



TRAVAUX DIRIGÉS

Analyse spectrale



Les différents exercices de ce recueil sont agencés selon la progression des différents paragraphes du cours. Le niveau de difficulté approximatif est mentionné pour chacun d'eux à travers un nombre d'étoiles (★), sauf pour les exercices type résolution de problème (♠♥♦). La résolution d'un exercice nécessite un temps de lecture, un temps de recherche et un temps de rédaction. Aucun de ces trois ne doit être négligé. Pour favoriser votre apprentissage, il est vivement recommandé de réaliser les phases de lecture et de recherche en amont de la séance, le minimum exigé étant un schéma de situation et les lois à mettre en œuvre qui devront apparaître en regard des énoncés.

Linéaments

Analyse de fonctions de transferts

Exercice n°1 - Étude d'un filtre

★ ☆ ☆

On considère un filtre constitué de trois dipôles en série : un condensateur idéal de capacité $C = 10 \text{ nF}$, un premier conducteur ohmique de résistance $R_1 = 10 \text{ k}\Omega$ et un second conducteur ohmique de résistance $R_2 = 90 \text{ k}\Omega$. On note V_E la tension d'entrée et V_S la tension de sortie, celle-ci étant prise sur l'association série du condensateur et du premier conducteur ohmique.

1. Réaliser un schéma du filtre et en déduire la valeur du rapport d'amplitude $|V_S/V_E|$ à basse et à haute fréquence par un raisonnement qualitatif.
2. Montrer que la fonction de transfert du filtre peut être mise sous la forme :

$$\underline{H}(j\omega) = H_0 \frac{1 + j\omega\tau_1}{1 + j\omega\tau_2}$$

où τ_1 et τ_2 sont des temps caractéristiques dont les expressions sont à préciser.

3. Représenter le diagramme de Bode asymptotique en amplitude de ce filtre à partir de deux fonctions de transferts du premier ordre.

4. Déterminer la pulsation de coupure à -3 dB.
5. Établir l'équation différentielle reliant les fonctions $V_S(t)$, $V_E(t)$ et leurs dérivées premières.
6. Déterminer le signal obtenu en sortie du filtre si la tension d'entrée est de la forme $V_E(t) = A \cos^2(\omega t)$ d'amplitude $A = 1$ V et de pulsation $\omega = 5 \times 10^4$ rad.s⁻¹.

Exercice 2 : Influence de l'ordre du filtre

★ ☆ ☆

On considère deux filtres passe-bas de même pulsation de coupure $\omega_c = 628 \text{ rad.s}^{-1}$ et de fonctions de transfert :

$$\underline{H}_1(j\omega) = \frac{5}{1 + j\frac{\omega}{\omega_c}} \quad \underline{H}_2(j\omega) = \frac{5}{1 + j\sqrt{2}\frac{\omega}{\omega_c} - \frac{\omega^2}{\omega_c^2}}$$

1. Vérifier que ω_c est bien la pulsation de coupure à -3 dB de chacun des deux filtres.
2. Donner les expressions approchées pour $\omega > \omega_c$ des deux fonctions de transfert. En déduire les pentes asymptotiques présentes sur les diagrammes de Bode en amplitude de chacun des filtres.
3. Déterminer le signal $s(t)$ en sortie de chacun des filtres lorsqu'on applique un signal $e(t) = E_0(1 + \cos(2\pi f_s t))$ d'amplitude $E_0 = 2 \text{ V}$ et de fréquence $f_s = 300 \text{ Hz}$ en entrée. En déduire lequel est le meilleur filtre moyennneur.

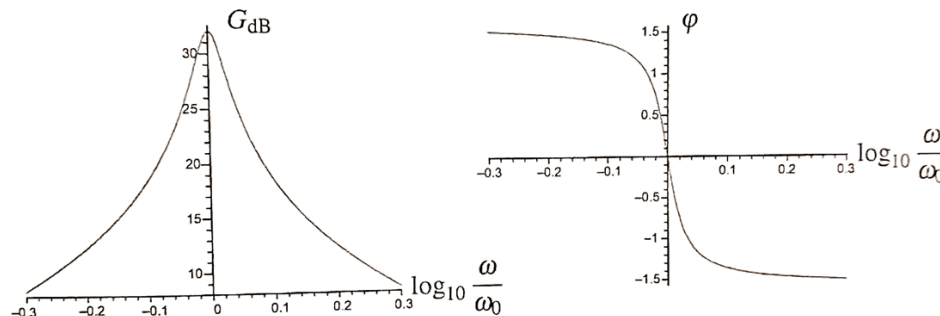
Exercice 3 : Elimination d'un bruit

★ ☆ ☆

Un capteur donne un signal utile sinusoïdal de fréquence $f_u = 80 \text{ Hz}$ mais brouillé par des signaux de fréquence différentes de f_u (bruit d'origine expérimentale).

