Correction

L'arc-en-ciel

1. Le rayon réfracté est dans le plan d'incidence ; les angles d'incidence i et de de réfraction r vérifient :

$$\sin i = n \sin r$$

2. La différentielle de la relation précédente s'exprime $\cos i \,\mathrm{d}i = n \cos r \,\mathrm{d}r$. Ainsi :

$$\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}i} = \frac{\cos i}{n \cos r}$$

En injectant l'identité trigonométrique $\cos\theta = \sqrt{1 - \sin^2\theta}$ il vient finalement :

$$\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}i} = \sqrt{\frac{1 - \sin^2 i}{n^2 - \sin^2 i}}$$

3. Premier cas.

a. $\alpha = r$ (propriété d'un triangle isocèle) et $\beta = i$ (principe de retour inverse de la lumière).

b. $D_1 = i - r + i - r = 2(i - r)$ (somme des déviations au niveau des deux dioptres successifs).

c. On exprime la condition d'émergence d'un faisceau parallèle :

$$\frac{\mathrm{d}D_1}{\mathrm{d}i} = 0 \Leftrightarrow \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}i}(2(i - r)) \Leftrightarrow 2(1 - \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}i}) = 0 \Leftrightarrow \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}i} = 1$$

Or, d'après le résultat de la question 1, cela impose $n^2 - \sin^2 i = 1 - \sin^2 i$, autrement dit $n = 1$.
Il s'agit d'une solution triviale sans intérêt correspondant à une absence de dioptres (milieu unique).
Il n'est donc pas possible d'observer un faisceau parallèle dans ce cas.

3. Deuxième cas.

a. $\alpha = \beta = \gamma = r$ (propriété d'un triangle isocèle) et $\delta = i$ (principe de retour inverse de la lumière).

b. $D_2 = 2(i - r) + \pi - 2r = \pi + 2i - 4r$ (somme des déviations au niveau des trois dioptres successifs).

c. On exprime la condition d'émergence d'un faisceau parallèle :

$$\frac{\mathrm{d}D_2}{\mathrm{d}i} = 0 \Leftrightarrow 2 - 4\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}i} = 0 \Leftrightarrow \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}i} = \frac{1}{2}$$

Or, d'après le résultat de la question 1, cela impose $n^2 - \sin^2 i = 4(1 - \sin^2 i)$, autrement dit :

$$\sin^2 i = \frac{4 - n^2}{3}$$

3. Troisième cas.

a. $\varphi = \delta = \gamma = \beta = r$ (propriété d'un triangle isocèle) et $\xi = i$ (principe de retour inverse de la lumière).

b. $D_3 = 2(i - r) + 2(\pi - 2r) = 2i - 6r$ (somme des déviations au niveau des quatre dioptres successifs).

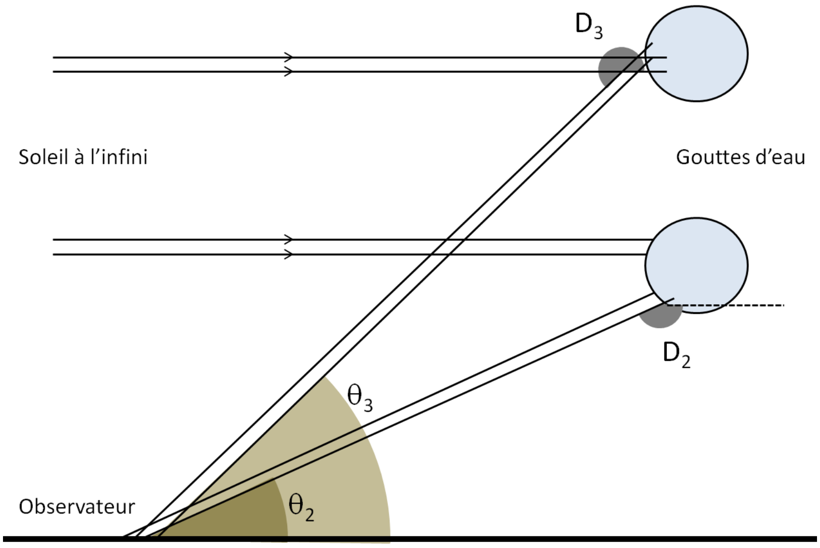
c. On exprime la condition d'émergence d'un faisceau parallèle :

$$\frac{\mathrm{d}D_3}{\mathrm{d}i} = 0 \Leftrightarrow 2 - 6\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}i} = 0 \Leftrightarrow \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}i} = \frac{1}{3}$$

Or, d'après le résultat de la question 1, cela impose $n^2 - \sin^2 i = 3(1 - \sin^2 i)$, autrement dit :

$$\sin^2 i = \frac{9 - n^2}{8}$$

4. La personne ne verra la lumière émergente que si la condition d'émergence d'un faisceau parallèle est vérifiée, ce qui correspond au schéma suivant.



