

# DEVOIR LIBRE N°4

Classe MPI - Promotion 2025



## Annales d'Optique

---

**Les différentes parties sont indépendantes.**

---

► Données numériques :

~> **Constantes :**  $R = 8,31 \text{ J}\cdot\text{mol}^{-1}\cdot\text{K}^{-1}$      $N_a = 6,022 \times 10^{23} \text{ mol}^{-1}$      $\mathcal{F} = 96\,500 \text{ C}\cdot\text{mol}^{-1}$   
 $c = 3,00 \times 10^8 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$      $h = 6,63 \times 10^{-34} \text{ J}\cdot\text{s}^{-1}$      $G = 6,67 \times 10^{-11} \text{ m}^3\cdot\text{kg}^{-1}\cdot\text{s}^{-2}$   
 $\epsilon_0 = 8,85 \times 10^{-12} \text{ F}\cdot\text{m}^{-1}$      $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \text{ H}\cdot\text{m}^{-1}$      $k_B = 1,38 \times 10^{-23} \text{ J}\cdot\text{K}^{-1}$   
 $e = 1,602 \times 10^{-19} \text{ C}$

~> **La planète Terre :**  $g = 9,81 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$

~> **L'atome :**  $m_{\text{nucléon}} = 1,7 \times 10^{-27} \text{ kg}$      $m_{\text{électron}} = 9,1 \times 10^{-31} \text{ kg}$

► Systèmes d'unité et conversion :

~> **Conversion :**  $1 \text{ eV} = 1,602 \times 10^{-19} \text{ J}$      $T(\text{K}) = t(^{\circ}\text{C}) + 273$

► Formulaire d'analyse réelle :

~> **Trigonométrie :**  $\cos(a - b) = \cos(a) \cos(b) + \sin(a) \sin(b)$

~> **Dérivation :**  $(g \circ f(x))' = f'(x) \times g' \circ f(x)$      $\arcsin(x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

► Formulaire d'analyse vectorielle :

~> **Opérateurs en coordonnées cylindriques  $(r, \theta, z)$  :**

~> **Gradient :**  $\vec{\text{grad}} U = \frac{\partial U}{\partial r} \vec{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial U}{\partial \theta} \vec{e}_\theta + \frac{\partial U}{\partial z} \vec{e}_z$

~> **Divergence :**  $\text{div} \vec{U} = \frac{1}{r} \frac{\partial(rU_r)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial U_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial U_z}{\partial z}$

~> **Rotationnel :**  $\vec{\text{rot}} \vec{U} = \left( \frac{1}{r} \frac{\partial(U_z)}{\partial \theta} - \frac{\partial(U_\theta)}{\partial z} \right) \vec{u}_r + \left( \frac{\partial(U_r)}{\partial z} - \frac{\partial(U_z)}{\partial r} \right) \vec{u}_\theta + \left( \frac{1}{r} \frac{\partial(r U_\theta)}{\partial r} - \frac{1}{r} \frac{\partial(U_r)}{\partial \theta} \right) \vec{u}_z$

1. Énoncer les lois de Snell-Descartes en les accompagnant de schémas.

Lors d'une séance de travaux pratiques, on dispose d'un disque métallique gradué en degrés, d'un laser et d'un demi-cylindre de plexiglas dont la face plane est confondue avec un diamètre du disque métallique. La lumière du laser arrive sur la face courbe du demi-cylindre de plexiglas suivant un de ses rayons comme indiqué sur le schéma (figure 1). Le demi-cylindre peut pivoter sur le disque métallique autour de l'axe ( $Oz$ ),  $O$  étant le centre du disque.

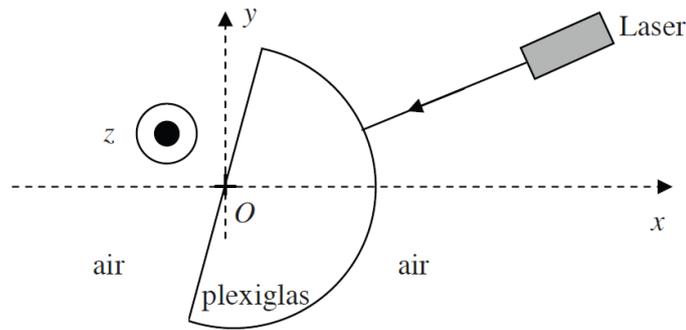


FIGURE 1 – Expérience avec un demi-cylindre de plexiglas.