1. Citer une origine possible du bruit de fréquence inférieure à f_u et une autre celui de fréquence supérieure.
2. Donner le type de filtre à utiliser pour réduire l'amplitude des signaux parasites en justifiant votre réponse.

Pour éliminer le bruit, on utilise un filtre dont le diagramme de Bode est le suivant :



3. Déterminer le meilleur choix pour la valeur de ω_0 , puis donner l'expression des signaux filtrés pour les trois signaux d'entrée suivants : $e_1(t) = E_0 \cos(100\pi t)$, $e_2(t) = E_0 \cos(160\pi t)$ et $e_3(t) = E_0 \cos(200\pi t)$.

Exercice 4 : Filtrage d'un signal sonore



Pour analyser les composantes séquentielles d'un signal sonore, par exemple l'analyse des phonèmes¹, on utilise un transducteur² qui convertit le signal en une tension v_e puis un filtre passe-bande qui extrait les composantes sinusoïdales de v_e de fréquences voisines d'une fréquence f_0 donnée. On note v_s la tension en sortie du filtre.

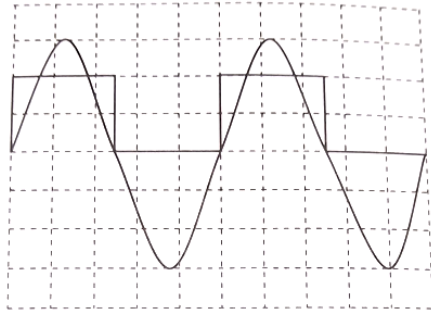
- On utilise comme filtre un circuit linéaire dont la fonction de transfert est de la forme :

$$\underline{F}(j\omega) = \frac{\underline{v}_s}{\underline{v}_e} = \frac{F_0}{1 + j Q \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right)}$$

1. En phonologie, domaine de la linguistique, un phonème est la plus petite unité discrète que l'on puisse isoler par segmentation dans la chaîne parlée. Un phonème est en réalité une entité abstraite, qui peut correspondre à plusieurs sons.

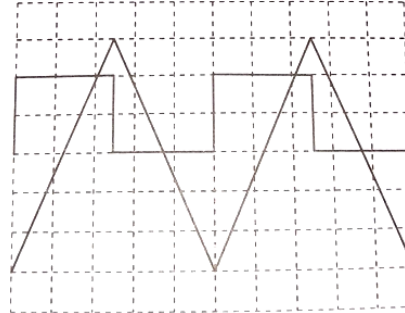
2. Dispositif assurant une conversion ou un transfert de signaux et dans lequel un signal au moins est de nature électrique

- On réalise avec ce filtre deux oscillogrammes, tous deux obtenus en régime périodique pour une tension d'entrée v_e rectangulaire, mais chacun avec une fréquence différente. Les résultats obtenus sont présentés ci-après :



Oscillogramme 1

Les voies 1 et 2 sont en position DC.
 Base de temps : $50 \mu s$ par carreau ;
 Voie 1 : 0,5 V par carreau ;
 Voie 2 : 2,0 V par carreau.



Oscillogramme 2

Les voies 1 et 2 sont en position DC.
 Base de temps : $5 \mu s$ par carreau ;
 Voie 1 : 2,0 V par carreau ;
 Voie 2 : 0,2 V par carreau.

Remarques : la tension v_s est quasi sinusoïdale - si on augmente la fréquence de v_e par rapport à la valeur correspondant à l'oscillogramme, on constate que l'amplitude v_s diminue. Si, par rapport à cette même fréquence, on diminue légèrement la fréquence v_e , on constate que l'amplitude de v_s diminue également.

