



Concours CCINP - Filière TPC

Épreuve de Physique

Session 2022 – Durée de l'épreuve : 4h

Corrigé proposé par R. Richaud professeur en TPC 2 au lycée Lavoisier de Mulhouse
avec l'apport des collègues de TPC 2 : S. Aumasson, A. Beuf et P. Pruja.

Le sujet devrait être disponible sur <https://www.concours-commun-inp.fr/fr/epreuves/annales/annales-tpc.html>

Table des matières

Problème 1 : Igloo	2
1 Généralités	2
1.1 Régime variable	2
1.2 Régime stationnaire	2
2 Bilan thermique d'un igloo	3
2.1 Résistance conductive de l'igloo	3
2.2 Prise en compte de la conducto-convection	4
2.3 Température intérieure de l'igloo	4
2.4 Influence des conditions météorologiques sur la température de l'igloo	4
2.5 Aération de l'igloo	5
Problème 2 : Prospection électromagnétique en Antarctique	6
1 La prospection électrique	6
2 Méthode tellurique	7
2.1 Étude du plasma ionosphérique	7
2.2 Propagation de l'onde électromagnétique dans le plasma ionosphérique	8
2.3 Courant tellurique	10

Problème 1 : Igloo

1 Généralités

1.1 Régime variable

Q1. L'existence d'une inhomogénéité spatiale de température engendre un courant thermique s'opposant à cette inhomogénéité, et proportionnel au gradient de température avec une constante de proportionnalité λ appelée conductivité thermique propre à un matériau. Ceci se résume sous l'écriture suivante de la loi de Fourier :

$$\vec{j}_{\text{th}} = -\lambda \overrightarrow{\text{grad}}(T) \quad (1)$$

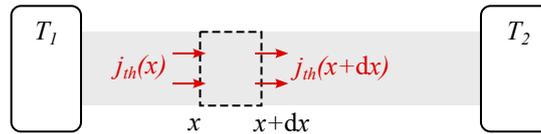
Q2. On effectue un bilan thermique entre les instants t et $t + dt$ sur une tranche de matériau comprise entre x et $x + dx$:

- la variation d'énergie interne est :

$$U(t + dt) - U(t) = dU = C dT = mc dT = (\rho \times S dx)c dT$$

- le flux thermique (entrant et sortant par les faces de section S) est :

$$\phi_{\text{th}} dt = +j_{\text{th}}(x, t) \times S dt - j_{\text{th}}(x + dx, t) \times S dx$$



Ce qui donne le bilan suivant :

$$\begin{aligned} dU &= \phi_{\text{th}} dt \\ \rho S dx c dT &= (j_{\text{th}}(x, t) - j_{\text{th}}(x + dx, t)) S dt \\ \rho c \frac{\partial T}{\partial t} &= -\frac{\partial j_{\text{th}}}{\partial x} \end{aligned}$$

puis en utilisant la loi de Fourier à une dimension : $j_{\text{th}}(x, t) = -\lambda \frac{\partial T}{\partial x}$

$$\rho c \frac{\partial T}{\partial t} = \lambda \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \quad \text{équation de la diffusion de la chaleur} \quad (2)$$

Q3. Les unités des différents termes sont :

- ρ en $\text{kg} \cdot \text{m}^{-3}$
- c en $\text{J} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{kg}^{-1}$
- L en m
- λ en $\text{W} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$ (à retrouver avec la loi de Fourier ou avec la légende de la figure 4)

On en déduit que comme attendu par la notation : $\tau = \frac{\rho c L^2}{\lambda}$ est un temps en second (s). Il représente le temps caractéristique de diffusion thermique sur la longueur L du matériau et peut être retrouvé en faisant une analyse d'ordre de grandeur dans l'équation de la chaleur.

Q4. Le phénomène de diffusion thermique est un phénomène **irréversible**. Ceci peut être vu soit comme une conséquence du second principe de la thermodynamique, qui formule par exemple que la chaleur ne se déplace que des zones chaudes vers les zones froides; ou par la non-invariance de l'équation de la diffusion par inversion du temps : $t' \mapsto -t$.

1.2 Régime stationnaire

Q5. En régime stationnaire, l'équation se résume à :

$$\lambda \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = 0$$

donc $T(x) = Ax + B$ avec $(A, B) \in \mathbb{R}^2$ deux constantes à déterminer. On utilise alors les conditions aux limites :

$$\begin{cases} T(x=0) = T_1 = A \times 0 + B \\ T(x=L) = T_2 = A \times L + B \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} B = T_1 \\ A = \frac{T_2 - T_1}{L} \end{cases}$$

donc :

$$T(x) = T_1 + \frac{T_2 - T_1}{L}x \quad (3)$$

Q6. Le flux thermique total à travers la section S est :

$$\begin{aligned} \phi_{12} &= \iint_S \vec{j}_{\text{th}} \cdot d\vec{S} = \iint_S -\lambda \frac{T_2 - T_1}{L} \vec{u}_x \cdot dS \vec{u}_x = -\lambda \frac{T_2 - T_1}{L} S \\ \phi_{12} &= \frac{\lambda S}{L} (T_1 - T_2) \end{aligned} \quad (4)$$

Le flux thermique total est directement proportionnel à la différence de température.