2. Reproduire la figure 1 et tracer les rayons réfractés et réfléchis issus du laser. Quelles lois peut-on vérifier avec cette expérience ? Quel phénomène pourra être mis en évidence à l'occasion de cette expérience ? Pourquoi utiliser un laser comme source lumineuse ?

Une fibre optique à saut d'indice, représentée en figure 2, est constituée d'un cœur cylindrique transparent d'indice  $n_c = 1,500$  et de rayon  $r_c$ , entouré d'une gaine transparente d'indice  $n_g = 1,485$ .

L'axe ( $Ox$ ) de la fibre est normal au dioptre air-cœur. En raison de la symétrie de révolution de la fibre autour de l'axe ( $Ox$ ), on se restreint à une étude dans le plan ( $xOy$ ).

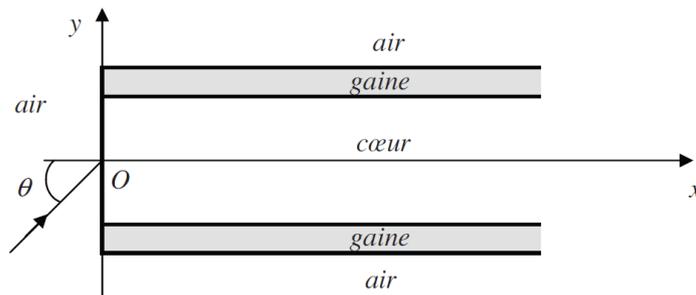


FIGURE 2 – Fibre optique à saut d'indice.

3. Un rayon lumineux monochromatique se propageant dans l'air, situé dans le plan ( $xOy$ ), pénètre dans le cœur de la fibre en  $O$  avec un angle d'incidence  $\theta$ .

4. Montrer que le rayon reste dans le cœur si l'angle  $\theta$  est inférieur à un angle limite  $\theta_L$ , appelé angle d'acceptance de la fibre optique, dont vous donnerez l'expression en fonction de  $n_c$  et de  $n_g$ . Calculer la valeur de  $\theta_L$ . L'indice de l'air vaut  $n_a = 1,000$ .

- 5.** On considère maintenant une fibre optique de longueur  $L$ . Le rayon entre dans la fibre avec un angle d'incidence  $\theta$  variable compris entre 0 et  $\theta_L$ .
- 6.** Quel est le rayon qui traverse le plus rapidement la fibre ? Exprimer, en fonction de  $L$ ,  $c$  et  $n_c$ , la durée de parcours  $T_1$  de ce rayon.
- 7.** Quel est le rayon qui met le plus de temps à traverser la fibre ? Exprimer, en fonction de  $L$ ,  $c$ ,  $n_g$  et  $n_c$ , la durée de parcours  $T_2$  de ce rayon.
- 8.** En déduire l'expression de l'intervalle de temps  $\delta_T = T_2 - T_1$  en fonction de  $L$ ,  $c$ ,  $n_g$  et  $n_c$ . Calculer la valeur de  $\delta_T$  pour  $L = 10$  km.

On injecte à l'entrée de la fibre une impulsion lumineuse de durée  $\tau_e$ , représentée en figure 3, formée par un faisceau de rayons ayant un angle d'incidence compris entre 0 et  $\theta_L$ .

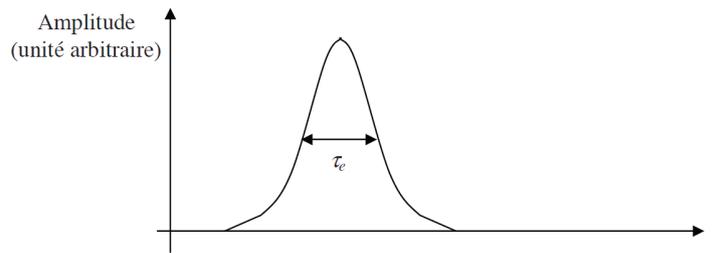


FIGURE 3 – Impulsion lumineuse en entrée de la fibre optique.

- 9.** Reproduire la figure 3. Représenter l'allure de l'impulsion en sortie de fibre. Préciser sa durée approximative  $\tau_s$ . On négligera ici tout phénomène d'absorption de la lumière par la fibre.
- 10.** Le codage binaire de l'information consiste à envoyer des impulsions lumineuses, appelées bits, périodiquement avec une fréquence d'entrée  $f_e$ . En supposant  $\tau_e$  négligeable devant  $\delta_T$ , quelle est la fréquence maximale de transmission  $f_{\max}$  qui empêche le recouvrement des impulsions à la sortie de la fibre ?
- 11.** En considérant  $L_{\max}$  la longueur maximale de fibre optique qui permet d'éviter le phénomène de recouvrement des impulsions, on définit le produit  $B = L_{\max} \cdot f_e$  comme étant la bande passante de la fibre optique. Exprimer  $B$  en fonction de  $c$ ,  $n_c$  et  $n_g$ . Expliquer l'intérêt d'introduire cette grandeur. Pour un débit de 100 Mbits par seconde, évaluer et commenter la longueur maximale de fibre optique que l'on peut utiliser pour transmettre le signal.