Remarques : le filtre a un comportement intégrateur.

L'objectif est de déterminer les caractéristiques F_0 , Q et ω_0 du filtre à partir de ces deux expériences.

- Expliquer pourquoi, dans chaque expérience, la tension de sortie v_s ne comporte pas de composante continue au contraire de la tension d'entrée v_e .
- Expliquer que l'oscillogramme 1 présente une tension de sortie sinusoïdale alors que l'entrée est rectangulaire.

3. En étudiant les l'oscillogramme 1 et les observations mentionnées, déterminer la pulsation ω_0 et le coefficient F_0 de la fonction de transfert du filtre utilisé.
4. Expliquer ce qu'est le comportement intégrateur mentionné à propos de l'oscillogramme 2. En déduire une expression approchée de la fonction de transfert $\underline{F}(j\omega)$ dans le domaine de fréquence utilisé pour réaliser cet oscillogramme.
5. En étudiant l'oscillogramme 2, déterminer le rapport $F_0\omega_0/Q$. En déduire la valeur du facteur de qualité Q .

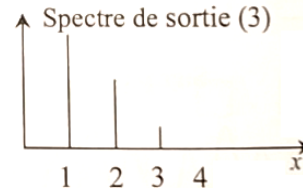
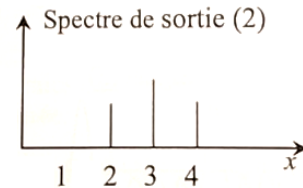
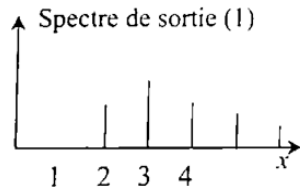
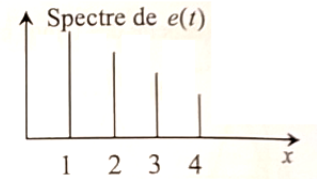
FORMULAIRE : la décomposition en série de Fourier d'un signal $s(t)$ périodique de période T tel que $s(t) = S_0$ pour $t \in [0, T/2]$ et $s(t) = 0$ pour $t \in [T/2, T]$ s'exprime :

$$s(t) = S_0 \left(\frac{1}{2} + \frac{2}{\pi} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{2k+1} \sin((2k+1)\omega_1 t) \right) \quad \text{avec} \quad \omega_1 = \frac{2\pi}{T}$$

Exercice 5 : Chasse aux spectres

★ ☆ ☆

On envoie en entrée de trois filtres différents un signal $e(t)$ dont le spectre en amplitude est représenté ci-contre, sachant que $x = f/f_0$ avec $f_0 = 1$ kHz la fréquence fondamentale. En sortie de chacun des filtres, on obtient un signal $s(t)$ différent dont les spectres en amplitudes sont représentés ci-dessous :



1. Préciser pour chacun des filtres s'il s'agit d'un filtre linéaire ou non-linéaire en justifiant votre réponse.
2. Pour chacun des filtres linéaires, préciser leur nature et donner un ordre de grandeur de leur fréquence de coupure.

Exercice 6 : Les deux font la paire

★ ★ ☆

On considère les six signaux suivants, tous de période $T = 1$ ms.

