

Colle N°20 – Semaine pronote N°29 : 16 au 20 Mars 2026

■ **Au programme des exercices**

→ **Chapitre OPT4 : Interférences avec division d'amplitude**

■ **Questions de cours seules**

1. ♥♥ Rappel de la constitution d'un interféromètre de Michelson et son schéma équivalent en justifiant. Définir les deux configurations lame d'air et coin d'air. Pour chaque configuration :
  - (a) Donner l'allure de la figure d'interférences ;
  - (b) Indiquer le lieu de localisation et la position de la lentille de projection permettant de l'observer ;
  - (c) Indiquer les conditions d'éclairage et la position du condenseur permettant de les atteindre.
  
2. Établir l'expression de la différence de marche en lame d'air. La distance entre sources secondaires doit être clairement justifiée par un schéma propre.
  
3. ♥♥ On considère la figure d'interférences obtenue en lame d'air d'épaisseur  $e$ , observée dans le plan focal image d'une lentille convergente de focale  $f'$ . La source est supposée monochromatique. Rappel de l'expression de la différence de marche associée à un angle d'incidence  $i$  quelconque, puis l'ordre d'interférence. Que vaut l'ordre maximal et à quel endroit est-il obtenu ? Quelle est l'allure de la figure obtenue pour un ordre au centre nul ?
  
4. ♥ Considérons un Michelson en lame d'air d'épaisseur  $e$ . Établir la relation entre l'ordre  $p$  d'un anneau et son rayon  $r$  sur l'écran. En déduire le nombre d'anneaux observés dans une figure d'interférences de rayon  $R$  en fonction de  $e$ .
  
5. ♥ Considérons un Michelson en lame d'air éclairé par un doublet spectral.
  - (a) Établir l'expression de l'éclairement au centre des anneaux en fonction de l'épaisseur  $e$  de la lame d'air. Interpréter les différents termes (facteur de contraste et terme d'interférences).
  - (b) Définir les coïncidences et anti-coïncidences.
  - (c) Exprimer l'écart de longueur d'onde  $\Delta\lambda$  en fonction de la distance  $\Delta x$  dont le miroir mobile est charioté entre deux anti-coïncidences successives.
  
6. ♥ Le Michelson réglé en coin d'air est éclairé par une source monochromatique ; il y a alors une quarantaine de franges rectilignes sur les 1,5 cm de largeur du miroir. En déduire une estimation de l'angle  $\alpha$  du coin d'air que forment les deux miroirs. Que se passe-t-il si on augmente  $\alpha$  ?
  
7. On envoie sur une photocathode en potassium une radiation ultraviolette (raie du mercure)  $\lambda_1 = 253,7$  nm ; on constate que l'énergie maximale des photoélectrons éjectés est de 3,14 eV. Si on envoie une raie visible  $\lambda_2 = 589$  nm (raie jaune du sodium), l'énergie maximale est alors de 0,36 eV. Retrouver la valeur de la constante de Planck. Calculer la longueur d'onde maximale des radiations pouvant produire un effet photo-électrique sur le potassium.
  
8. ♥ L'énergie de l'atome d'hydrogène vaut  $E_n = \frac{-13,6}{n^2}$  (eV) ; le nombre  $n$  entier intervenant dans l'expression quantifiée de l'énergie désigne aussi le **niveau d'énergie**. Dans le cas de l'atome d'hydrogène, calculer la longueur d'onde de l'onde à utiliser pour passer de l'état fondamental à l'état  $n = 3$  de manière photochimique ; la fréquence de l'onde émise quand l'atome passe de l'état excité  $n = 3$  à l'état  $n = 2$ .
  
9. ♥♥ Une particule quantique a une fonction d'onde  $\Psi(x) = A \exp\left(-\frac{x}{a}\right)$  pour  $x > 0$  et  $\Psi = 0$  pour  $x < 0$ . Calculer la constante  $A$ . Quelle est la probabilité de présence dans l'intervalle  $[0, a]$  ?

10. ♥ Relation d'indétermination : inégalité d'Heisenberg spatiale dans le cas d'un problème à une dimension  $x$  (définir soigneusement les différentes grandeurs intervenant dans le cas d'une particule quantique matérielle de masse  $m$  non relativiste).

11. ♥ On cherche des solutions stationnaires de l'équation de Schrödinger  $i\hbar \frac{\partial \Psi(x,t)}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \Psi(x,t)}{\partial x^2} + V(x)\Psi(x,t)$  sous la forme  $\Psi(x,t) = \varphi(x) \cdot f(t)$ . Déterminer les équations vérifiées par  $\varphi(x)$  et  $f(t)$ . Etablir l'expression  $f(t)$  de l'évolution temporelle de la fonction d'onde en faisant apparaître la pulsation  $\omega$  associée.

12. ♥♥ On considère une particule quantique libre à une dimension cartésienne caractérisée par une énergie potentielle nulle et une énergie totale  $E$  constante. Elle peut se déplacer dans tout l'espace de  $x = -\infty$  à  $x = +\infty$ , et vérifie l'équation de Schrödinger :  $i\hbar \frac{\partial \Psi(x,t)}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \Psi(x,t)}{\partial x^2} + V(x)\Psi(x,t)$ . On étudie les solutions stationnaires de la forme  $\Psi(x,t) = \varphi(x) \cdot f(t)$  ; préciser l'expression retenue pour  $f(t)$  en fonction de  $E$ , puis établir l'équation de Schrödinger indépendante du temps que satisfait la fonction d'espace  $\varphi(x)$ . Résoudre alors cette équation en discutant les cas  $E < 0$  et  $E > 0$  (on ne cherchera pas à déterminer les constantes d'intégration qui apparaissent). Quelle est la forme des fonctions d'onde associées ?

13. Soit une onde de De Broglie, de fonction d'onde  $\Psi(x,t) = A \exp[-i(\omega t \pm kx)]$ , décrivant une particule libre dans un état stationnaire ; exploiter l'équation de Schrödinger pour établir la relation de dispersion associée. Exploiter la relation de Planck Einstein pour exprimer cette relation de dispersion en fonction de l'énergie et commenter. Etablir l'expression de la vitesse de phase.

14. ♥ On considère une particule quantique de masse  $m$  enfermée dans un puits de potentiel infini caractérisé par un potentiel de la forme :  $V(x) = \begin{cases} +\infty & \text{pour } x < 0 \text{ et } x > a \\ 0 & \text{pour } 0 \leq x \leq a \end{cases}$ , vérifiant l'équation de Schrödinger :

$$i\hbar \frac{\partial \Psi(M,t)}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta \Psi(M,t) + V(M,t)\Psi(M,t)$$

On recherche les solutions stationnaires sous leur forme  $\Psi(x,t) = \varphi(x) \cdot \exp(-i\omega t)$ . Rappeler la solution  $\varphi(x)$  en dehors du puits (points d'abscisse  $x$  tels que  $V(x) \rightarrow +\infty$ ). A l'intérieur du puits, soit pour  $0 \leq x \leq a$ , résoudre complètement l'équation de Schrödinger pour  $E < 0$ , puis pour  $E = 0$

15. ♥♥ On considère une particule quantique de masse  $m$  enfermée dans un puits de potentiel infini caractérisé par un potentiel de la forme :  $V(x) = \begin{cases} +\infty & \text{pour } x < 0 \text{ et } x > a \\ 0 & \text{pour } 0 \leq x \leq a \end{cases}$ , vérifiant l'équation de Schrödinger :

$$i\hbar \frac{\partial \Psi(M,t)}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta \Psi(M,t) + V(M,t)\Psi(M,t)$$

On recherche les solutions stationnaires sous leur forme  $\Psi(x,t) = \varphi(x) \cdot \exp(-i\omega t)$  pour  $E > 0$  et pour  $0 \leq x \leq a$ .