Pour remédier à l'élargissement des impulsions, on a fabriqué des fibres dites à gradient d'indice dans lesquelles on a remplacé le cœur par un milieu inhomogène d'indice  $n(y)$  vérifiant, pour  $y < r_c$  :

$$n(y)^2 = n_c^2 \left( 1 - 2\Delta \left( \frac{y}{r_c} \right)^2 \right)$$

où  $y$  désigne la distance algébrique du point considéré à l'axe ( $Ox$ ) et  $r_c$  le rayon du cœur de la fibre. La gaine reste homogène d'indice  $n_g$  et on a encore  $n(y = 0) = n_c = 1,500$ . Le rayon entre dans la fibre en  $O$  avec un angle d'incidence  $\theta$  compris entre 0 et  $\theta_L$ . Dans ces conditions, la trajectoire du rayon lumineux est celle indiquée en figure 4.

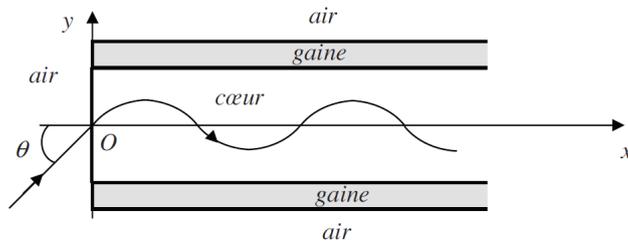


FIGURE 4 – Fibre optique à gradient d'indice.

**12.** Sachant que  $n(r_c) = n_g$ , exprimer la quantité  $\Delta$  en fonction des indices  $n_g$  et  $n_c$ .

**13.** Soit un point  $M$  du rayon lumineux repéré par ses coordonnées  $(x, y)$ . On introduit  $\varphi$ , l'angle formé en  $M$  entre la tangente au rayon lumineux et l'axe  $(Ox)$  comme indiqué en figure 5 gauche. En considérant le cœur comme un milieu stratifié formé de milieux d'indices  $n_0, n_1, n_j$  limités par des dioptries plans parallèles, d'équation  $y = \text{cste}$  (figure 5), quelles relations lient les indices  $n_{j-1}, n_j$ , et  $n_{j+1}$  aux angles d'incidence  $i_{j-1}, i_j, i_{j+1}$ ? En considérant que cette propriété est valable pour une fibre à gradient d'indice, que peut-on dire de la quantité  $n(y) \cdot \cos \varphi$ ? Exprimez-la en fonction de  $n_c$  et  $\theta_0$ .

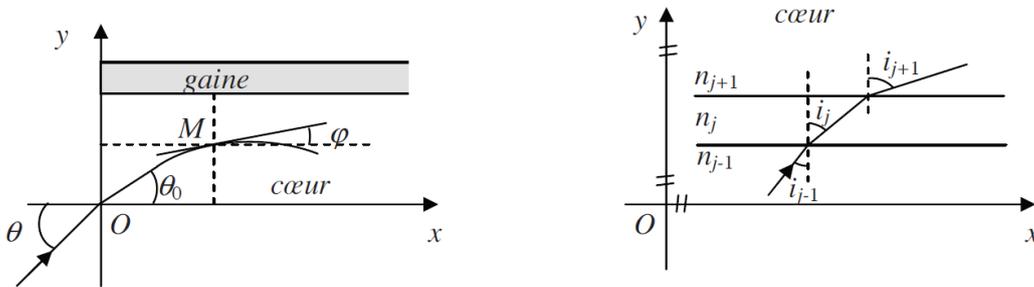


FIGURE 5 – Trajectoire du rayon lumineux dans une fibre à gradient d'indice.

**14.** Relier  $\frac{dy}{dx}$ , la pente de la tangente du rayon lumineux en  $M$ , à l'angle  $\varphi$ . Montrer alors que :

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = \left(\frac{n(y)}{n_c \cdot \cos \theta_0}\right)^2 - 1$$

On considère une impulsion lumineuse identique à celle de la question 6. Cette impulsion, en sortie d'une fibre optique à gradient d'indice de longueur  $L$ , possède un élargissement temporel :

$$\delta'_T = \frac{n_c L}{c} \left( \frac{1}{2 \cos \theta_0} - 1 + \frac{\cos \theta_0}{2} \right)$$

**15.** Évaluer cette durée pour  $L = 10$  km et l'angle  $\theta_0$  maximum. Comparer cette valeur à l'élargissement temporel obtenu question 6 pour une fibre à saut d'indice. Interpréter physiquement cette différence.