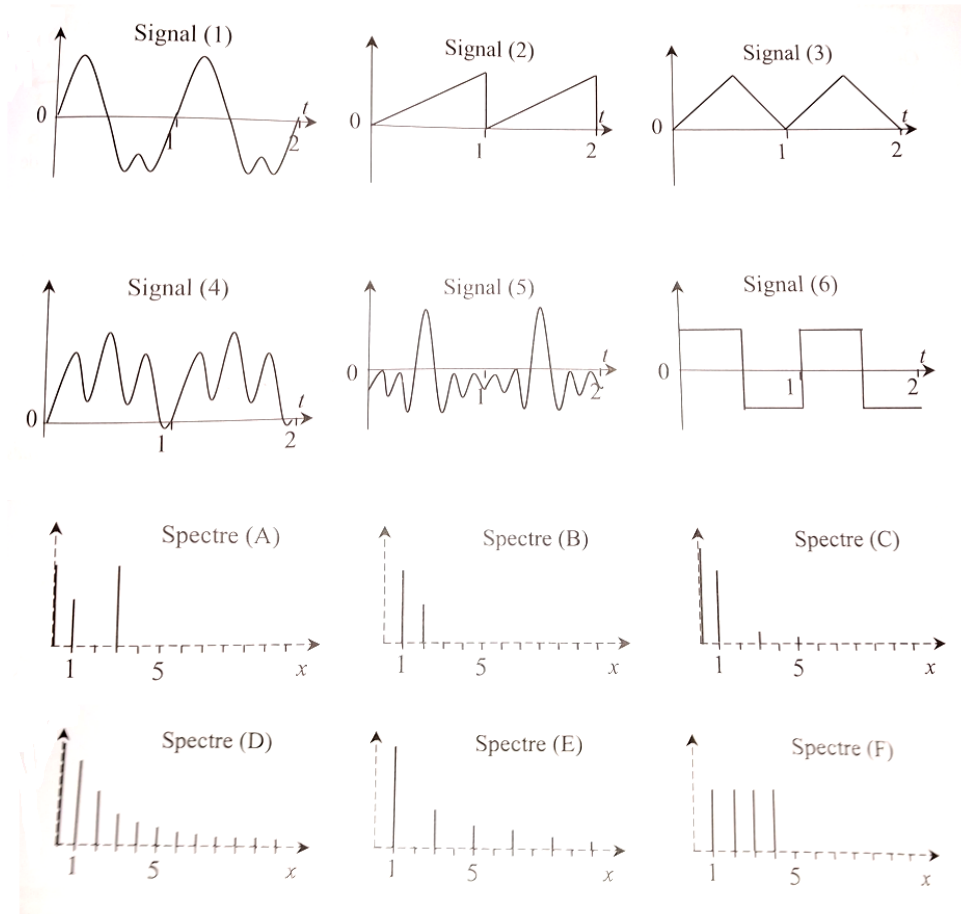
Pour chacun d'eux, identifier le spectre correspondant parmi les suivants. Une argumentation précise est attendue pour justifier les appariements.

Critère d'échantillonnage

Exercice n°1 - Choix d'une fréquence d'échantillonnage

★ ☆ ☆

On souhaite numériser une tension électrique analogique $e(t)$ avec une fréquence d'échantillonnage f_e . Pour chacun des cas suivants, déterminer la fréquence d'échantillonnage minimale f_e à appliquer pour échantillonner correctement le signal $e(t)$. On note f_1 et f_2 des fréquences qui valent respectivement 1 kHz et 200 Hz.



a. $e_1(t) = E \cos(2\pi f_1 t)$

d. $e_4(t) = E (\cos(2\pi f_1 t) + \cos(2\pi f_2 t))$

b. $e_2(t) = E \sin(2\pi f_2 t)$

e. $e_5(t) = E \cos(2\pi f_1 t) \cos(2\pi f_2 t)$

c. $e_3(t) = E \cos(2\pi(f_1 + f_2)t)$

f. $e_6(t) = E \cos^2(2\pi f_1 t)$

Exercice n°2 - Repliement spectral



On souhaite numériser par échantillonnage à la fréquence $f_e = 1,5$ kHz un signal créneau $e(t)$ de période $T_0 = 5$ ms dont la décomposition en série de Fourier s'écrit :

$$e(t) = \frac{2E}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2k-1} \sin(2\pi(2k-1)f_0 t)$$

1. Commenter le choix de la fréquence d'échantillonnage.
2. Déterminer l'ensemble des fréquences présentes après échantillonnage en dessous de $f_e/2$.
3. Justifier que l'on observe également une raie à la fréquence de 400 Hz.

On souhaite ne garder que les harmoniques dont les amplitudes sont inférieures à 5% de celle du fondamental.

4. Proposer une solution expérimentale pour réaliser ce traitement.

Conversion analogique/numérique

Exercice n°3 - Enregistrement audio



Les formats d'enregistrement audio non compressés tel que le format WAV permettent de retranscrire des signaux sonores avec une grande qualité. La procédure d'enregistrement sur un CD se fait en quatre étapes : (i) captation du signal par un microphone, (ii) filtrage par un filtre passe-bas, (iii) échantillonnage à la fréquence $f_e = 44100$ Hz et (iv) quantification sur 16 bits. Les formats compressés tel que le format MP3 ajoutent une étape supplémentaire de traitement numérique qui élimine les redondances et les signaux peu audibles : le taux de compression de tels format varie entre 4 à 20.