Q7. On peut alors faire apparaître la résistance thermique par analogie avec la loi d'Ohm donnée par l'énoncé et identifier R_{th} .

$$T_1 - T_2 = R_{\text{th}} \phi_{12} \quad (5)$$

$$R_{\text{th}} = \frac{L}{\lambda S} \quad (6)$$

Q8. L'analogie avec l'électrocinétique est la suivante :

Grandeurs	Électrocinétique	Thermique
Différence de potentiel	$V_1 - V_2$	$T_1 - T_2$
Résistance	R	R_{th}
Flux	I	ϕ_{12}
Conductivité	γ	λ

Q9. Le transfert conducto-convectif se traduit par un flux thermique suivant la loi de Newton. Par une analogie directe, on peut l'écrire comme une loi d'Ohm thermique et identifier la résistance thermique.

$$\phi_{sf} = h(T_s - T_f)S' \Leftrightarrow T_s - T_f = \frac{1}{hS'} \phi_{sf}$$

donc

$$R_{cc} = \frac{1}{hS'} \quad (7)$$

2 Bilan thermique d'un igloo

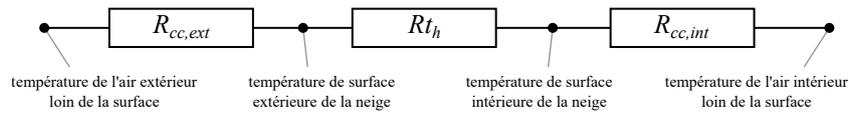
2.1 Résistance conductive de l'igloo

Q10. Dans les expressions précédentes comme dans l'expression donnée ici, la résistance thermique est inversement proportionnelle à la conductivité thermique : $R_{\text{th}} \propto \frac{1}{\lambda}$. On observe sur le graphique que la conductivité thermique λ augmente avec la masse volumique ρ de la neige. Donc si la neige est plus tassée, sa masse volumique augmente, ce qui augmente sa conductivité thermique et diminue alors sa résistance thermique : l'igloo est moins bien isolé. Il est donc préférable de ne pas tasser les blocs de neige pour avoir un igloo mieux isolé.

Q11. Pour $\rho = 200 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$, on lit sur le graphique : $\lambda \simeq 0,14 \text{ W} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$. La résistance thermique est alors de $R_{\text{th}} \simeq 0,13 \text{ K} \cdot \text{W}^{-1}$.

2.2 Prise en compte de la conducto-convection

Q12. Le modèle adapté pour modéliser les phénomènes de conduction et de conducto-convection ici est celui des résistances en série. En effet, les différents phénomènes se font « en série » / « à la suite » par différentes couches de transfert thermique, et avec des température de bords différentes qui ne pourraient correspondre à un modèle en dérivation.



Q13. La résistance thermique équivalente est donc :

$$R_{igloo} = R_{cc,int} + R_{th} + R_{cc,ext} = \frac{1}{h_i S_i} + \frac{L}{2\pi\lambda L(r_i + L)} + \frac{1}{h_e S_e}$$

avec les surfaces des hémisphères : $S_i = 2\pi r_i^2$ et $S_e = 2\pi(r_i + L)^2$

$$R_{igloo} = \frac{1}{2\pi h_i r_i^2} + \frac{L}{2\pi\lambda L(r_i + L)} + \frac{1}{2\pi h_e (r_i + L)^2} \tag{8}$$

Q14. Cette modélisation ne tient pas compte du **rayonnement thermique**. Ce mode de transfert se fait dans les milieux transparents (ici l'air) sans support matériel, donc en parallèle de la convection. La résistance thermique associée devrait donc être placée en parallèle de celles de la conducto-convection (et donc augmenter effectivement le flux thermique total).

2.3 Température intérieure de l'igloo

Q15. On mène les calculs comme en électronique en s'appuyant sur l'analogie précédente (avec ici un générateur de « courant thermique » P). On part ici d'une loi des nœuds :

$$\begin{aligned} P &= P_{igloo} + P_{sol} \\ &= \frac{T_{int} - T_{ext}}{R_{igloo}} + \frac{T_{int} - T_{sol}}{R_{sol}} \\ \Leftrightarrow R_{igloo} R_{sol} P &= (T_{int} - T_{ext}) R_{sol} + (T_{int} - T_{sol}) R_{igloo} \\ \Leftrightarrow T_{int} (R_{sol} - R_{igloo}) &= R_{igloo} R_{sol} P + T_{ext} R_{sol} + T_{sol} R_{igloo} \\ T_{int} &= \frac{P R_{igloo} R_{sol} + T_{ext} R_{sol} + T_{sol} R_{igloo}}{R_{igloo} + R_{sol}} \end{aligned} \tag{9}$$

Remarque : la notion de générateur de courant n'est pas au programme de TPC en 2021-2022.

Q16. Application numérique avec des températures à convertir évidemment en K : $T_{int} \simeq 275 \text{ K} = 2^\circ\text{C}$

Q17. Si on suppose que la résistance thermique augmente de moitié : $R'_{igloo} = 1,5 \times R_{igloo} = 0,22 \text{ K.W}^{-1}$, on obtient : $T'_{int} \simeq 292 \text{ K} = 19^\circ\text{C}$.

On gagne effectivement une vingtaine de degrés comme annoncé dans le texte.