## Partie II - L'appareil photographique

(CCINP ?? - 2021)

On modélise un appareil photo (figure 6) par l'association d'une lentille mince ( $\mathcal{L}$ ) de focale  $f' = \overline{OF'}$  appelée *objectif*, d'un capteur ( $\mathcal{C}$ ) sur lequel on souhaite récupérer l'image et d'un diaphragme ( $\mathcal{D}$ ) placé devant la lentille.

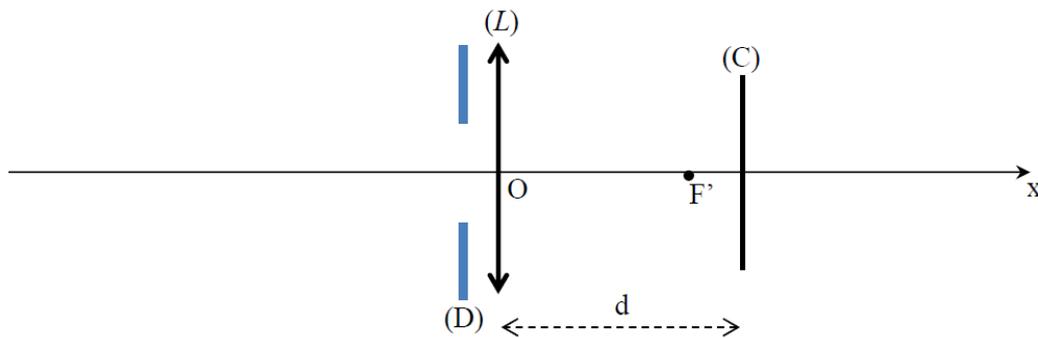


FIGURE 6 – Modélisation d'un appareil photographique.

La distance  $d$  entre la lentille ( $\mathcal{L}$ ) et le capteur ( $\mathcal{C}$ ) est réglable, grâce à un mécanisme lié à l'objectif ; elle est comprise entre  $d_{\min}$  et  $d_{\max}$ . À l'aide de cet appareil, on souhaite former sur le capteur l'image d'un arbre de hauteur  $h$  situé à une distance  $L$  devant l'objectif.

**16.** La lentille mince est utilisée dans les conditions de Gauss, c'est-à-dire les conditions de stigmatisme approché. Préciser en quoi elles consistent. Quelle partie de l'appareil permet d'assurer que ces conditions sont remplies ?

**17.** Faire un schéma soigné de la situation en notant  $\overline{AB}$  l'objet et  $\overline{A'B'}$  son image sur le capteur ( $A$  est sur l'axe optique et  $\overline{AB}$  appartient à un plan orthogonal à l'axe optique). Positionner les foyers principaux et tracer au moins deux rayons lumineux issus de  $B$  pour justifier la position de l'image  $\overline{A'B'}$ .

**18.** Exprimer la taille  $\overline{A'B'}$  de l'image de l'arbre sur le capteur en fonction de  $h$ ,  $f'$  et  $L$ . Calculer cette taille avec  $f' = 50$  mm,  $h = 5$  m et  $L = 20$  m.

**19.** Quelle est la valeur de  $d$  lorsque l'objet est à l'infini ? Montrer qu'il existe une distance limite notée  $L_{\min}$  en dessous de laquelle il ne sera pas possible d'obtenir une image sur le capteur, alors que ce serait toujours possible pour des valeurs supérieures à  $L_{\min}$ . Exprimer  $L_{\min}$  en fonction de  $f'$  et  $d_{\max}$ . Calculer  $L_{\min}$  pour  $f' = 50$  mm et  $d_{\max} = 55$  mm.

On souhaite obtenir une image de l'arbre sur le capteur plus grande sans changer de place (donc en gardant la même valeur pour  $L$ ). On change donc l'objectif et on le remplace par un objectif de focale  $f'_1 = 100$  mm. La distance  $d$  est toujours réglable mais les valeurs  $d_{\min}$  et  $d_{\max}$  sont différentes des valeurs des questions précédentes.

**20.** Quelle sera la taille de l'image de l'arbre sur le capteur ? Si on suppose que le capteur a pour dimensions :  $24$  mm  $\times$   $36$  mm, sera-t-il possible de voir l'arbre en entier sur la photo obtenue ?