Rappeler la solution  $\varphi(x)$  en dehors du puits (points d'abscisse  $x$  tels que  $V(x) \rightarrow +\infty$ ). A l'intérieur du puits, soit pour  $0 \leq x \leq a$ , établir l'expression de  $\varphi(x)$  et montrer que les différentes grandeurs caractéristiques de la particule sont quantifiées. Etablir l'expression complète de  $\psi_n(x,t)$

16. ♥♥ Soit une particule quantique arrivant depuis  $x < 0$  sur une marche de potentiel telle que  $V(x) = \begin{cases} 0 & \text{pour } x < 0 \\ V_0 & \text{pour } x \geq 0 \end{cases}$ .

On étudie les solutions stationnaires associées à  $E > 0$  solutions de

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2 \varphi(x)}{dx^2} + V(x)\varphi(x) = E\varphi(x)$$

(a) Région I correspondant à  $x < 0$  : déterminer la forme  $\varphi_I(x)$  des solutions.

(b) Région II correspondant à  $x > 0$  : Dans le cas où  $E \geq V_0$ , établir l'expression  $\varphi_{II}(x)$  des solutions dans la région II et commenter les résultats obtenus.

17. ♥♥ Soit une particule quantique arrivant depuis  $x < 0$  sur une marche de potentiel telle que  $V(x) = \begin{cases} 0 & \text{pour } x < 0 \\ V_0 & \text{pour } x \geq 0 \end{cases}$ .

On étudie les solutions stationnaires associées à  $E > 0$  solutions de

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2 \underline{\varphi}(x)}{dx^2} + V(x) \underline{\varphi}(x) = E \underline{\varphi}(x)$$

- (a) Région I correspondant à  $x < 0$  : déterminer la forme  $\varphi_I(x)$  des solutions.
- (b) Région II correspondant à  $x > 0$  : Dans le cas où  $E < V_0$ , établir l'expression  $\varphi_{II}(x)$  des solutions dans la région II et commenter les résultats obtenus.

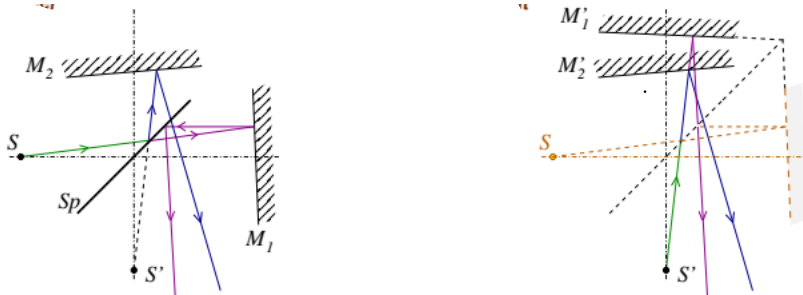
**La barrière de potentiel n'a pas encore été traitée**

## ■ Questions de cours avec éléments de réponse

1. ♥♥ Rappeler la constitution d'un interféromètre de Michelson et son schéma équivalent en justifiant. Définir les deux configurations lame d'air et coin d'air. Pour chaque configuration :

- (a) Donner l'allure de la figure d'interférences ;  
 (b) Indiquer le lieu de localisation et la position de la lentille de projection permettant de l'observer ;  
 (c) Indiquer les conditions d'éclairage et la position du condenseur permettant de les atteindre.

Un rayon lumineux issu de la source est à moitié réfléchi par la séparatrice ( $S$ ) (lame semi-réfléchissante) vers le miroir fixe  $M_2$ , et à moitié transmis vers le miroir  $M_1$ . Tout se passe comme si on remplaçait  $M_1$  par  $M_1'$ , son symétrique par rapport à ( $S$ ). On note  $e = M_1'M_2$  et  $\alpha$  l'angle entre les miroirs  $M_2$  et  $M_1'$ .



Système réel

Système équivalent avec miroir fictif en couche d'air

	Coin d'air : $e = 0$ et $\alpha \neq 0$	Lame d'air : $e \neq 0$ et $\alpha = 0$
<b>Schéma équivalent</b>		
<b>Condition d'éclairage</b>	Quasi-parallèle (pour avoir OPPM)	Non parallèle
<b>Réalisation</b>	Source dans le PFO d'une lentille convergente	Source suivie d'un condenseur pour introduire de l'angle et optimiser l'éclairage des miroirs.
<b>Figure d'interférence</b>	Franges d'égales épaisseurs	Anneaux d'égales inclinaisons
<b>Localisation en source étendue</b>	Sur les miroirs	A l'infini
<b>Condition d'observation</b>	Image des miroirs à l'aide d'une lentille convergente sur l'écran	Image dans le plan focal image d'une lentille convergente.
<b>Synthèse</b>		

2. Établir l'expression de la différence de marche en lame d'air. La distance entre sources secondaires doit être clairement justifiée par un schéma propre.

**Méthode N°1 :** les sources secondaires sont  $S_1 = \text{sym}_{\mathcal{M}'_1}(S')$  et  $S_2 = \text{sym}_{\mathcal{M}'_2}(S')$ .

Dans le cas du montage en lame d'air d'épaisseur  $e$ , en introduisant les points  $I_1$  et  $I_2$  d'intersection de  $MS_1$  et  $MS_2$  avec les miroirs  $\mathcal{M}'_1$  et  $\mathcal{M}'_2$ , on a :

$$SI_1 = I_1S_1 \text{ et } SI_2 = I_2S_2 \text{ avec } I_1I_2 = e \text{ et}$$

$$SI_2 = SI_1 + I_1I_2 = I_1S_1 + e = I_2S_2 = I_2S_1 + S_1S_2, \text{ soit}$$

$$S_1S_2 = I_1S_1 + e - I_2S_1 = 2e$$

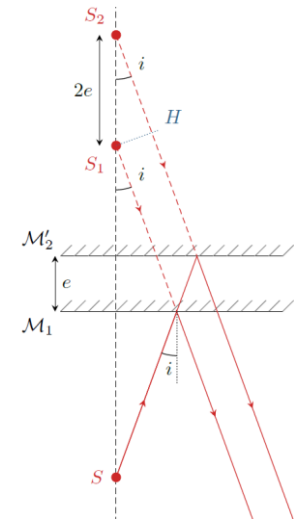
Les deux sources secondaires sont alors séparées par une distance  $2e$ .

On note  $H$  est le projeté orthogonal de  $S_2$  sur le rayon 1.

D'après le principe du retour inverse de la lumière et le théorème de Malus,  $(MS_1) = (MH)$

$$\delta_{2/1}(M) = (SM)_2 - (SM)_1 = (S_2H) + (HM) - (S_1M) = -(S_1H)$$

$$\text{Comme } [S_2S_1] = 2e : \delta_{2/1}(M) = n_{\text{air}}[S_2S_1]\cos(i) = 2n_{\text{air}}e\cos(i)$$



### Méthode N°2

$$\text{Par définition : } \delta(M) = (SM)_2 - (SM)_1$$

$$\text{Avec } (SM)_1 = (SI) + (IL) + (LM)$$

$$(SM)_2 = (SI) + (IJK) + (KM)$$

Si le point  $M$  d'observation était une source ponctuelle, d'après le théorème de Malus,  $L$  et  $K$  appartiendraient au même plan d'onde.