2.4 Influence des conditions météorologiques sur la température de l'igloo

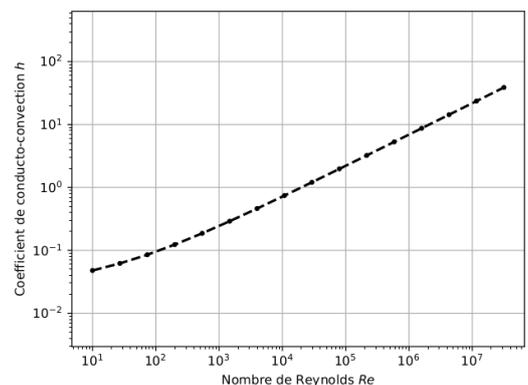
Q18. Calculons une estimation du nombre de Reynolds pour les deux situations avec une vitesse v différente. On rappelle que :

$$Re = \frac{\mu v l}{\eta} \tag{10}$$

où μ est la masse volumique, v la vitesse de l'écoulement, l la taille de l'obstacle (en projeté orthogonal. ici $l = r_i + L = 1,8 \text{ m}$) et η la viscosité dynamique du fluide.

- Pour un vent polaire moyen $v = 70 \text{ km.h}^{-1}$: $Re \sim 2 \times 10^6$
- Pour un vent maximal $v = 200 \text{ km.h}^{-1}$: $Re \sim 7 \times 10^6$.

Le nombre de Reynolds varie peu, et d'après la figure 7, le coefficient de conducto-convection extérieur h varie peu également (typiquement de 10 à 20). En conséquence, la résistance thermique de l'igloo et donc sa température intérieure sont peu affectées par le vent.

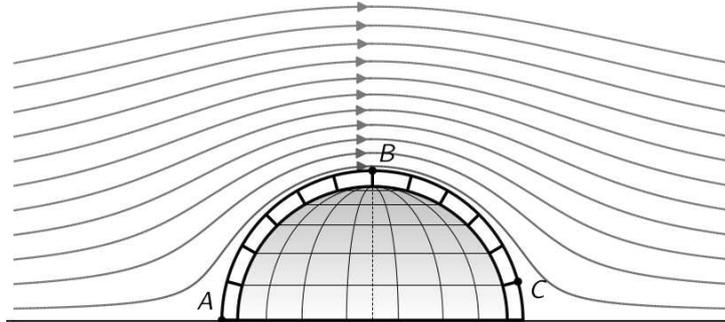


2.5 Aération de l'igloo

On suppose l'écoulement homogène, incompressible, stationnaire et parfait.

Remarque : la notion de fluide parfait comme la relation de Bernoulli ne sont pas au programme de TPC en 2021-2022.

Q19. Le point A est manifestement un point d'arrêt. Pour un écoulement parfait, le champ des vitesses à une interface entre le fluide en écoulement et un obstacle solide doit être parallèle à l'interface. Or les lignes de courant suggèrent que la vitesse en A serait orthogonale à la surface. Donc on peut considérer que $v_A = 0$.



Q20. L'écoulement est *incompressible*, donc le flux des vitesses à travers toute section d'un tube de courant est conservé.

$$\text{écoulement incompressible} \quad \Leftrightarrow \quad \text{div}(\vec{v}) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \oint \vec{v} \cdot d\vec{S} = 0 \quad (11)$$

Q21. On déduit de la propriété précédente que plus les lignes de courants sont resserrées, plus la vitesse de l'écoulement est élevée. On observe sur la figure 8 que les lignes de courants sont plus resserrées en B qu'en C (et plus qu'au point A). On en déduit donc que :

$$v_B > v_C > v_A = 0 \quad (12)$$

Q22. On admet la relation de Bernoulli en supposant les variations d'énergie de pesanteur négligeable : la quantité $p + \frac{1}{2}\mu v^2$ est constante le long d'une ligne de champ. Alors puisque $v_B > v_C$, il vient que $p_B < p_C$ si la quantité est conservée.

Q23. On assimile l'air à un gaz parfait. On peut alors écrire à partir de l'équation d'état des gaz parfaits :

$$\begin{aligned} pV &= nRT \quad \text{avec } n \text{ la quantité de matière et } R \text{ la constante des gaz parfaits} \\ \text{on a } n &= \frac{m}{M} \quad \text{avec } m \text{ la masse et } M \text{ la masse molaire} \\ \text{et } m &= \mu \times V \quad \text{avec } \mu \text{ la masse volumique} \\ \text{donc } pV &= \frac{\mu V}{M} RT \end{aligned}$$

d'où

$$\mu = \frac{M}{RT} p \quad (13)$$

À partir de cette expression, on peut raisonner en remarquant que l'air froid (T faible) est plus dense (μ élevé) et peut « tomber » et rester piégé dans la fosse à froid. À l'inverse, surélever la zone de couchage permet d'être dans une zone d'air moins dense correspondant à une température plus élevée.

Q24. Si on tente de réaliser l'aération de l'igloo par le point B situé au sommet, l'air s'échapperait par effet Venturi (puisque la pression p_B est faible). Or cet air est le plus chaud dans l'igloo car l'air chaud est le moins dense. Il est préférable de garder une poche d'air chaud dans l'igloo.

