

DEVOIR LIBRE N°3

Classe MPI - Promotion 2025



Annales de Mécanique Quantique

Les différentes parties sont indépendantes.

► Données numériques :

~> **Constantes :** $R = 8,31 \text{ J}\cdot\text{mol}^{-1}\cdot\text{K}^{-1}$ $N_a = 6,022 \times 10^{23} \text{ mol}^{-1}$ $\mathcal{F} = 96\,500 \text{ C}\cdot\text{mol}^{-1}$
 $c = 3,00 \times 10^8 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$ $h = 6,63 \times 10^{-34} \text{ J}\cdot\text{s}^{-1}$ $G = 6,67 \times 10^{-11} \text{ m}^3\cdot\text{kg}^{-1}\cdot\text{s}^{-2}$
 $\epsilon_0 = 8,85 \times 10^{-12} \text{ F}\cdot\text{m}^{-1}$ $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \text{ H}\cdot\text{m}^{-1}$ $k_B = 1,38 \times 10^{-23} \text{ J}\cdot\text{K}^{-1}$
 $e = 1,602 \times 10^{-19} \text{ C}$

~> **La planète Terre :** $g = 9,81 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$

~> **L'atome :** $m_{\text{nucléon}} = 1,7 \times 10^{-27} \text{ kg}$ $m_{\text{électron}} = 9,1 \times 10^{-31} \text{ kg}$

► Systèmes d'unité et conversion :

~> **Conversion :** $1 \text{ eV} = 1,602 \times 10^{-19} \text{ J}$ $T(\text{K}) = t(^{\circ}\text{C}) + 273$

► Formulaire d'analyse réelle :

~> **Trigonométrie :** $\cos(a - b) = \cos(a)\cos(b) + \sin(a)\sin(b)$

~> **Dérivation :** $(g \circ f(x))' = f'(x) \times g' \circ f(x)$ $\arcsin(x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

► Formulaire d'analyse vectorielle :

~> **Opérateurs en coordonnées cylindriques (r, θ, z) :**

~> **Gradient :** $\vec{\text{grad}} U = \frac{\partial U}{\partial r} \vec{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial U}{\partial \theta} \vec{e}_\theta + \frac{\partial U}{\partial z} \vec{e}_z$

~> **Divergence :** $\text{div} \vec{U} = \frac{1}{r} \frac{\partial(rU_r)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial U_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial U_z}{\partial z}$

~> **Rotationnel :** $\vec{\text{rot}} \vec{U} = \left(\frac{1}{r} \frac{\partial(U_z)}{\partial \theta} - \frac{\partial(U_\theta)}{\partial z} \right) \vec{u}_r + \left(\frac{\partial(U_r)}{\partial z} - \frac{\partial(U_z)}{\partial r} \right) \vec{u}_\theta + \left(\frac{1}{r} \frac{\partial(r U_\theta)}{\partial r} - \frac{1}{r} \frac{\partial(U_r)}{\partial \theta} \right) \vec{u}_z$

Partie I - Particule engagée dans un puits infini

(CCINP MP - 2016)

Nous allons étudier dans cette partie une particule dans le cadre de la mécanique quantique. Cette particule de masse m se déplace sur l'axe des x dans un potentiel $U(x)$ tel que $U(x) = 0$ pour $a > x > -a$ et $U(x) \rightarrow \infty$ pour $x > a$ et $x < -a$ avec $a > 0$. On note $\varphi(x)$ une fonction d'onde stationnaire de la particule et E son énergie associée. On pose $k = \sqrt{2mE/\hbar^2}$.

1. Rappeler l'équation de Schrödinger.
2. Justifier que pour les domaines $x < -a$ et $x > a$, la seule solution possible est $\varphi(x) = 0$. Commenter.
3. À partir de la recherche des solutions de l'équation de Schrödinger, déterminer les valeurs des niveaux d'énergie E dans le domaine $-a < x < a$. Commenter.
4. Exprimer les fonctions d'onde. Commenter.
5. Représenter la fonction d'onde pour les deux premiers niveaux.
6. En appliquant l'inégalité d'Heisenberg, justifier que l'énergie ne peut pas être nulle.
7. Comparer à la situation classique d'une particule dans une cuvette de potentiel.
8. Que vaut la valeur moyenne $\langle x \rangle$ de la position de la particule dans l'état fondamental ?

Le calcul de la valeur moyenne de la distance au centre du puits $\sqrt{\langle x^2 \rangle}$ conduit à :

$$\sqrt{\langle x^2 \rangle} = a/\sqrt{3}$$

9. En déduire l'écart-type de position.
10. Quel est l'ordre de grandeur de l'écart-type en impulsion ? Est-ce en accord avec l'ordre de grandeur de l'énergie du niveau fondamental ?