D'après le principe du retour inverse de la lumière, on a donc  $(LM) = (KM)$ , d'où

$$\delta(M) = (IJK) - (IL)$$

**Expression de  $(IJK)$  :**

$$\text{Soit } P \text{ le projeté de } J \text{ sur } IK : \text{ Dans le triangle } IJP, \cos(i) = \frac{e}{IJ} \text{ soit } IJ = JK = \frac{e}{\cos(i)}$$

$$\text{D'où } (IJK) = n_{\text{air}}(IJ + JK) = n_{\text{air}} \frac{2e}{\cos(i)}$$

**Expression de  $(IL)$  :**

$$\text{Dans le triangle } IKL : \sin(i) = \frac{IL}{IK} \quad IK = \frac{IL}{\sin(i)}$$

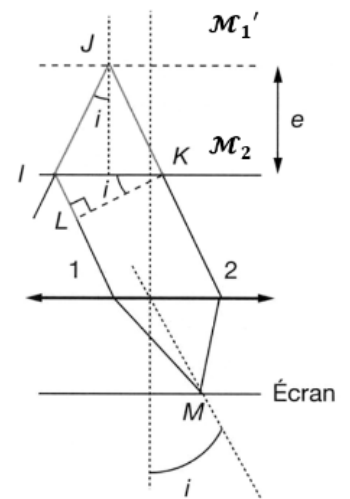
$$\text{Dans le triangle } IJP : \tan(i) = \frac{IK}{e} \quad IK = 2e \tan(i) = \frac{IL}{\sin(i)}$$

$$\text{Finalement : } IL = 2e \tan(i) \sin(i)$$

$$\delta(M) = n_{\text{air}} \left( 2 \frac{e}{\cos(i)} - 2e \tan(i) \sin(i) \right)$$

$$\delta(M) = 2n_{\text{air}}e \left( \frac{1 - \sin^2(i)}{\cos(i)} \right)$$

$$\boxed{\delta(M) = 2n_{\text{air}}e \cos(i)}$$



3. ♥♥ On considère la figure d'interférences obtenue en lame d'air d'épaisseur  $e$ , observée dans le plan focal image d'une lentille convergente de focale  $f'$ . La source est supposée monochromatique. Rappeler l'expression de la différence de

marque associée à un angle d'incidence  $i$  quelconque, puis l'ordre d'interférence. Que vaut l'ordre maximal et à quel endroit est-il obtenu ? Quelle est l'allure de la figure obtenue pour un ordre au centre nul ?

Pour une configuration en lame d'air, différence de marche :

$$\delta(M) = 2n_{\text{air}}e\cos(i)$$

Les rayons ayant un angle d'incidence  $i$  donné convergent tous en un unique point  $M$  du plan focal = foyer image secondaire déterminé par le « rayon non dévié » (voir schéma). On a donc  $(OM)$  qui forme un angle  $i$  avec la verticale.

Ordre d'interférence : 
$$p = \frac{\delta(M)}{\lambda} = \frac{2n_{\text{air}}e\cos(i)}{\lambda}$$

Ordre d'interférence au centre de la figure : il correspond à angle d'inclinaison nul :

$$p(i = 0) = p_c = \frac{2n_{\text{air}}e}{\lambda}$$

Si  $e \neq 0$ ,  $p_c$  a une valeur quelconque non nulle : différent du montage des fentes d'Young.

En s'éloignant du centre,  $i$  augmente donc  $\cos(i)$  diminue, donc  $p$  diminue. On exploite en général l'approximation des petits angles pour une expression approchée (DL à l'ordre 2 du cosinus) :

$$\delta(M) = 2n_{\text{air}}e\cos(i) \underset{DL2}{\approx} 2n_{\text{air}}e\left(1 - \frac{i^2}{2}\right) \text{ soit}$$

$$p(M) = \frac{\delta(M)}{\lambda} = \frac{2n_{\text{air}}e}{\lambda}\left(1 - \frac{i^2}{2}\right) = p(i)$$

L'ordre diminue en s'éloignant du centre mais ne s'annule a priori pas.

On a donc 
$$p_{\text{max}} = p(i = 0) = p_c = \frac{2n_{\text{air}}e}{\lambda}$$

4. Considérons un Michelson en lame d'air d'épaisseur  $e$ . Établir la relation entre l'ordre  $p$  d'un anneau et son rayon  $r$  sur l'écran. En déduire le nombre d'anneaux observés dans une figure d'interférences de rayon  $R$  en fonction de  $e$ .

Dans le triangle  $OO'M$  :  $\tan(i) = \frac{OO'}{O'M} = \frac{r(i)}{f'}$  d'où dans le cadre de l'approximation des petits angles :

$$r(i) = f' \cdot \tan(i) \sim f' \cdot i$$

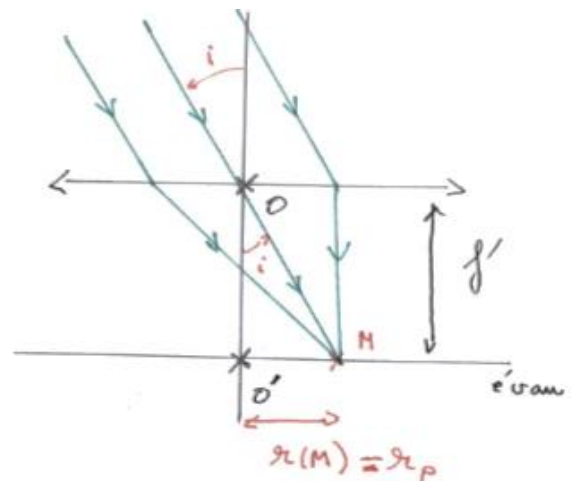
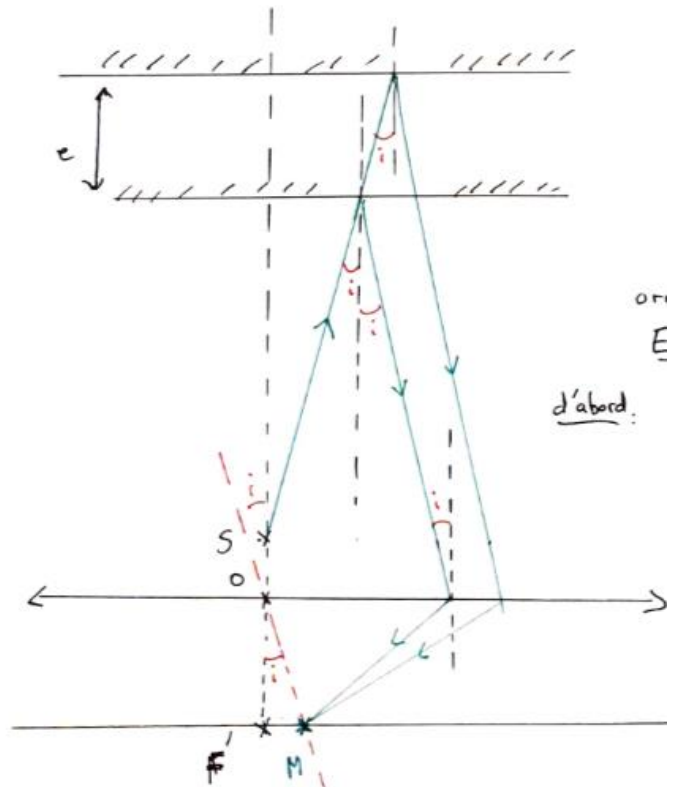
En exploitant l'expression de l'ordre d'interférence

$$p(i) = \frac{2n_{\text{air}}e}{\lambda}\left(1 - \frac{i^2}{2}\right) :$$

$$p(r_p) = \frac{2n_{\text{air}}e}{\lambda}\left(1 - \frac{r_p^2}{2f'^2}\right) = p_c\left(1 - \frac{r_p^2}{2f'^2}\right)$$

Ordre minimal :

L'ordre est minimal si le terme entre parenthèses est minimal, donc pour  $r$  élevé : l'ordre est minimal sur le contour de la figure. On a alors



$$p_{\min} = p(r=R) = \frac{2n_{\text{air}}e}{\lambda} \left(1 - \frac{R^2}{2f'^2}\right)$$

On a alors  $p_{\max} - p_{\min} = \frac{2n_{\text{air}}e}{\lambda} - \frac{2n_{\text{air}}e}{\lambda} \left(1 - \frac{R^2}{2f'^2}\right) = \frac{n_{\text{air}}e}{\lambda} \frac{R^2}{f'^2}$  qui donne l'ordre de grandeur du nombre d'anneaux visibles. Ce nombre augmente avec  $R$  et  $e$  et diminue avec  $\lambda$  et  $f'$ .