Problème 2 : Prospection électromagnétique en Antarctique

1 La prospection électrique

Q25. Équation locale de conservation de la charge :

$$\frac{\partial \mu}{\partial t} + \operatorname{div}(\vec{j}) = 0 \quad (14)$$

avec μ la densité volumique de charges et \vec{j} la densité volumique de courants.
Dans le cas stationnaire cette équation se résume à :

$$\operatorname{div}(\vec{j}) = 0 \quad (15)$$

ce qui permet alors de dire que le champ \vec{j} est à **flux conservatif**.

Q26. Calculons le flux total de \vec{j} à travers une sphère de rayon r centrée en A . Dans le sol, la densité de courant se répartit uniformément sur la demi-sphère car on écrit $\vec{j}(M) = j(r)\vec{u}_r$ en coordonnées sphériques. De l'autre côté, le flux total entrant (donc négatif) est le courant I .

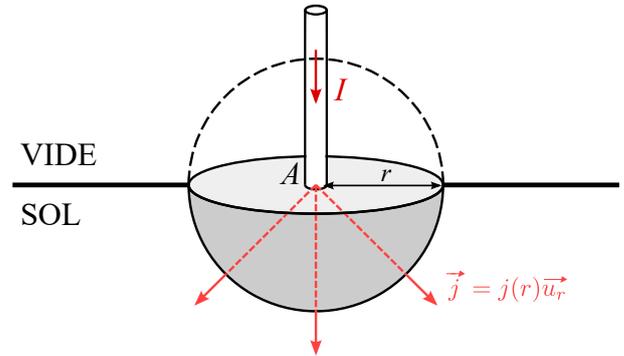
Il vient :

$$\begin{aligned} \oint \vec{j} \cdot d\vec{S} &= \iint_{\text{sol}} \vec{j} \cdot d\vec{S} + \iint_{\text{air}} \vec{j} \cdot d\vec{S} \\ &= +j(r) \times 2\pi r^2 - I \end{aligned}$$

et $\oint \vec{j} \cdot d\vec{S} = 0$

car \vec{j} est à flux conservatif. On a donc :

$$j(r) = \frac{I}{2\pi r^2} \quad (16)$$



Q27. La loi d'Ohm local dans un conducteur ohmique de conductivité électrique γ est :

$$\vec{j} = \gamma \vec{E} \quad (17)$$

donc ici le champ électrique a pour expression :

$$\vec{E} = \frac{I}{2\pi\gamma r^2} \vec{u}_r \quad (18)$$

Q28. Le potentiel électrostatique V est défini à partir du champ électrique par :

$$\vec{E} = -\overrightarrow{\operatorname{grad}}(V) \quad (19)$$

On en déduit l'expression suivante :

$$\begin{aligned} \vec{E} \cdot \vec{u}_r &= -\frac{dV}{dr} \\ -\frac{dV}{dr} &= \frac{I}{2\pi\gamma r^2} \\ \text{d'où } V(r) &= \frac{I}{2\pi\gamma r} + \text{constante} \\ \text{et on choisit } V(r \rightarrow \infty) &= 0 = \text{constante} \\ \text{donc } V(r) &= \frac{I}{2\pi\gamma r} = \frac{\rho I}{2\pi r} \end{aligned}$$

en notant $\rho = \frac{1}{\gamma}$ la résistivité électrique.

Q29. La contre électrode placée en B agit exactement de la même façon que l'électrode placée en A , avec un courant de sens opposé. On peut donc utiliser les expressions précédentes en remplaçant I par $-I$. Les potentiels électriques en un point M sont :

$$V_A(M) = \frac{\rho I}{2\pi r_A} \quad \text{et} \quad V_B(M) = \frac{-\rho I}{2\pi r_B}$$

Par additivité, le potentiel résultant au point M est :

$$V(M) = V_A(M) + V_B(M) = \frac{\rho I}{2\pi} \left(\frac{1}{r_A} - \frac{1}{r_B} \right) \quad (20)$$

Q30. La différence de potentiel entre les points M et N est :

$$\begin{aligned} \Delta V &= V(M) - V(N) \\ &= \frac{\rho I}{2\pi} \left(\frac{1}{r_A(M)} - \frac{1}{r_B(M)} \right) - \frac{\rho I}{2\pi} \left(\frac{1}{r_A(N)} - \frac{1}{r_B(N)} \right) \\ &= \frac{\rho I}{2\pi} \left(\frac{1}{AM} - \frac{1}{BM} - \frac{1}{AN} + \frac{1}{BN} \right) \end{aligned}$$

donc en faisant apparaître un facteur géométrique f lié aux distances, il vient

$$\rho = \frac{2\pi \Delta V}{f I} \quad \text{avec} \quad f = \frac{1}{AM} - \frac{1}{BM} - \frac{1}{AN} + \frac{1}{BN} \quad (21)$$

Q31. Pour tous les points K appartenant au plan médiateur du segment AB , c'est-à-dire tels que $AK = BK$, on a :

$$V(K) = \frac{\rho I}{2\pi} \left(\frac{1}{AK} - \frac{1}{BK} \right) = 0$$

Ce plan est donc une surface équipotentielle de potentiel nul.

On peut également le justifier avec des propriétés de symétrie en électrostatique.

Q32. On s'appuie sur la carte de potentiel fournie (figure 14), et sur les deux lignes équipotentielles données à $\pm 0,02$ V. On prend alors pour points M et N la position des ces lignes pour la profondeur zéro.