Partie II - Interférence d'ondes de matière

(CCINP MP - 2024)

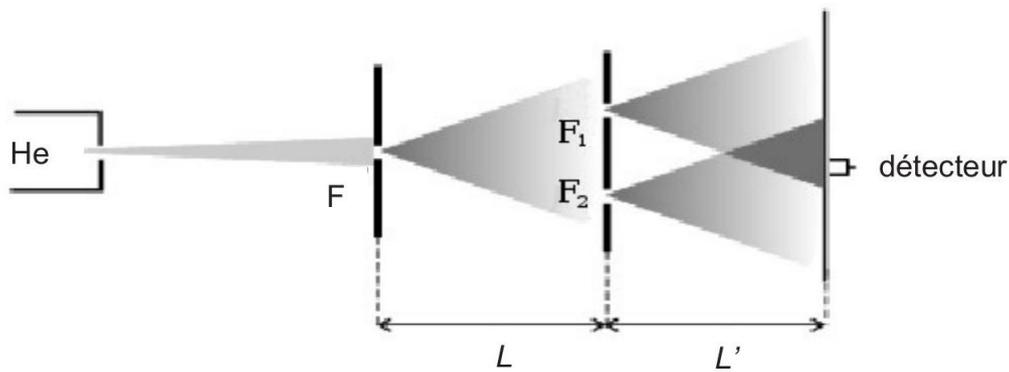
11. Après avoir rappelé la formule de De Broglie, établir la longueur d'onde associée à un faisceau d'électrons accélérés par une différence de potentiel égale à $U = 100$ V.
12. Pourquoi un microscope électronique a-t-il un meilleur pouvoir de résolution qu'un microscope optique conventionnel ?

Après la réalisation d'interférences avec des électrons et des neutrons, des expériences " historiques " d'interférences avec des atomes ont été réalisées en 1991 avec de l'Hélium par Carnel et Mlynek à Constance et en 1992 avec du Néon par Shimizu et Takuma à Tokyo.

13. Après avoir cité le théorème d'équipartition de l'énergie, établir la valeur de la vitesse quadratique moyenne u d'un atome de masse m à la température T . Indiquer les valeurs manquantes du tableau ci-dessous (cellule notée « ? »).

Atome	Masse atomique en $\text{g} \cdot \text{mol}^{-1}$	Vitesse u à $T_1 = 295$ K	Vitesse u à $T_2 = 83$ K	Vitesse u à $T_3 = 2,5$ mK
Hélium	4	?	$225 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$	
Néon	20			?

Dans l'expérience de 1991 (figure ci-dessous), la source est un dispositif d'émission thermique d'atomes d'hélium He suivie d'une fente diaphragme F . Le montage est celui d'une division du front d'onde de type fentes d'Young. Le plan de la double fente est placé à la distance $L = 64$ cm de la fente F et à la distance $L' = 64$ cm du plan le long duquel est déplacé le détecteur qui comptabilise les impacts de particules. Les atomes d'hélium sont émis soit à la température $T_1 = 295$ K, soit à la température $T_2 = 83$ K.



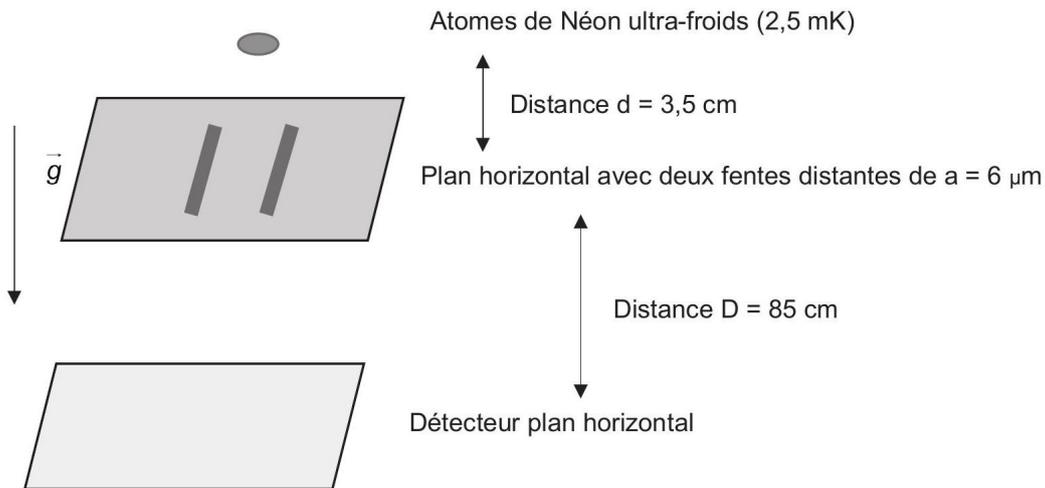
On admet qu'il y a diffraction du faisceau de particules au passage par F , puis par les fentes F_1 et F_2 , c'est-à-dire ouverture angulaire du faisceau d'un angle voisin de $2\lambda/\varepsilon$ avec ε la largeur de fente. La largeur de la fente F vaut $2\mu\text{m}$ et celles des fentes F_1 et F_2 valent $1\mu\text{m}$. La distance entre elles vaut $a = 8\mu\text{m}$.

