

On s'intéresse maintenant à un supraconducteur d'épaisseur $2d$ selon la direction (Ox) et infini selon (Oy) et (Oz) . On choisit l'origine du repère orthonormé direct $(Oxyz)$ au milieu de plaque. La plaque supérieure (respectivement inférieure) se situe en $x = d$ (respectivement $x = -d$). Cette plaque est plongée dans un champ magnétique qui, en l'absence de plaque, est statique et uniforme tel que $\vec{B}_{\text{ext}} = B_{\text{ext}} \vec{e}_z$. On supposera que le champ magnétique est continu au niveau de chaque interface $x = \pm d$. Le système est représenté ci-dessous (figure 3).

32. Montrer que le champ magnétique dans le supraconducteur est de la forme $\vec{B} = B(x) \vec{e}_z$.

33. Pour une équation différentielle du type $f'' - f = 0$, les solutions générales peuvent se mettre sous la forme $f(\xi) = A \text{ch}(\xi) + C \text{sh}(\xi)$ où ch et sh sont respectivement les cosinus et sinus hyperbolique rappelés en annexe. Résoudre l'équation différentielle vérifiée par le champ magnétique et établir que

$$B(x) = B_{\text{ext}} \frac{\text{ch}(\alpha)}{\text{ch}(\beta)}$$

avec α et β des expressions à déterminer en fonction de x, d et λ .

34. Citer un autre phénomène électromagnétique décrit par une équation formellement équivalente. En déduire la signification physique de λ .

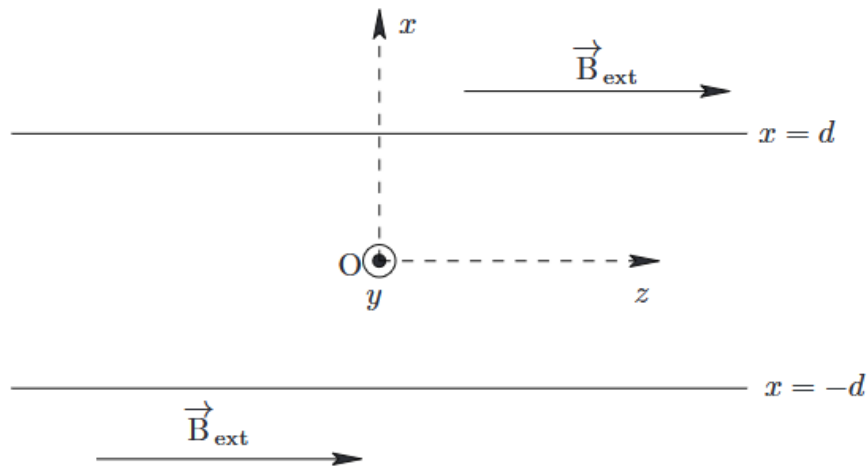


FIGURE 3 – Schéma du supraconducteur dans le champ magnétique

- 35.** Tracer l'allure de $B(x)$ pour $d = \lambda$ et $d = 50\lambda$. En déduire à quelle condition sur d le champ magnétique moyen peut être considéré comme nul à l'intérieur du supraconducteur (effet Meissner).
- 36.** À partir de l'expérience de la partie A (figure 2) et de la question précédente, vérifier si la condition précédente est bien vérifiée.
- 37.** Calculer l'expression littérale de la densité de courant volumique $\vec{j} = j(x)\vec{e}_y$. densité de courant dans le supraconducteur ?
- 38.** Estimer l'intensité du courant dans le supraconducteur pour un champ magnétique extérieur de 5×10^{-3} T. Comparer cette valeur à celle de la dernière question de la sous-partie précédente. Conclure.

- Fin du sujet -