On a alors $\Delta V = 2 \times 0,02 = 0,04$ V. Le courant est $I = 100$ mA. Les distances sont : $AM \simeq BN \simeq 20$ m et $AN \simeq BM \simeq 40$ m. Ceci nous permet de calculer le facteur géométrique. On trouve finalement :

$$\rho = \frac{2\pi \Delta V}{f I} \simeq 50 \Omega \cdot \text{m} \quad (22)$$

On peut supposer par exemple que ce sol est fait de calcaires (voir tableau).

Plusieurs matériaux pourraient correspondre ici.

Q33. La figure 15 donnée n'est pas très explicite sur ce qu'elle signifie. On suppose que le premier graphique est un tracé de la résistivité apparente ρ_a en fonction de la distance d'exploration, pour deux distances $A - B$ utilisées; et que sont reportées horizontalement les valeurs de résistivité de trois types de sols.

Le second graphique semble être un schéma des couches géologiques du sous-sols déduites de ces mesures.

En regardant la correspondance des motifs, il semblerait qu'une grande distance $A - B$ soit plus adaptée pour sonder le sol profond (frontière entre les couches ② et ③), mais qu'une distance $A - B$ faible soit plus adaptée pour sonder le sol en surface seulement (frontière entre ① et ②).

2 Méthode tellurique

2.1 Étude du plasma ionosphérique

Q34. Les différentes couches présentées sont ionisées par le rayonnement solaire. En descendant dans l'atmosphère, les rayons sont moins puissants puisqu'une partie a déjà été absorbée par les couches plus hautes. Il est donc logique que la densité électronique issue de l'ionisation soit plus faible dans les couches de plus basse altitude.

Q35. Le rayonnement UV direct du Soleil n'est plus présent la nuit, donc certaines couches de l'ionosphère disparaissent la nuit puisqu'elles ne sont plus ionisées.

Q36. La couche D est celle de plus basse altitude, donc qui reçoit le moins de rayonnement solaire et est la « moins ionisée ». Il est donc cohérent que ce soit celle qui disparaissent en premier dès le coucher du Soleil.

Q37. On peut supposer que la couche F_2 en contact direct avec l'espace, permet aux particules ionisées de s'y échapper si elles ont suffisamment d'énergie, ce qui pourrait expliquer que la densité électronique y est plus faible. Ce n'est pas le cas de la couche F_1 .

2.2 Propagation de l'onde électromagnétique dans le plasma ionosphérique

Q38. Par analyse dimensionnelle, λ est en $\text{kg}\cdot\text{s}^{-1}$. Il s'agit d'un coefficient de friction type frottements fluides.

Q39. L'équation donnée est un bilan mécanique (Principe Fondamental de la Dynamique) avec :

- $m \frac{d\vec{v}}{dt}$: terme inertiel, dérivée de l'impulsion
- $-e\vec{E}$: partie électrique de la force de Lorentz sur un électron
- $-e\vec{v} \wedge \vec{B}$: partie magnétique de la force de Lorentz sur un électron
- $-\lambda\vec{v}$: force de friction que l'on peut supposer due aux impacts entre particules chargées (type modèle de Drude)

Dans un plasma peu dense ($n \sim 10^6 \text{ cm}^{-3} = 10^{12} \text{ m}^{-3}$), on peut probablement négliger la force de friction.

Pour une onde électromagnétique, on s'attend à avoir en ordre de grandeurs : $\|E\| \sim c\|\vec{B}\|$ avec c la vitesse de la lumière dans le vide. Ici avec l'hypothèse de particules non relativistes :

$$\frac{\| -e\vec{v} \wedge \vec{B} \|}{\| -e\vec{E} \|} \sim \frac{evB}{eE} \sim \frac{v}{c} \ll 1$$

On peut donc négliger le terme magnétique devant le terme électrique de la force de Lorentz.

Q40. L'équation mécanique se résume désormais à :

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = -e\vec{E} \quad (23)$$

On étudie la propagation d'une OPPH en utilisant la notation complexe : $\vec{E} = \vec{E}_0 e^{i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})}$.

On a donc l'écriture : $\frac{d}{dt} \mapsto i\omega$.

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = -e\vec{E} \quad \mapsto \quad mi\omega \vec{v} = -e\vec{E}$$

$$\vec{v} = -\frac{e}{im\omega} \vec{E} \quad (24)$$

Q41. En faisant le même raisonnement pour un ion du plasma (charge $+e$, masse m_i).

$$\vec{v}_i = \frac{e}{im_i\omega} \vec{E} \quad (25)$$

Q42. Quelle est la masse typique d'un ion de ce plasma ? On prend un modèle d'atmosphère composé de :

- O_2 à 20% possédant 32 nucléons
- N_2 à 80% possédant 28 nucléons

donc cela donne un ions typique avec 29 nucléons en moyenne. On nous indique également que la masse d'un proton (donc presque celle du neutron aussi) est environ 2000 fois plus élevée que celle de l'électron.

Donc $m_i \sim 29 \times 2000 \times m_e \gg m$. Or les vitesses sont inversement proportionnelles aux masses dans les expressions précédentes donc $\|\vec{v}_i\| \ll \|\vec{v}\|$.