Quand  $e$  tend vers zéro (contact optique),  $p_{\max} - p_{\min} \rightarrow 0$  : le nombre d'anneaux visibles tend vers zéro également.

5. ❤️ Considérons un Michelson en lame d'air éclairé par un doublet spectral.

(a) Établir l'expression de l'éclairement au centre des anneaux en fonction de l'épaisseur  $e$  de la lame d'air. Interpréter les différents termes (facteur de contraste et terme d'interférences).

(b) Définir les coïncidences et anti-coïncidences.

(c) Exprimer l'écart de longueur d'onde  $\Delta\lambda$  en fonction de la distance  $\Delta x$  dont le miroir mobile est charioté entre deux anti-coïncidences successives.

1) Éclairement au centre des anneaux :  $i=0$  donc  $\delta = n_{\text{air}} \times 2e$

Les 2 raies du sodium sont incohérentes :

$$\mathcal{E} = \mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_2$$

avec pour  $\mathcal{E}_i = 2\mathcal{E}_0 \left(1 + \cos \frac{2\pi\delta}{\lambda_i}\right)$  soit

$$\mathcal{E} = 2\mathcal{E}_0 \left[ 2 + \cos\left(\frac{2\pi\delta}{\lambda_1}\right) + \cos\left(\frac{2\pi\delta}{\lambda_2}\right) \right]$$

avec  $\cos p + \cos q = 2 \cos\left(\frac{p+q}{2}\right) \cos\left(\frac{p-q}{2}\right)$

ici  $\frac{p+q}{2} = \frac{2\pi\delta}{\lambda} \left(\frac{1}{\lambda_1} + \frac{1}{\lambda_2}\right)$  et  $\lambda_i = \lambda_0 \pm \frac{\Delta\lambda}{2}$   
(approximation usuelle :  $\Delta\lambda \ll \lambda_0$ )

$$\frac{1}{\lambda_1} + \frac{1}{\lambda_2} = \frac{\lambda_1 + \lambda_2}{\lambda_1 \lambda_2} \approx \frac{2\lambda_0}{\lambda_0^2} = \frac{2}{\lambda_0} \quad \text{soit} \quad \frac{p+q}{2} = \frac{2\pi\delta}{\lambda_0}$$

$$\frac{p-q}{2} = \frac{2\pi\delta}{\lambda} \left(\frac{1}{\lambda_1} - \frac{1}{\lambda_2}\right) = \frac{2\pi\delta}{\lambda} \left[\frac{\Delta\lambda}{\lambda_0^2}\right]$$

$$\mathcal{E} = 4\mathcal{E}_0 \left[ 1 + \cos\left(\frac{2\pi\delta}{\lambda_0}\right) \cos\left(\frac{2\pi\delta \Delta\lambda}{\lambda \lambda_0^2}\right) \right]$$

$$E = 4 E_0 \left[ 1 + \cos \left( \frac{4\pi n_{\text{air}} e}{\lambda} \right) \cos \left( \frac{2\pi n_{\text{air}} e \Delta l}{\lambda^2} \right) \right]$$

En prenant  $n_{\text{air}} = 1$  :

$$E = \underbrace{4 E_0}_{E_m} \left[ 1 + \cos \left( \frac{4\pi e}{\lambda} \right) \underbrace{\cos \left( \frac{2\pi e \Delta l}{\lambda^2} \right)}_{\Gamma(e)} \right] \quad \text{car } \frac{\lambda^2}{\Delta l} \gg \lambda$$

$\Gamma(e)$  facteur de contraste qui dépend de  $e$

(Rmq: facteur de contraste dépend toujours de la différence de marche  $\delta$  lorsqu'il s'agit de cohérence temporelle, cf expressions de  $\frac{p+q}{2}$  et  $\frac{p-q}{2}$  de la forme  $\delta r(\dots)$ )

2) En charriottant le miroir mobile, on fait varier continuellement  $e$  donc  $\Gamma(e)$  : on obtient des max et des min de  $\Gamma(e)$  = coïncidences et anti-coïncidences = battements de contraste.

Ecart entre 2 anti-coïncidences :

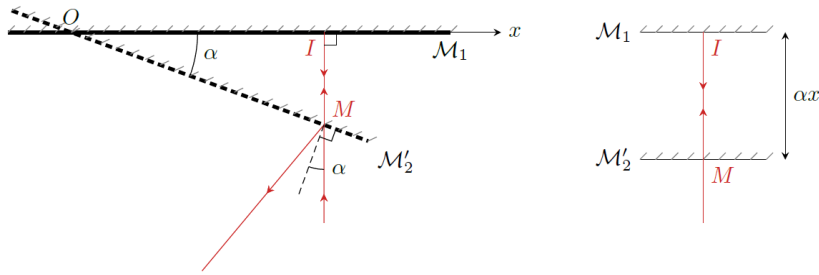
pour toute anti-coïncidence,  $|\Gamma(e)|$  minimal soit avec

$$\Gamma(e) = \cos \left( 2\pi e \frac{\Delta l}{\lambda^2} \right) \quad 2\pi e_{\text{anti}, k} \frac{\Delta l}{\lambda^2} = \frac{\pi}{2} [2k+1] = \frac{\pi}{2} + k\pi$$

$$\text{d'où } 2\pi \frac{\Delta l}{\lambda^2} \underbrace{(e_{k+1} - e_k)}_{\Delta e} = \pi \quad \text{et} \quad \boxed{\Delta e = \frac{\lambda^2}{2\Delta l}}$$

$$\text{AN: } \boxed{\Delta l = \frac{\lambda^2}{2\Delta e}}$$

6. ♥ Le Michelson réglé en coin d'air est éclairé par une source monochromatique ; il y a alors une quarantaine de franges rectilignes sur les 1,5 cm de largeur du miroir. En déduire une estimation de l'angle  $\alpha$  du coin d'air que forment les deux miroirs. Que se passe-t-il si on augmente  $\alpha$  ?



$$\delta = 2IM$$

Cette différence de marche dépend de l'épaisseur  $IM$  de la pseudo lame d'air traversée, parfois appelée **épaisseur locale du coin d'air**, donc de la valeur de  $x$  soit du point d'incidence considéré.

L'éclairage est parallèle avec des rayons en incidence normale. On suppose ici que les rayons sont en incidence normale sur le miroir  $\mathcal{M}_1$ , d'où

$$\tan \alpha \simeq \alpha \simeq \frac{IM}{x}$$

soit

$$\delta = 2IM = 2\alpha x$$

La différence de marche varie linéairement avec l'abscisse  $x$  le long de la zone d'observation : le résultat est analogue aux fentes d'Young, comme prévu par l'étude des sources secondaires.