14. Vérifier que les chemins d'amplitude de probabilité permettent d'envisager deux chemins différents des particules avant leur détection.

15. Le détecteur met en évidence des droites parallèles équidistantes sur lesquelles le nombre des impacts est très élevé et entre ces droites, des zones quasiment sans impacts. Interpréter.

16. Estimer la distance entre ces droites pour les températures T_1 et T_2 .

L'expérience de 1992 est aussi un dispositif interférentiel de fentes d'Young, mais on utilise le champ de pesanteur pour accélérer les atomes de Néon comme illustré ci-dessous.



Les atomes de Néon, supposés indépendants les uns des autres, sont lâchés sans vitesse initiale et tombent dans le champ de pesanteur $g = 9,8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$.

17. On mesure un interfrange de $1,1 \text{ mm}$: que vaut la longueur d'onde associée ? Quelle valeur de la vitesse en déduisez-vous au niveau du détecteur ?

18. En appliquant les lois de la mécanique classique, évaluer la vitesse des particules en chute libre au niveau des fentes. Que vaut-elle au niveau du détecteur ? Commenter.

19. Pourquoi a-t-on utilisé des atomes ultra-froids ?

Partie III - Oscillateur harmonique quantique

(Mines-Ponts MP - 2017)

On envisage dans cette partie un traitement quantique de l'oscillateur harmonique étudié dans les parties précédentes. L'objectif est d'obtenir l'expression quantifiée des valeurs possibles de l'énergie de cet oscillateur harmonique dans cette théorie. On note $\Psi(x, t)$ la fonction d'onde du système décrivant l'oscillateur harmonique associé à la molécule diatomique considérée. Ce système est un point matériel M dont la masse est notée μ . Ce point évolue le long d'un axe (O, \hat{u}_x) , la distance $x = OM$ représente l'élongation du ressort de raideur k modélisant la liaison chimique entre les deux atomes à travers le potentiel $V(x) = \frac{1}{2}kx^2$. Il s'agit donc d'un problème unidimensionnel. Le système est de plus stationnaire, on peut donc séparer la fonction d'onde en deux parties sous la forme $\Psi(x, t) = f(x)e^{-\frac{iE}{\hbar}t}$ où E représente les valeurs de l'énergie accessibles à ce système. Pour l'oscillateur harmonique, on montre que ces valeurs de E doivent être positives. La fonction $\Psi(x, t)$ est une solution de norme unité de l'équation de Schrödinger

$$-\frac{\hbar^2}{2\mu} \frac{\partial^2 \Psi(x, t)}{\partial x^2} + V(x)\Psi(x, t) = i\hbar \frac{\partial \Psi(x, t)}{\partial t}$$

20. Écrire l'équation différentielle vérifiée par la fonction $f(x)$ en fonction des paramètres k, μ, \hbar et E .

On effectue le changement de variable $\alpha = x \left(\frac{\mu k}{\hbar^2} \right)^{1/4}$ et l'on pose $\gamma = \left(\frac{4\mu E^2}{\hbar^2 k} \right)^{1/2}$.

21. Quelles sont les dimensions de α et de γ ?

22. Écrire l'équation différentielle vérifiée par la fonction $f(\alpha)$ en fonction du seul paramètre γ .

23. Vérifier que dans le régime $\alpha \rightarrow \pm\infty$, on peut écrire $f(\alpha) \sim e^{\pm \frac{1}{2}\alpha^2}$

24. Justifier succinctement que seule la solution $\alpha \mapsto e^{-\frac{1}{2}\alpha^2}$ est physiquement acceptable.

Dès lors que nous connaissons le comportement asymptotique de la solution recherchée, nous pouvons l'extraire de celle-ci en effectuant le changement de fonction $f(\alpha) = g(\alpha)e^{-\frac{1}{2}\alpha^2}$

25. Déterminer l'équation différentielle vérifiée par la fonction $\alpha \mapsto g(\alpha)$.

Pour résoudre cette équation, on effectue un développement en série entière de la fonction g :

$$g(\alpha) = \sum_{p=0}^{+\infty} b_p \alpha^p$$

26. Exprimer le coefficient b_{p+2} en fonction du coefficient b_p , de l'entier p et de γ .

Si l'on conserve tous les termes de la série, on montre que le comportement asymptotique de la fonction $\alpha \mapsto g(\alpha)$ l'emporte sur $\exp(-\alpha^2/2)$ en $\pm\infty$ ce qui ne permet pas de construire de solution physiquement acceptable. La seule possibilité est de tronquer la série en imposant l'existence d'un entier n tel que si $p \geq n$ alors $b_{p+2} = 0$.

27. En déduire que les énergies accessibles à un oscillateur harmonique en régime quantique sont de la forme

$$E_n = \left(n + \frac{1}{2} \right) \hbar \omega \quad \text{avec } n \in \mathbb{N}$$

où ω est une grandeur que l'on exprimera en fonction de μ et k .

- Fin du sujet -