Q43. On peut donc considérer que le vecteur densité volumique de courant électrique est essentiellement lié au mouvement des électrons.

$$\vec{j} = n \times (-e) \times \vec{v} \quad \text{et} \quad \vec{j} = -ne\vec{v}$$

alors avec les résultats précédents :

$$\vec{j} = \frac{ne^2}{im\omega} \vec{E} = \sigma \vec{E} \quad (26)$$

Q44. On nomme $\sigma = \frac{ne^2}{im\omega}$ la conductivité électrique complexe du milieu par analogie avec la loi d'Ohm locale.

Q45. Puissance volumique cédée aux porteurs de charges :

$$\begin{aligned} \langle p_V \rangle &= \frac{1}{2} \text{Re} \left\{ \vec{j} \cdot \vec{E}^* \right\} = \frac{1}{2} \text{Re} \left\{ \frac{ne^2}{im\omega} \vec{E} \cdot \vec{E}^* \right\} \\ &= \frac{ne^2}{2m\omega} \text{Re} \left\{ \frac{1}{i} \|\vec{E}\|^2 \right\} = 0 \end{aligned}$$

Dans le plasma, aucune puissance n'est cédée aux porteurs de charges : $\langle p_V \rangle = 0$. Les champs réels \vec{E} et \vec{j} sont en quadrature de phase.

Q46. Écrivons les équations de Maxwell dans le plasma ionosphérique en notations réelles. La densité électronique de charges $\mu = 0$ car il est indiqué dans le document 2 que le plasma contient un nombre égal d'électrons et d'ions positifs.

$$\begin{aligned}\operatorname{div}(\vec{E}) &= \frac{\mu}{\varepsilon_0} = 0 \\ \operatorname{div}(\vec{B}) &= 0 \\ \operatorname{rot}(\vec{E}) &= -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ \operatorname{rot}(\vec{B}) &= \mu_0 \vec{j} + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}\end{aligned}$$

avec $\vec{j} = \operatorname{Re}\{\underline{\sigma} \underline{E}\}$

Q47. Équation de propagation du champ électrique

$$\begin{aligned}\operatorname{rot}(\operatorname{rot}(\vec{E})) &= \operatorname{rot}(\operatorname{rot}(\vec{E})) \\ \operatorname{grad}(\operatorname{div}(\vec{E})) - \Delta \vec{E} &= \operatorname{rot}\left(-\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}\right) \\ \vec{0} - \Delta \vec{E} &= -\frac{\partial}{\partial t}(\operatorname{rot}(\vec{B})) \\ -\Delta \vec{E} &= -\frac{\partial}{\partial t}\left(\mu_0 \vec{j} + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}\right) \\ \Leftrightarrow \Delta \vec{E} &= \mu_0 \frac{\partial \vec{j}}{\partial t} + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}\end{aligned}$$

en faisant apparaître la célérité de la lumière dans le vide : $c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \varepsilon_0}}$,

$$\Delta \vec{E} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \mu_0 \frac{\partial \vec{j}}{\partial t} \quad (27)$$

Q48. Pour la propagation d'une pseudo-OPPH, on utilise la notation complexe pour faire apparaître une **relation de dispersion** portant sur le module d'onde k . Les dérivées se remplacent avec : $\frac{\partial}{\partial t} \mapsto \times i\omega$ et $\Delta = \vec{\nabla}^2 \mapsto \times (-i\vec{k})^2 = -k^2$.

$$\begin{aligned}\Delta \vec{E} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} &= \mu_0 \frac{\partial \vec{j}}{\partial t} \\ \mapsto -k^2 \underline{\vec{E}} - \frac{1}{c^2} \times (i\omega)^2 \underline{\vec{E}} &= \mu_0 \times i\omega \underline{\vec{j}} \\ \left(-k^2 + \frac{\omega^2}{c^2}\right) \underline{\vec{E}} &= \mu_0 i\omega \times \frac{ne^2}{im\omega} \underline{\vec{E}} \\ \Leftrightarrow \left(-k^2 + \frac{\omega^2}{c^2} - \frac{ne^2 \mu_0}{m}\right) \underline{\vec{E}} &= \vec{0} \\ \text{donc } -k^2 + \frac{\omega^2}{c^2} - \frac{ne^2 \mu_0}{m} &= 0\end{aligned}$$

En mettant au même dénominateur, on fait apparaître un terme homogène à une pulsation ce qui permet d'écrire :

$$k^2 = \frac{\omega^2 - \omega_p^2}{c^2} \quad (28)$$

avec $\omega_p = \sqrt{\frac{ne^2}{m\varepsilon_0}}$, la pulsation plasma du milieu.

Q49. Le plasma ionosphérique peut être considéré comme un filtre passe-haut pour les ondes électromagnétiques car :

- à basse fréquence $\omega < \omega_p$: $k^2 < 0$ donc $k = i|k|$ imaginaire pur. L'onde est alors **évanescence** et ne se propage pas au sein du plasma, en plus d'être exponentiellement atténuée.

- à haute fréquence $\omega > \omega_p : k^2 > 0$ donc $k \in \mathbb{R}$ réel.
L'onde peut alors se propager sans atténuation dans le plasma.