La photo ci-dessous (figure 7) a été prise avec un appareil photo numérique de type *Canon G10*, dont la dimension verticale du capteur mesure 5,7 mm. Il s'agit d'une photo prise dans la baie du Mont Saint-Michel (au point B sur la carte présentée figure 8). La distance  $BC$  vaut 1,46 km.



FIGURE 7 – Photographie du Mont Saint-Michel.

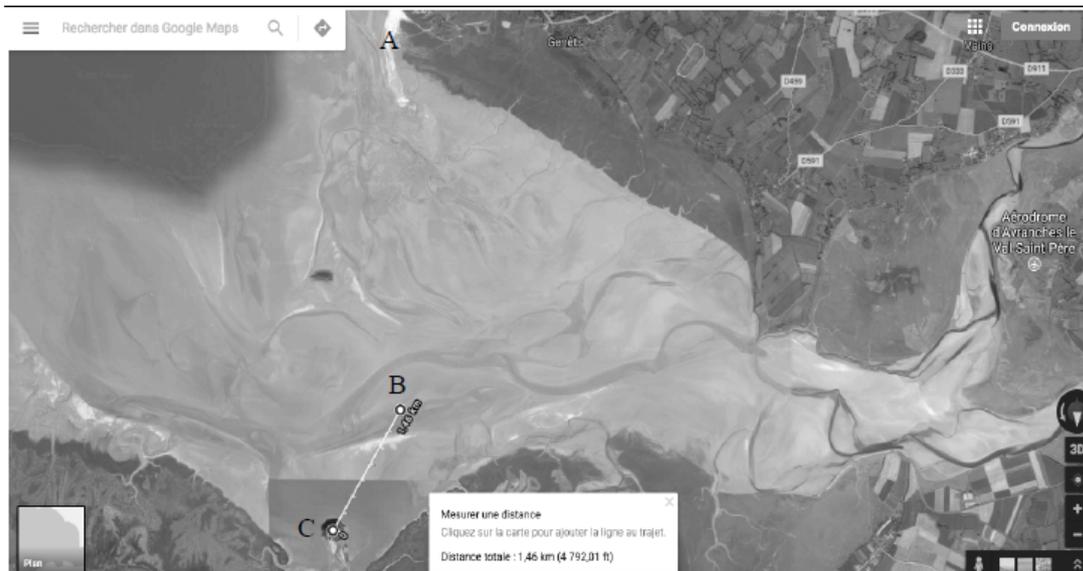


FIGURE 8 – Image satellite de la baie du Mont Saint-Michel.

Sensibilité :	100 ISO
Vitesse :	1/ 250 s
Ouverture :	f/7,1
Focale :	18 mm

**21.** À partir de la photo obtenue des données fournies, déterminer la hauteur du Mont Saint-Michel (flèche comprise) en indiquant les hypothèses posées, la modélisation du problème (par exemple par un schéma légendé) et les calculs effectués.

Les propriétés optiques des lentilles viennent de leur forme géométrique. Pour en proposer une explication, on considère une lentille plan-convexe (figure 9) constituée d'un verre d'indice  $n$ . L'indice de l'air ambiant est égal à 1. La partie sphérique de la lentille est une portion de sphère de centre  $C$  et de rayon  $R = \overline{CS}$ . L'épaisseur de la lentille au centre est  $e = \overline{OS}$ . On considère un rayon incident parallèle à l'axe optique, à une distance  $h$  de celui-ci. Ce rayon pénètre dans la lentille en  $A$  et est réfracté en  $B$ . On note  $i$  et  $r$  les angles incident et réfracté, comptés par rapport à la normale ( $CB$ ). Le rayon émergent de la lentille coupe l'axe optique en  $F'$ . On note  $K$  le projeté orthogonal de  $B$  sur l'axe optique.