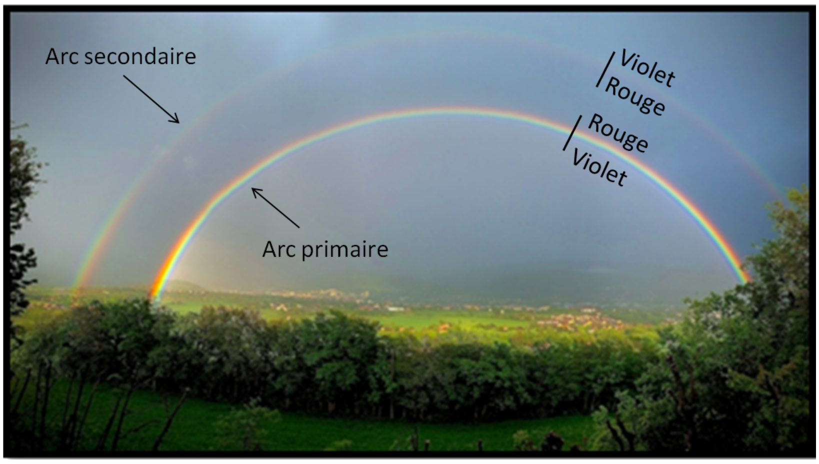
On constate les relations $\theta_2 = \pi - D_2$ et $\theta_3 = D_3 - \pi$ (propriétés des angles alternes-internes).
Les gouttes devront donc être sur un cône centré sur l'observatrice et d'axe parallèle aux rayons incidents.
Il se formera ainsi deux arcs : l'un dû à une réflexion simple dans les gouttes, l'autre à une réflexion double.

5. Les angles θ_2 et θ_3 s'obtiennent à partir des angles de déviations D_2 et D_3, eux-mêmes dépendant de i et r.
L'angle r se calcule à partir de la troisième loi de Snell-Descartes : $r = \arcsin(\sin i/n)$.
L'angle d'incidence dépend de la configuration :
- réflexion simple : $i = \arcsin(\sqrt{(4 - n^2)/3})$;
- réflexion double : $i = \arcsin(\sqrt{(9 - n^2)/8})$.

Les applications numériques sont regroupées dans le tableau suivant :

Angle (°)	i_2	r_2	D_2	θ_2	i_3	r_3	D_3	θ_3
Violet ($n = 1,3448$)	58,75	39,48	139,58	**40,41**	71,50	44,85	233,87	**53,87**
Rouge ($n = 1,3317$)	59,51	40,33	137,71	**42,29**	71,92	45,56	230,48	**50,48**

6. La personne observera la scène suivante :



On constate que l'arc secondaire (obtenu par la double réflexion) et au-dessus de l'arc primaire (obtenu par simple réflexion) et que les couleurs des deux arcs sont inversées.

7. La réflexion au niveau d'un dioptre ne correspond qu'à une faible proportion de l'intensité lumineuse du rayon incident (<5%). Les arcs secondaires étant liés à un double réflexion, ils sont moins lumineux que les arcs primaires, liés à une unique réflexion (5% × 5% = 0,25% << 5%).

8. En introduisant d comme la distance entre l'observateur et le rideau de pluie, et h l'altitude d'une goutte, la définition de l'angle θ des questions précédentes conduit à $h = d\tan\theta$.

Les applications numériques sont regroupées dans le tableau ci-dessous :

d	500 m	1 000 m
$h_{\text{violet}}^{\text{secondaire}}$	685 m	1370 m
$h_{\text{rouge}}^{\text{secondaire}}$	606 m	1212 m
$h_{\text{rouge}}^{\text{primaire}}$	454 m	910 m
$h_{\text{violet}}^{\text{primaire}}$	426 m	851 m

Bonus. Une différence de direction est d'autant plus perceptible qu'elle est considérée à grande distance. Plus la goutte est de dimension réduite, plus les distances parcourues par les rayons lumineux dans la goutte sont courtes. Ainsi, les différentes couleurs sont d'autant moins séparés que la goutte est petite. Dans le cas extrême d'un rideau de brouillard, on s'attend donc à observer un unique arc blanc.

- Fin du corrigé -