Q50. Dans le cas d'une propagation dans le plasma : $k^2 > 0$ et

$$k = \sqrt{\frac{\omega^2 - \omega_p^2}{c^2}} = \frac{\omega}{c} \sqrt{1 - \left(\frac{\omega_p}{\omega}\right)^2} \tag{29}$$

La vitesse de phase est alors :

$$v_\phi(\omega) = \frac{\omega}{k(\omega)} = \frac{c}{\sqrt{1 - \left(\frac{\omega_p}{\omega}\right)^2}} \tag{30}$$

Dans ce cas, on a $v_\phi > c$ la vitesse de la lumière dans le vide. Cependant la vitesse de phase ne représente pas un transport réel d'énergie ou d'information. Si on fait le calcul en écrivant le vecteur de Poyntig, on fera apparaître la vitesse de groupe qui elle reste inférieure à c .

Remarque : la notion de vitesse de phase et de vitesse de groupe et donc ce commentaire probablement attendu sont hors programme de TPC en 2021-2022.

Q51. On souhaite étudier la configuration limite dans laquelle le plasma laisse passer les ondes telluriques. Le plasma laisse passer les ondes si $\omega > \omega_p$. Pour que toutes les ondes passent, il faut que celles de plus faible pulsation passent, ce qui correspond aux périodes maximales.

$\omega_{\min} = \frac{2\pi}{T_{\max}}$ avec $T_{\max} = 30$ s. On souhaite avoir :

$$\begin{aligned} \omega_p < \omega_{\min} &\Leftrightarrow \sqrt{\frac{n_{\max} e^2}{m \epsilon_0}} < \frac{2\pi}{T_{\max}} \\ \Leftrightarrow n_{\max} < \frac{m \epsilon_0}{e^2} \times \left(\frac{2\pi}{T_{\max}}\right)^2 &\simeq 10^{-5} \text{ m}^{-3} \simeq 10^{-11} \text{ cm}^{-3} \end{aligned}$$

Cette valeur est très inférieure aux valeurs des couches ionosphériques présentées dans le document 2 (10^4 à 10^6 cm^{-3}). Donc les ondes telluriques sont totalement réfléchies par l'ionosphère.

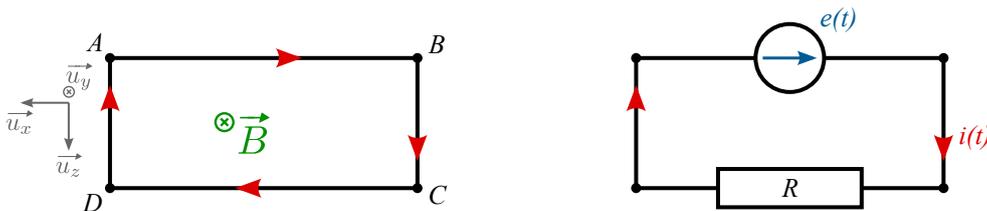
2.3 Courant tellurique

Q52. Dans le vide, les ondes électromagnétiques sont structurées telles que $(\vec{E}, \vec{B}, \vec{k})$ forme un trièdre direct. Ici on a $\vec{k} \parallel \vec{u}_z$ et $\vec{E} \parallel \vec{u}_x$ donc le champ magnétique \vec{B} est selon \vec{u}_y . On supposera que cette direction ne change pas dans le sol.

Q53. On suppose que l'on peut négliger les variations **spatiales** du champ magnétique \vec{B} sur la hauteur h de la spire modèle, donc que $h \ll \lambda$ la longueur d'onde de l'onde électromagnétique.

Q54. La loi de Lenz indique que les effets du phénomène d'induction tendent à s'opposer aux causes qui les ont créés. Par exemple ici, le phénomène d'induction dû aux variations d'un champ magnétique externe $\vec{B}(t)$ va induire un courant électrique dans la spire, de sorte à ce que le champ magnétique induit ainsi créé par la spire soit de sens opposé à ces variations de $\vec{B}(t)$.

Q55. On représente sur le schéma ci-dessous le sens de circulation du courant électrique choisi dans la spire et le schéma électrique équivalent tenant compte d'une résistance totale R . Le phénomène d'induction crée une force électromotrice $e(t)$.



Q56. Force électromotrice induite

$$e(t) = -\frac{d\Phi}{dt} \quad \text{loi de Faraday où } \Phi \text{ est le flux du champ magnétique à travers la spire}$$

et $\Phi = \Phi_{\text{ext}} + \Phi_{\text{propre}}$ les flux du champ extérieur de l'onde et le flux propre d'auto-induction

$$\Phi_{\text{propre}} = Li(t) \quad \text{par définition}$$

$$\text{et } \Phi_{\text{ext}} = \iint \vec{B} \cdot d\vec{S} = \int_0^a \int_0^h B_0 \cos(\omega t) \vec{u}_y \cdot dx dz \vec{u}_y = B_0 \cos(\omega t) ha$$

$$\text{donc } e(t) = B_0 \omega \sin(\omega t) ha - L \frac{di}{dt}$$

Q57. En appliquant la loi des mailles dans le circuit électrique schématisé précédemment, on obtient :

$$\begin{aligned} e(t) &= Ri(t) \\ B_0 \omega \sin(\omega t) ha - L \frac{di}{dt} &= Ri(t) \\ \Leftrightarrow \frac{di}{dt} + \frac{R}{L} i(t) &= \frac{B_0 ah \omega}{L} \sin(\omega t) \end{aligned}$$

On peut faire apparaître le temps caractéristique $\tau = \frac{L}{R}$ dans l'équation précédente qui prend alors une forme canonique d'équation différentielle d'ordre 1 (avec second membre harmonique).