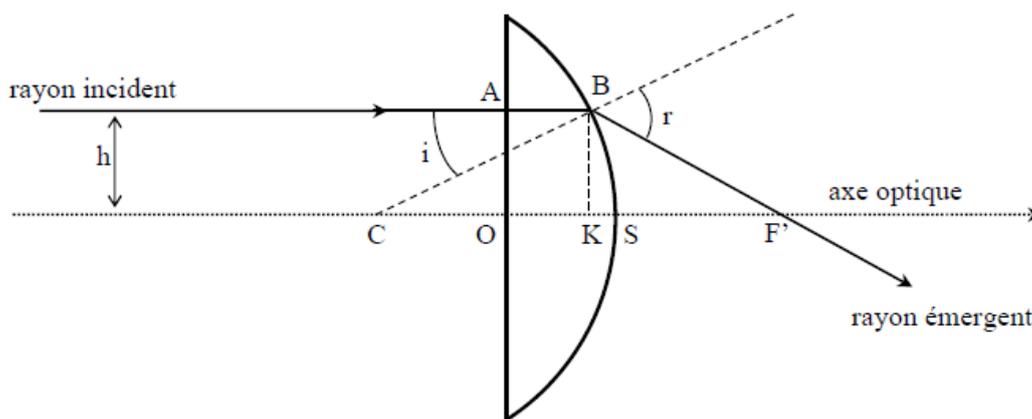


FIGURE 9 – Lentille plan-convexe.

**22.** Écrire la loi de la réfraction en  $B$ .

**23.** Montrer que la distance  $\overline{OF'}$  peut se mettre sous la forme :

$$\overline{OF'} = e - R(1 - \cos i) + \frac{R \sin i}{\tan(r - i)}$$

**24.** La lentille constitue-t-elle un système rigoureusement stigmatique ? Pour une lentille mince ( $e \ll R$ ) et des rayons paraxiaux ( $i \ll 1$  et  $r \ll 1$ ), peut-on dire que le système est approximativement stigmatique ? Justifier en déterminant une expression approchée de la distance  $\overline{OF'}$ .

On s'intéresse aux interférences entre les signaux optiques reçus par deux télescopes (c.f. figure 10).

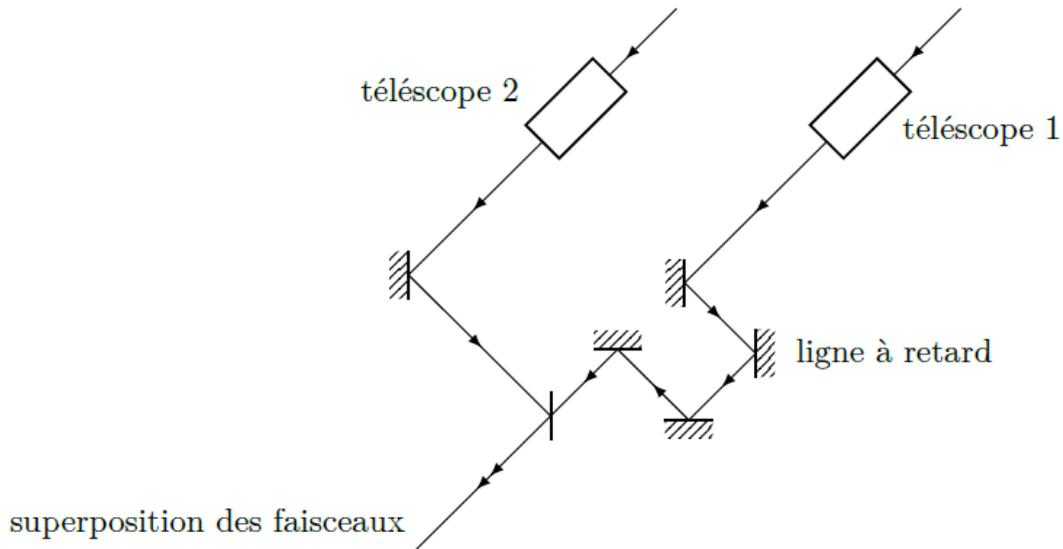


FIGURE 10 – Principe du VLTI.

On assimile les deux télescopes distants de  $a$  (variable jusqu'à 100 m) à deux trous  $T_1$  et  $T_2$  de taille négligeable, de sorte que le VLTI sera équivalent au montage de la figure 4, où la lentille d'axe optique ( $Oz$ ), de centre  $O$  possède une distance focale  $f'$ . Le foyer image de la lentille est noté  $F'$  et le plan focal est le plan d'observation.  $T_1$  et  $T_2$  sont à une distance  $a/2$  de l'axe optique.

**A - Observation d'une source ponctuelle dans la direction de l'axe optique**

Un unique objet ponctuel à l'infini  $A$  est observé dans la direction de l'axe optique. Pour simplifier, on supposera encore que cet objet émet une unique radiation de longueur d'onde  $\lambda = 2,00 \mu\text{m}$ .



FIGURE 11 – Schéma équivalent du VLTI.

**25.** Où se trouve l'image géométrique  $A'$  de  $A$  à travers la lentille ?

**26.** Calculer la différence de marche  $\delta_0$  entre les ondes provenant de  $A$  et se recombinant en  $A'$ , passant par les deux trous  $T_1$  et  $T_2$  sur la figure 11.