Interfrange  $i$  : telle que  $\delta(x+i) = \delta(x) + \lambda$  soit  $2\alpha(x+i) = 2\alpha x + \lambda$  ; On a donc

$$i = \frac{\lambda}{2\alpha}$$

On sait que l'interfrange est

$$i = \frac{\lambda}{2\alpha} = \frac{D}{N} \quad \Rightarrow \quad \alpha = \frac{\lambda N}{2D}$$

Si on augmente  $\alpha$  on diminue l'interfrange donc on augmente le nombre de franges visibles.

7. On envoie sur une photocathode en potassium une radiation ultraviolette (raie du mercure)  $\lambda_1 = 253,7 \text{ nm}$  ; on constate que l'énergie maximale des photoélectrons éjectés est de 3,14 eV. Si on envoie une raie visible  $\lambda_2 = 589 \text{ nm}$  (raie jaune du sodium), l'énergie maximale est alors de 0,36 eV. Retrouver la valeur de la constante de Planck. Calculer la longueur d'onde maximale des radiations pouvant produire un effet photo-électrique sur le potassium.

$$E_1 \stackrel{\substack{\text{Planck} \\ \text{Einstein}}}{=} h\nu_1 = \frac{hc}{\lambda_1} = \underbrace{W_0}_{\substack{\text{travail} \\ \text{d'extraction}}} + E_{c_{max1}} \quad \text{et} \quad E_2 = h\nu_2 = \frac{hc}{\lambda_2} = W_0 + E_{c_{max2}}$$

énergie  
fournie par  
le photon

$$h = \frac{E_1 - E_2}{c \left( \frac{1}{\lambda_1} - \frac{1}{\lambda_2} \right)} = 6,6 \cdot 10^{-34} \text{ J.s} \quad (\text{avec } 1 \text{ eV} = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ J})$$

$$W_0 = h\nu_1 - E_{c_{max1}}$$

$$W_0 = h\nu_s = \frac{hc}{\lambda_{max}} \quad \text{soit} \quad \lambda_{max} = hc/W_0$$

8. ♥ L'énergie de l'atome d'hydrogène vaut  $E_n = \frac{-13,6}{n^2}$  (eV) ; le nombre  $n$  entier intervenant dans l'expression quantifiée de l'énergie désigne aussi le **niveau d'énergie**. Dans le cas de l'atome d'hydrogène, calculer la longueur d'onde de l'onde à utiliser pour passer de l'état fondamental à l'état  $n = 3$  de manière photochimique ; la fréquence de l'onde émise quand l'atome passe de l'état excité  $n = 3$  à l'état  $n = 2$ .

$$\Delta E_{1 \rightarrow 3} = E_3 - E_1 = -13,6 \left( \frac{1}{3^2} - \frac{1}{1^2} \right) (\text{eV}) \approx 12,09 \text{ eV} \approx 19,3 \cdot 10^{-19} \text{ J} = \Delta E_{1 \rightarrow 3}.$$

Il s'agit de passer vers un niveau d'énergie plus élevé (excitation) ; cela nécessite l'absorption d'un photon de longueur d'onde telle que  $\Delta E_{1 \rightarrow 3} = \frac{hc}{\lambda_{31}} \Leftrightarrow \lambda_{31} = \frac{hc}{\Delta E_{1 \rightarrow 3}}$ . A.N. :  $\lambda_{31} = 102,8 \text{ nm (UV)}$

$$\Delta E_{3 \rightarrow 2} = |E_2 - E_3| = -13,6 \left( \frac{1}{3^2} - \frac{1}{2^2} \right) (\text{eV}) \approx 1,89 \text{ eV} \approx 3,02 \cdot 10^{-19} \text{ J} = \Delta E_{3 \rightarrow 2} = h \nu_{3 \rightarrow 2}.$$

Soit  $\nu_{3 \rightarrow 2} = \frac{\Delta E_{3 \rightarrow 2}}{h}$ . A.N. :  $\nu_{3 \rightarrow 2} = 4,6 \cdot 10^{14} \text{ Hz}$ .

9. ♥♥ Une particule quantique a une fonction d'onde  $\Psi(x) = A \exp\left(-\frac{x}{a}\right)$  pour  $x > 0$  et  $\Psi = 0$  pour  $x < 0$ . Calculer la constante A. Quelle est la probabilité de présence dans l'intervalle  $[0, a]$  ?

1) Par normalisation, on a :

$$1 = \int_0^{+\infty} |\Psi|^2 dx = A^2 \int_0^{+\infty} \exp(-2x/a) dx = A^2 \frac{a}{2} \Rightarrow A = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{a}}$$

2.  $P(x \in [0, a]) = \int_0^a |\Psi|^2 dx = \frac{2}{a} \int_0^a \exp(-2x/a) dx = 1 - \exp(-2) \approx 86\%$

10. ♥ Relation d'indétermination : inégalité d'Heisenberg spatiale dans le cas d'un problème à une dimension  $x$  (définir soigneusement les différentes grandeurs intervenant dans le cas d'une particule quantique matérielle de masse  $m$  non relativiste).

On ne peut attribuer simultanément à une particule quantique à un instant donné quelconque une position  $x$  et une quantité de mouvement  $p_x$  sur le même axe rigoureusement précises : elles sont entachées d'une indétermination dite quantique, et vérifient pour chaque direction de l'espace l'inégalité d'Heisenberg spatiale :

$$\Delta x \cdot \Delta p_x \geq \frac{\hbar}{2}$$

L'indétermination  $\Delta Y$  sur une variable  $Y$  vient du fait qu'une mesure de cette variable ne donne pas un résultat certain mais au contraire un résultat aléatoire selon une loi de probabilité dont  $\Delta Y$  est l'écart-type, ou écart quadratique moyen, défini par

$$\Delta Y = \sqrt{\langle Y^2 \rangle - \langle Y \rangle^2}$$

Plus la dispersion est importante, moins la grandeur  $Y$  est connue avec précision. Par exemple, si la grandeur  $Y$  correspond à une coordonnée  $x$ , plus la dispersion est faible, meilleure est la localisation de la particule.

Calcul de l'indétermination quantique  $\Delta x$  sur  $x$  :

$$\Delta x = \sqrt{\langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2}$$

$$\langle x \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} x \rho_p(x) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} x |\Psi(x, t)|^2 dx \quad \langle x^2 \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 \rho_p(x) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 |\Psi(x, t)|^2 dx$$

La particule quantique considérée a par ailleurs une quantité de mouvement  $p_x = mv_x$

11. ♥ On cherche des solutions stationnaires de l'équation de Schrödinger  $i\hbar \frac{\partial \Psi(x, t)}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \Psi(x, t)}{\partial x^2} + V(x)\Psi(x, t)$  sous la forme  $\Psi(x, t) = \varphi(x) \cdot f(t)$ . Déterminer les équations vérifiées par  $\varphi(x)$  et  $f(t)$ . Etablir l'expression  $f(t)$  de l'évolution temporelle de la fonction d'onde en faisant apparaître la pulsation  $\omega$  associée.