1. Justifier que la fréquence d'échantillonnage est compatible avec la gamme du spectre audible.
2. En l'absence de filtrage, expliquer ce qu'il adviendrait d'un signal sonore de fréquence $f_1 = 43$ kHz.

3. Proposer une valeur possible de fréquence de coupure du filtre en argumentant la réponse.

4. Justifier que l'on puisse parler de sur-échantillonnage.

On souhaite procéder à l'enregistrement stéréo au format WAV d'une seconde d'un concert sur le CD étudié, dont la capacité de stockage est de 700 Mo.

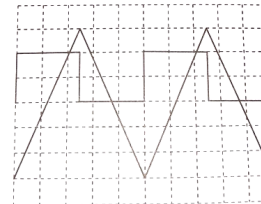
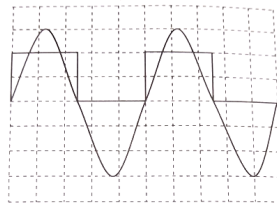
5. Déterminer le nombre de bits nécessaire à l'enregistrement.

6. En déduire la durée maximum enregistrable sur un CD au format WAV, puis au format MP3.

Exercice n°4 - Convertisseur parallèle 3 bits

★ ★ ☆

On considère un convertisseur numérique $N = 3$ bits qui convertit une tension u qui vérifie $0 < u < V_{\text{ref}}$. Il est composé de sept comparateurs, d'une logique de commande et de conducteurs ohmiques de résistances r , $2r$ et $3r$ agencés conformément au schéma ci-contre.



Les comparateurs ont une impédance d'entrée infinie et délivrent un signal logique qui est au niveau haut lorsque la patte reliée à u a un potentiel supérieur à celui de la patte reliée à V_{ref} par l'intermédiaire de résistances et un niveau bas sinon.

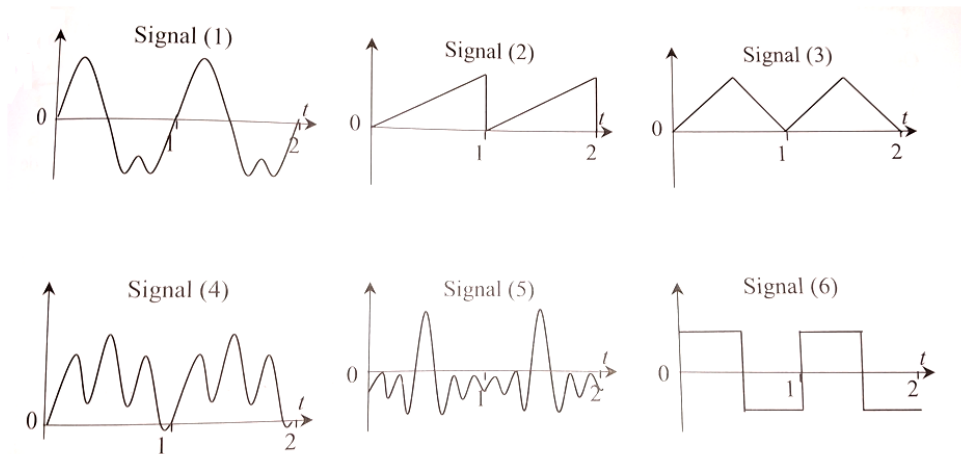
1. Expliquer le fonctionnement de ce convertisseur.

On note $a_2a_1a_0$ l'écriture binaire en sortie du numériseur et s_N sa conversion en base décimale. On reconstitue le signal numérisé en un signal analogique noté u_N .

2. Donner la relation entre le signal synthétisé u_N et s_N .

3. Exprimer le nombre de comparateurs nécessaires au montage d'un convertisseur N bits. Réaliser l'application pour $N = 8$ bits.

On visualise simultanément les signaux en entrée et en sortie du convertisseur analogique-numérique :



4. Justifier qu'il s'agit bien du convertisseur étudié.

5. Déterminer la valeur de u_N pour $u = 1,28$ V et commenter l'écart observé.

6. Expliquer l'erreur qu'induit la numérisation d'un signal et estimer sa valeur maximale.