27. En déduire le rôle de la ligne à retard de la figure 10.
28. En quoi y a-t-il nécessité de la ligne à retard pour satisfaire aux conditions d'interférences ?
29. Dans quelle mesure peut-on considérer que le contraste des interférences vaut 1 ?

Dans la suite on supposera effectivement que le contraste vaut 1.

30. Déterminer l'expression de l'intensité lumineuse  $I_A(x)$  d'un point d'abscisse  $x$  dans le plan focal.
31. En déduire l'expression de l'interfrange.
32. Tracer l'allure de la figure d'interférence dans le plan  $(x'F'y')$  telle qu'on pourrait l'observer avec une caméra infrarouge.

### B - Observation d'une source ponctuelle dans une direction différente de celle de l'axe optique

Un unique objet ponctuel à l'infini  $B$  est observé dans la direction par rapport à l'axe optique dans le plan  $(xOz)$ , avec les mêmes caractéristiques que  $A$ .

33. À quelle distance  $x_B$  de  $F'$  se trouve l'image géométrique de  $B$  ?
34. Déterminer l'expression de l'intensité lumineuse  $I_B(x)$  en un point d'abscisse  $x$ .
35. L'interfrange est-il différent de celui trouvé précédemment ?

### C - Observation de deux sources ponctuelles

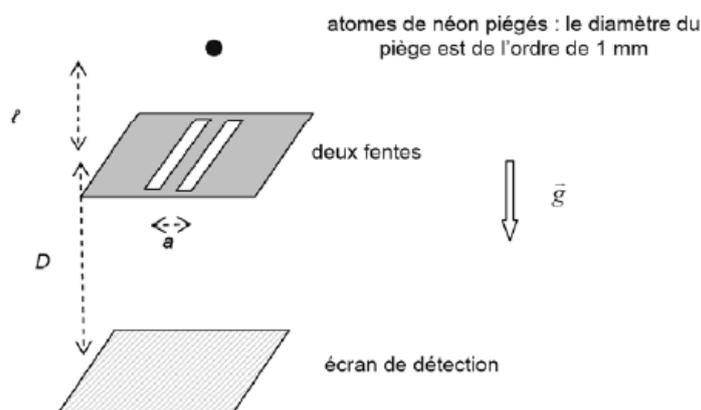
Deux objets ponctuels à l'infini  $A$  et  $B$  sont observés dans les directions  $i_A = 0$  et  $i_B \neq 0$  par rapport à l'axe optique dans le plan  $(xOz)$ . Pour simplifier, on supposera que ces deux objets émettent une unique radiation de longueur d'onde  $\lambda = 2,00\mu\text{m}$  et la même puissance lumineuse.

36. Ces deux sources sont-elles cohérentes ? Justifier la réponse.
37. En déduire l'intensité lumineuse  $I_{A \cup B}(x)$  en un point d'abscisse  $x$ .
38. Pour quelle(s) distance(s)  $a$  entre les deux télescopes y a-t-il brouillage des interférences ? On exprimera le résultat en fonction de  $i_B$ .
39. Proposer alors une méthode de détermination expérimentale de l'angle entre deux étoiles composant une étoile double.
40. Quelle est la valeur numérique (en secondes d'arc) de la limite de résolution angulaire  $i_m$  du VLTI ?

La compréhension de la physique quantique repose sur les concepts de dualité onde-particule et d'onde de matière. Dans sa thèse de doctorat soutenue en 1924, Louis de Broglie postulait que toute particule de quantité de mouvement  $p$  avait des propriétés ondulatoires et que l'on pouvait lui associer une longueur d'onde  $\lambda$  donnée par la relation qui porte son nom :

$$\lambda = \frac{h}{p}$$

avec  $h$  la constante de Planck. Cette hypothèse fut plus tard mise en évidence par plusieurs expériences, notamment celle des interférences d'atomes de néon froid (masse  $m = 3,32 \times 10^{-26}$  kg), réalisée en 1992 par une équipe de recherche japonaise. La figure 12 présente le dispositif expérimental :



Ce dispositif utilise des atomes de néon piégés et refroidis par laser à une température de 2,5 mK de manière à minimiser leur agitation thermique moyenne (à température ambiante, des atomes de néon dans l'air possèdent une vitesse typique de l'ordre de  $600 \text{ m.s}^{-1}$  due à l'agitation thermique). L'utilisation d'atomes légers et refroidis permet de disposer de valeurs de longueur d'onde de de Broglie plus élevées.