En injectant cette expression  $\Psi(x, t) = \varphi(x) \cdot f(t)$  dans l'équation de Schrödinger :

$$i\hbar \frac{\partial \Psi(x, t)}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \Psi(x, t)}{\partial x^2} + V(x)\Psi(x, t)$$

on obtient :

$$i\hbar f'(t)\varphi(x) = -\frac{\hbar^2}{2m} f(t)\varphi''(x) + V(x)f(t)\varphi(x)$$

soit en divisant par  $f(t)\varphi(x)$

$$i\hbar \frac{f'(t)}{f(t)} = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\varphi''(x)}{\varphi(x)} + V(x)$$

Le membre de gauche de l'équation ci-dessus est une fonction du temps seulement, le membre de droite une fonction de  $x$  seulement. Ils ne peuvent être égaux  $\forall t, \forall x$  que s'ils sont tous deux égaux à une constante qu'on peut noter  $E_0$ ,

$$i\hbar \frac{f'(t)}{f(t)} = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\varphi''(x)}{\varphi(x)} + V(x) = E_0$$

On a donc :  $i\hbar \frac{f'(t)}{f(t)} = E_0 \Leftrightarrow f'(t) = \frac{1}{i\hbar} E_0 f(t) = -\frac{i}{\hbar} E_0 f(t)$

$f(t)$  vérifie l'équation différentielle  $f'(t) + i \frac{E_0}{\hbar} f(t) = 0$  avec  $E_0$  une constante

De plus,  $-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\varphi''(x)}{\varphi(x)} + V(x) = E_0 \Leftrightarrow -\frac{\hbar^2}{2m} \varphi''(x) + V(x)\varphi(x) = E_0 \varphi(x)$

$\varphi(x)$  vérifie l'équation différentielle  $-\frac{\hbar^2}{2m} \varphi''(x) + V(x)\varphi(x) = E_0 \varphi(x)$  avec  $E_0$  la même constante

Ou encore

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2\varphi(x)}{dx^2} + (V(x) - E_0) \varphi(x) = 0$$

Cette équation est l'équation de Schrödinger indépendante du temps

résolution de l'équation pour  $f(t)$  :  $f'(t) + i \frac{E_0}{\hbar} f(t) = 0$  :

$$f(t) = f(0) \exp\left(-i \frac{E_0}{\hbar} t\right) = f(0) \exp(-i\omega t) \quad \text{avec} \quad \frac{E_0}{\hbar} = \omega,$$

$E_0$  correspondant à l'énergie totale du système

D'après la condition de normalisation, on a  $|f(t)| = f(0) = cte$  qu'on peut choisir égale à 1 soit  $f(t) = \exp(-i\omega t)$  (rappel : constante multiplicative prise en compte dans  $\varphi(x)$ )

12. ♥♥ On considère une particule quantique libre à une dimension cartésienne caractérisée par une énergie potentielle nulle et une énergie totale  $E$  constante. Elle peut se déplacer dans tout l'espace de  $x = -\infty$  à  $x = +\infty$ , et vérifie l'équation de Schrödinger :  $i\hbar \frac{\partial \Psi(x,t)}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \Psi(x,t)}{\partial x^2} + V(x)\Psi(x,t)$ . On étudie les solutions stationnaires de la forme  $\Psi(x,t) = \varphi(x) \cdot f(t)$  ; préciser l'expression retenue pour  $f(t)$  en fonction de  $E$ , puis établir l'équation de Schrödinger indépendante du temps que satisfait la fonction d'espace  $\varphi(x)$ . Résoudre alors cette équation en discutant les cas  $E < 0$  et  $E > 0$  (on ne cherchera pas à déterminer les constantes d'intégration qui apparaissent). Quelle est la forme des fonctions d'onde associées ?

S'agissant d'un état stationnaire particulier, les solutions stationnaires sont de la forme  $\Psi(x,t) = \varphi(x)e^{-i\omega t}$

En injectant cette solution dans l'équation de Schrödinger, nous obtenons l'équation de Schrödinger indépendante du temps que satisfait la fonction d'espace  $\varphi(x)$  ;

$$i\hbar \left(-i \frac{E}{\hbar}\right) \varphi(x) = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2\varphi(x)}{dx^2} \Leftrightarrow E\varphi(x) = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2\varphi(x)}{dx^2}$$

$$\frac{d^2\varphi(x)}{dx^2} + \frac{2mE}{\hbar^2} \varphi(x) = 0$$

La forme mathématique de la solution dépend de la valeur de  $E$ .

### 1. Cas $E < 0$

$$\varphi(x) = A \exp(qx) + B \exp(-qx) \quad \text{où} \quad q = \frac{\sqrt{-2mE}}{\hbar}$$

Diverge en  $+\infty$  si  $A \neq 0$  et en  $-\infty$  si  $B \neq 0$  : solution pas physiquement intéressante

Remarque :  $\Psi(x, t) = \varphi(x) \exp\left(-i\frac{E}{\hbar} t\right) = A \exp(qx) \exp[-i\omega t] + B \exp(-qx) \exp[-i\omega t]$  : onde évanescente qui ne peut se propager dans un milieu infini, mais qui pourra s'avérer utile dans un milieu fini

## 2. Cas $E > 0$

$$\varphi(x) = A \exp(ikx) + B \exp(-ikx) \quad \text{où} \quad k = \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar}$$

$$\Psi(x, t) = \varphi(x) \exp\left(-i\frac{E}{\hbar} t\right) = A \exp[-i(kx + \omega t)] + B \exp[-i(\omega t - kx)]$$

$$\Psi(x, t) = \varphi(x) \exp\left(-i\frac{E}{\hbar} t\right) = A \exp\left[-\frac{i}{\hbar}(px + Et)\right] + B \exp\left[\frac{i}{\hbar}(px - Et)\right]$$

En exploitant les relations de Louis de Broglie ( $p = \hbar k$  et  $E = \hbar \omega$ ).

La solution correspond à la superposition de deux ondes planes progressives harmoniques se propageant dans le sens des  $x$  croissants ou des  $x$  décroissants (onde de De Broglie)

13. Soit une onde de De Broglie, de fonction d'onde  $\Psi(x, t) = A \exp[-i(\omega t \pm kx)]$ , décrivant une particule libre dans un état stationnaire ; exploiter l'équation de Schrödinger pour établir la relation de dispersion associée. Exploiter la relation de Planck Einstein pour exprimer cette relation de dispersion en fonction de l'énergie et commenter. Etablir l'expression de la vitesse de phase.

$$\text{Equation de Schrödinger pour la particule libre : } i\hbar \frac{\partial \Psi(x, t)}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \Psi(x, t)}{\partial x^2}$$

En injectant  $\Psi(x, t) = A \exp[-i(\omega t \pm kx)]$  :

$$\frac{\partial \Psi}{\partial t} = -i\omega \Psi(x, t) \quad \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} = -k^2 \Psi(x, t)$$

Dans Schrödinger :

$$i\hbar \times (-i\omega \Psi(x, t)) = -\frac{\hbar^2}{2m} \times (-k^2) \Psi(x, t)$$

$$\omega = \frac{\hbar}{2m} \times k^2$$

$$\boxed{k^2 = \frac{2m\omega}{\hbar}}$$

Cette relation de dispersion peut être retrouvée à partir des relations de Planck Einstein et De Broglie :

Pour la particule libre : en l'absence de potentiel, l'énergie totale correspond à la seule énergie cinétique :

$$E = E_c = \frac{1}{2} m v^2 = \frac{p^2}{2m}$$

Avec  $E = \hbar \omega$  (relation de Planck-Einstein) :  $E = \hbar \omega = \frac{p^2}{2m}$

Avec la relation de De Broglie :  $p = \hbar k$  soit  $p^2 = \hbar^2 k^2$

Pour la particule libre, en l'absence de potentiel on trouve donc :  $\hbar \omega = \frac{\hbar^2 k^2}{2m}$  soit  $k^2 = \frac{2m\omega}{\hbar}$

Vitesse de phase

$$v_\varphi = \frac{\omega}{k} = \frac{\hbar k}{2m}$$

On a alors :

$$v_\varphi = \frac{\hbar k}{2m} = \frac{\hbar}{2m} \sqrt{\frac{2m\omega}{\hbar}} = \sqrt{\hbar \frac{\omega}{2m}} \propto \sqrt{\omega}$$

Un quanton libre possède une vitesse de phase dépendant de  $k$  donc de  $\omega$ ; sa propagation est **dispersive**.