Q58. Pour déterminer l'amplitude I_m du courant électrique $i(t)$ en régime sinusoïdal forcé, on propose d'adopter la notation complexe : $\underline{i}(t) = \underline{i}_m e^{i\omega t}$ avec $I_m = |\underline{i}_m|$.

L'équation précédente devient alors (attention $\omega \sin(\omega t)$ est une dérivée du terme initial $\cos(\omega t)$) :

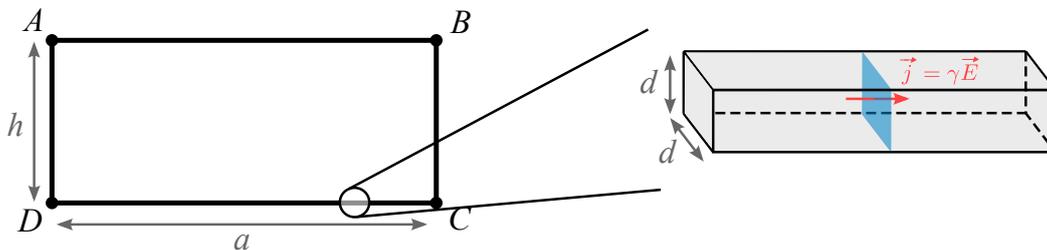
$$\begin{aligned} i\omega \underline{i}_m + \frac{1}{\tau} \underline{i}_m &= \frac{iB_0 ah \omega}{L} \\ \Leftrightarrow \underline{i}_m &= \frac{B_0 ah}{L} \frac{i\omega \tau}{1 + i\omega \tau} \end{aligned}$$

Donc l'amplitude recherchée est :

$$I_m = |\underline{i}_m| = \frac{B_0 ah \omega \tau}{L} \frac{1}{\sqrt{1 + (\omega \tau)^2}} \tag{31}$$

Q59. À partir des données et hypothèses proposées, cherchons une estimation de la résistance R , puis du temps τ , afin de simplifier enfin l'expression de I_m .

On prend un modèle rectangulaire pour les portions de spire, avec une section carrée d^2 , et $d = 1,0 \text{ cm}$. Les longueurs des portions verticales et horizontales sont $h = 10 \text{ m}$ et $a = 1,0 \text{ km}$.



On a $a \gg h \gg d$. On peut donc supposer que la densité volumique de courant est uniforme sur la section de notre modèle. Le courant total traversant une section est :

$$I = \iint \vec{j} \cdot d\vec{S} = j \times d^2 = \gamma E \times d^2$$

avec γ la conductivité électrique du matériau en prenant un modèle de loi d'Ohm. Pour une portion de longueur totale L on a un lien entre champ électrique et différence de potentiel du type : $E \simeq \frac{\Delta V}{L}$, ce qui permet de passer à l'écriture de la loi d'Ohm globale :

$$I = \gamma \frac{\Delta V}{L} d^2 \quad \Leftrightarrow \quad \Delta V = \frac{L}{\gamma d^2} I = R I$$

Dans notre modèle, on a $a \gg h$ donc on peut considérer que la résistance électrique est essentiellement due aux portions horizontales : deux portions de longueur a . On prendra donc pour longueur de la spire : $L \simeq 2a$.

En conclusion la résistance du circuit est donc : $R = \frac{2a}{\gamma d^2} \simeq 10^9 \Omega$.

On en déduit une valeur du temps caractéristique, avec $L = 1,0 \text{ mH}$: $\tau = \frac{L}{R} \simeq 10^{-12} \text{ s}$.

Enfin, si on compare à la pulsation des ondes $\omega = 0,63 \text{ rad.s}^{-1}$, on a : $\omega\tau \simeq 6,3 \cdot 10^{-11} \lll 1$.

On peut donc sans problème simplifier l'expression de l'amplitude du courant I_m :

$$I_m = \frac{B_0 a h \omega \tau}{L} \frac{1}{\sqrt{1 + (\omega\tau)^2}} \simeq \frac{B_0 a h \omega \tau}{L} = \frac{B_0 a h \omega}{R} \simeq \frac{B_0 h \omega \gamma d^2}{2}$$

Q60. L'amplitude de densité volumique de courant supposée uniforme sur la section d^2 est :

$$J_m = \frac{I_m}{d^2} \simeq \frac{B_0 h \omega \gamma}{2} = 6,3 \cdot 10^{-7} \text{ A.m}^{-2} = 0,63 \text{ A.km}^{-2}$$

Cette valeur est bien du même ordre de grandeur que les 2 A.km^{-2} annoncés dans l'énoncé en début de partie.

Q61. Dans les expressions précédentes, on fait apparaître un lien de proportionnalité direct entre l'amplitude du champ magnétique B_0 et la conductivité du matériau γ . On peut supposer que des mesures du champ magnétique total au niveau de la surface (résultant des ondes électromagnétiques incidentes et du champ induit) permettent d'accéder à une information sur la conductivité des sols, et notamment ses variations en se déplaçant.