Lorsque ces atomes quittent le piège, ils tombent dans le champ de pesanteur et sont alors en chute libre. Le piège est situé à une hauteur  $\ell = 76 \text{ mm}$  au-dessus de deux fentes d'Young de largeur  $b = 2,0 \text{ }\mu\text{m}$  séparées de la distance  $a = 6,0 \text{ }\mu\text{m}$ .

Un écran MPC (Microchannel Plate Detector) situé à la distance  $D = 113 \text{ mm}$  de la double fente détecte les atomes de néon avec une résolution de l'ordre de  $20 \text{ }\mu\text{m}$ .

Source : Ministère de l'Éducation Nationale (DGESCO - IGEN)  
Dualité onde-particule (Juillet 2012)

FIGURE 12 – Schéma du dispositif d'interférence et texte explicatif

41. Quels sont les deux phénomènes caractérisant un comportement ondulatoire ?
42. Les atomes de néon atteignent les fentes d'Young avec une vitesse  $v = \sqrt{2g\ell}$ . En déduire la valeur de la longueur d'onde de de Broglie associée aux atomes de néon au niveau des fentes d'Young. Pourquoi les atomes de néon doivent-ils être traités comme un objet quantique ?
43. Pourquoi est-il plus difficile de réaliser une telle expérience avec des atomes plutôt qu'avec des électrons ? Pourquoi utiliser des atomes "froids" ?
44. Estimer la largeur de la tache de diffraction pour un atome diffracté par une des fentes et comparer à la résolution du MPC.

Sur la figure 13,  $S_1$  et  $S_2$  représentent les positions des deux fentes dans le plan d'étude perpendiculaire aux fentes supposées infiniment fines. Soit un point  $M$  du plan d'observation repéré par son abscisse  $x$ . L'écran est

placé loin des fentes à une distance  $D$  grande devant  $a$  et  $|x|$ . On s'intéresse à l'interférence en  $M$  des ondes de matière ayant traversé chacune des deux fentes.

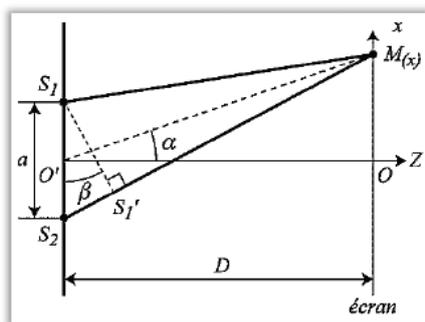


FIGURE 13 – Schéma du dispositif expérimental

**45.** Montrer que  $S_1M \sim D + \frac{(a-2x)^2}{8D}$  et  $S_2M \sim D + \frac{(a+2x)^2}{8D}$  à l'ordre le plus bas non nul en  $\frac{2x \pm a}{2D}$ . On rappelle que  $(1 + \epsilon^\alpha) \sim 1 + \alpha\epsilon$  lorsque  $\epsilon$  tend vers 0.

**46.** Déterminer la différence de marche  $\delta(x)$  en  $M$ . En déduire déphasage  $\Delta\varphi$  entre les ondes interférants au point  $M$  ainsi que l'interfrange théorique  $i_{th}$ . Application numérique.

La figure d'interférences obtenue en libérant les atomes du piège est constituée d'environ 6 000 impacts atomiques. L'allure de la figure obtenue est très similaire à celle obtenue lors des expériences d'interférences photon par photon.

Chaque impact est clairement identifié, attestant du caractère corpusculaire des entités détectées : les atomes ne se « scindent » pas. L'ensemble des impacts dessine des franges d'interférences, caractéristiques d'un comportement ondulatoire. La prédiction de l'impact est de nature probabiliste, la particule est décrite par une fonction d'onde.



Source : Fujio Shimizu et al., double-slit interference with ultracold metastable neon atoms, Physical Review (1992)

FIGURE 14 – Figure d'interférences

**47.** Estimer la valeur  $i_{exp}$  de l'interfrange obtenue expérimentalement en exploitant la figure 14.

En réalité, le calcul de l'interfrange est beaucoup plus complexe dans les conditions expérimentales citées et une étude plus approfondie donne l'expression suivante pour la même interfrange, notée  $i'_{th}$ .

$$i'_{th} = 2 \frac{hD}{mva} \frac{\sqrt{1 + \alpha} - 1}{\alpha} \quad \text{avec} \quad \alpha = \frac{2gD}{v^2}$$

**48.** Quelle est la dimension du coefficient  $\alpha$  ?

**49.** Calculer  $i'_{th}$  et comparer au résultat expérimental.

- Fin du sujet -