De plus :

$$v_\varphi = \frac{\hbar k}{2m} = \frac{p}{2m} = \frac{v}{2}$$

On peut noter que la vitesse de phase ne coïncide pas avec la vitesse de la particule (c'est la vitesse de groupe qui lui correspond).

14. ❤️ On considère une particule quantique de masse  $m$  enfermée dans un puits de potentiel infini caractérisé par un potentiel de la forme :  $V(x) = \begin{cases} +\infty & \text{pour } x < 0 \text{ et } x > a \\ 0 & \text{pour } 0 \leq x \leq a \end{cases}$ , vérifiant l'équation de Schrödinger :

$$i\hbar \frac{\partial \Psi(M, t)}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta \Psi(M, t) + V(M, t) \Psi(M, t)$$

On recherche les solutions stationnaires sous leur forme  $\Psi(x, t) = \varphi(x) \cdot \exp(-i\omega t)$ . Rappeler la solution  $\varphi(x)$  en dehors du puits (points d'abscisse  $x$  tels que  $V(x) \rightarrow +\infty$ ). A l'intérieur du puits, soit pour  $0 \leq x \leq a$ , résoudre complètement l'équation de Schrödinger pour  $E < 0$ , puis pour  $E = 0$

On cherche les solutions stationnaires sous leur forme  $\Psi(x, t) = \varphi(x) \cdot \exp(-i\omega t)$  avec  $\frac{E_0}{\hbar} = \omega$

En injectant cette solution dans l'équation de Schrödinger, on obtient alors pour  $\varphi(x)$  :

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\varphi''(x)}{\varphi(x)} + V(x) = E_0 \quad \Leftrightarrow \quad -\frac{\hbar^2}{2m} \varphi''(x) + V(x) \varphi(x) = E_0 \varphi(x) \quad \Leftrightarrow \quad -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2 \varphi(x)}{dx^2} + (V(x) - E_0) \varphi(x) = 0$$

Avec  $E_0$  énergie totale de la particule

si  $V(x)$  est infinie, alors  $\varphi(x) = 0$

| **Equation de Schrödinger pour  $V(x) = 0$**

On se limite à l'intervalle  $[0; a]$  où l'équation vérifiée par  $\underline{\varphi}(x)$  est donc de la forme

$$\frac{d^2 \underline{\varphi}(x)}{dx^2} + \frac{2mE}{\hbar^2} \underline{\varphi}(x) = 0$$

De plus, par continuité de  $\underline{\varphi}(x)$  en  $x = 0$  et  $x = a$ , on a  $\underline{\varphi}(x=0) = \underline{\varphi}(x=a) = 0$ .

| **1er cas :  $E < 0$**

Les solutions sont alors de la forme

$$\underline{\varphi}(x) = A \cdot \exp(k'x) + B \cdot \exp(-k'x) = A' \cdot \text{ch}(k'x) + B' \cdot \text{sh}(k'x) \text{ avec } k' = \frac{\sqrt{-2mE}}{\hbar} > 0$$

Conditions aux limites :  $\underline{\varphi}(0) = 0$  impose  $A' = 0$  et  $\underline{\varphi}(a) = 0$  impose  $B' = 0$ , soit  $\forall x, \underline{\varphi}(x) = 0$ .

| **2<sup>ème</sup> cas :  $E = 0$**

Les solutions sont alors de la forme

$$\underline{\varphi}(x) = Cx + D$$

Là encore les conditions aux limites imposent  $C = D = 0$ , soit  $\forall x, \underline{\varphi}(x) = 0$ .

les états stationnaires dans le puits infini ont une énergie  $E$  strictement positive.

| **3<sup>ème</sup> cas :  $E > 0$**

15. ❤️ ❤️ On considère une particule quantique de masse  $m$  enfermée dans un puits de potentiel infini caractérisé par un potentiel de la forme :  $V(x) = \begin{cases} +\infty & \text{pour } x < 0 \text{ et } x > a \\ 0 & \text{pour } 0 \leq x \leq a \end{cases}$ , vérifiant l'équation de Schrödinger :

$$i\hbar \frac{\partial \Psi(M, t)}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta \Psi(M, t) + V(M, t) \Psi(M, t)$$

On recherche les solutions stationnaires sous leur forme  $\Psi(x, t) = \varphi(x) \cdot \exp(-i\omega t)$  pour  $E > 0$  et pour  $0 \leq x \leq a$ .

Rappeler la solution  $\varphi(x)$  en dehors du puits (points d'abscisse  $x$  tels que  $V(x) \rightarrow +\infty$ ). A l'intérieur du puits, soit pour  $0 \leq x \leq a$ , établir l'expression de  $\varphi(x)$  et montrer que les différentes grandeurs caractéristiques de la particule sont quantifiées. Etablir l'expression complète de  $\underline{\psi}_n(x, t)$

On cherche les solutions stationnaires sous leur forme  $\Psi(x, t) = \varphi(x) \cdot \exp(-i\omega t)$  avec  $\frac{E_0}{\hbar} = \omega$

En injectant cette solution dans l'équation de Schrödinger, on obtient alors pour  $\varphi(x)$  :

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\varphi''(x)}{\varphi(x)} + V(x) = E_0 \quad \Leftrightarrow \quad -\frac{\hbar^2}{2m} \varphi''(x) + V(x)\varphi(x) = E_0 \varphi(x) \quad \Leftrightarrow \quad -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2 \varphi(x)}{dx^2} + (V(x) - E_0) \varphi(x) = 0$$

Avec  $E_0$  énergie totale de la particule

si  $V(x)$  est infinie, alors  $\varphi(x) = 0$

On se limite à l'intervalle  $[0; a]$  où  $V(x) = 0$  donc l'équation vérifiée par  $\underline{\varphi}(x)$  est :

$$\frac{d^2 \underline{\varphi}(x)}{dx^2} + \frac{2mE}{\hbar^2} \underline{\varphi}(x) = 0$$

De plus, par continuité de  $\underline{\varphi}(x)$  en  $x = 0$  et  $x = a$ , on a  $\underline{\varphi}(x=0) = \underline{\varphi}(x=a) = 0$ .

Les solutions sont alors de la forme

$$\underline{\varphi}(x) = \underline{\alpha} \cdot \cos(kx) + \underline{\beta} \cdot \sin(kx) \quad \text{avec} \quad k = \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar} > 0$$

La première condition aux limites  $\underline{\varphi}(0) = 0$  impose  $\underline{\alpha} = 0$

la seconde  $\underline{\varphi}(a) = 0$  impose  $\sin(ka) = 0$ , d'où

$$k = \frac{n\pi}{a} \quad \text{avec} \quad n \in \mathbb{N}$$

l'énergie  $E$  du quanton est alors :  $E = \frac{p^2}{2m} = \frac{(\hbar k)^2}{2m}$  d'après la relation de De Broglie ; on a donc quantification de l'énergie  $E_n$ , qui est liée à  $k_n = \frac{n\pi}{a}$  par la relation :

$$E_n = \frac{(\hbar k_n)^2}{2m} \Rightarrow E_n = \frac{n^2 \hbar^2 \pi^2}{2ma^2}$$

Les solutions pour les fonctions d'onde stationnaires sont donc du type

$$\underline{\psi}_n(x, t) = \underline{\beta}_n \sin\left(\frac{n\pi}{a} x\right) \exp\left(-i \frac{E_n}{\hbar} t\right)$$

**Calcul de  $\underline{\beta}_n$**  : condition de normalisation (on a la certitude de trouver la particule entre  $x = 0$  et  $x = a$ ), soit

$$\int_0^a |\underline{\psi}(x, t)|^2 dx = 1$$

$$|\beta_n|^2 \int_0^a \sin^2\left(\frac{n\pi}{a} x\right) dx = |\beta_n|^2 \int_0^a \frac{1}{2} \left(1 - \cos\left(\frac{2n\pi}{a} x\right)\right) dx = 1$$

$$|\beta_n|^2 \frac{a}{2} = 1 \quad \Leftrightarrow \quad |\beta_n| = \sqrt{\frac{2}{a}}$$

Ce qui donne  $\underline{\beta}_n = \sqrt{\frac{2}{a}} \exp i\delta$  à un facteur de phase  $\delta$  près. En physique quantique, nous avons la liberté de choisir la phase à l'origine de la fonction d'onde, que l'on prendra si possible égale à 0. On obtient finalement, en choisissant  $\delta = 0$

$$\underline{\psi}_n(x, t) = \sqrt{\frac{2}{a}} \sin\left(\frac{n\pi}{a} x\right) \exp\left(-i \frac{E_n}{\hbar} t\right)$$

16. ❤️❤️ Soit une particule quantique arrivant depuis  $x < 0$  sur une marche de potentiel telle que  $V(x) = \begin{cases} 0 & \text{pour } x < 0 \\ V_0 & \text{pour } x \geq 0 \end{cases}$ .

On étudie les solutions stationnaires associées à  $E > 0$  solutions de

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2 \underline{\varphi}(x)}{dx^2} + V(x) \underline{\varphi}(x) = E \underline{\varphi}(x)$$

(c) Région I correspondant à  $x < 0$  : déterminer la forme  $\varphi_I(x)$  des solutions.

(d) Région II correspondant à  $x > 0$  : Dans le cas où  $E \geq V_0$ , établir l'expression  $\varphi_{II}(x)$  des solutions dans la région II et commenter les résultats obtenus.

**Etude de la région I ( $x < 0$ )**

L'équation de Schrödinger stationnaire devient  $\frac{d^2 \underline{\varphi}_I(x)}{dx^2} + \underbrace{\frac{2mE}{\hbar^2}}_{k_I^2} \underline{\varphi}_I(x) = 0$

En posant  $k_I = \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar}$ , on obtient des solutions en exponentielles complexes de la forme

$$\underline{\varphi}_I(x) = \underbrace{A_1 e^{ik_I x}}_{\text{onde incidente}} + \underbrace{B_1 e^{-ik_I x}}_{\text{onde réfléchie}}$$

Onde incidente :  $\Psi_i(x, t) = A_1 \exp(i(k_I x - \omega t))$ ; Onde réfléchie :  $\Psi_r(x, t) = B_1 \exp(i(-k_I x - \omega t))$

**Etude de la région II ( $x \geq 0$ ) dans le cas  $E \geq V_0$**

L'équation de Schrödinger stationnaire s'écrit alors :  $\frac{d^2 \underline{\varphi}(x)}{dx^2} + \underbrace{\frac{2m}{\hbar^2} (E - V_0)}_{k_{II}^2} \underline{\varphi}(x) = 0$

La solution générale dans la zone II est alors, en posant  $k_{II} = \frac{\sqrt{2m(E-V_0)}}{\hbar}$ ,

$$\underline{\varphi}_{II}(x) = \underbrace{A_2 e^{ik_{II} x}}_{\text{onde transmise}} + \underbrace{B_2 e^{-ik_{II} x}}_{\text{onde réfléchie}}$$

On s'intéresse ici à un quanton venant de la gauche, on peut donc poser  $B_2 = 0$  car la fonction d'onde associée correspondrait à un quanton venant de  $+\infty$ , ce qui n'est pas cohérent avec nos hypothèses de départ. En effet, d'un point de vue physique, les objets quantiques sont émis depuis les  $x$  négatifs ; une fois qu'ils ont franchi la marche de potentiel, le milieu ne change plus de propriété et aucun objet quantique passé à droite de la marche ne peut être réfléchi pour revenir vers la marche de potentiel ; il ne peut donc y avoir de terme en  $B_2 e^{-ik_{II} x}$  dans la zone II telle que  $x > 0$ .

$$\underline{\varphi}_{II}(x) = A_2 e^{ik_{II} x}$$

On peut déterminer les constantes  $A_2$  et  $B_1$  (donc les coefficients en amplitude  $r$  et  $t$ ) en fonction de  $A_1$ , de  $k_I$  et  $k_{II}$  en exploitant les conditions de continuité de la fonction d'onde :

$$\begin{cases} \underline{\varphi}_I(0) = \underline{\varphi}_{II}(0) \\ \underline{\varphi}'_I(0) = \underline{\varphi}'_{II}(0) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A_1 + B_1 = A_2 \\ ik_I A_1 - ik_I B_1 = ik_{II} A_2 \end{cases}$$

On obtient

$$\begin{cases} A_2 = \frac{2k_I}{k_I + k_{II}} A_1 \\ B_1 = A_2 - A_1 = \frac{k_I - k_{II}}{k_I + k_{II}} A_1 \neq 0 \end{cases}$$

$A_2 = \frac{2k_I}{k_I + k_{II}} A_1 \neq 0$  indique que le quanton possède, comme attendu classiquement, une probabilité de présence non nulle de passer dans la région II et de s'y propager.

$B_1 = \frac{k_I - k_{II}}{k_I + k_{II}} A_1 \neq 0$  indique que le quanton possède une probabilité non nulle de revenir vers la gauche, contrairement à ce que prévoit la physique classique ; on parle de **réflexion quantique** (car non prévue en physique classique).

On montre que

La **probabilité de réflexion n'est jamais nulle** : il est donc toujours possible qu'une particule quantique incidente soit réfléchiée par la marche de potentiel, quelle que soit son énergie. Cet effet purement quantique est sans équivalent en mécanique classique : **réflexion dite quantique**.

**Plus l'énergie est élevée, plus la probabilité d'une réflexion diminue**, et dans la limite des hautes énergies (amplitude de la marche très faible devant l'énergie cinétique de la particule), l'influence de la marche de potentiel est quasi gommée.

17. ♥♥ Soit une particule quantique arrivant depuis  $x < 0$  sur une marche de potentiel telle que  $V(x) = \begin{cases} 0 & \text{pour } x < 0 \\ V_0 & \text{pour } x \geq 0 \end{cases}$ .

On étudie les solutions stationnaires associées à  $E > 0$  solutions de

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2 \varphi(x)}{dx^2} + V(x) \varphi(x) = E \varphi(x)$$

- (c) Région I correspondant à  $x < 0$  : déterminer la forme  $\varphi_I(x)$  des solutions.  
 (d) Région II correspondant à  $x > 0$  : Dans le cas où  $E < V_0$ , établir l'expression  $\varphi_{II}(x)$  des solutions dans la région II et commenter les résultats obtenus.

#### Etude de la région I ( $x < 0$ )

On a pour l'équation de Schrödinger stationnaire :

$$\frac{d^2 \varphi_I(x)}{dx^2} + \frac{2mE}{\hbar^2} \varphi_I(x) = 0$$

En posant  $k_I = \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar}$ , on obtient des solutions en exponentielles complexes de la forme

$$\varphi_I(x) = \underbrace{A_1 e^{ik_I x}}_{\text{onde incidente}} + \underbrace{B_1 e^{-ik_I x}}_{\text{onde réfléchiée}}$$

#### Etude de la région II ( $x > 0$ ) pour $0 < E < V_0$

Equation de Schrödinger stationnaire :

$$\frac{d^2 \varphi(x)}{dx^2} + \frac{2m}{\hbar^2} (E - V_0) \varphi(x) = 0$$

**Solution générale dans la zone II** : en posant  $\alpha = \frac{\sqrt{2m(V_0 - E)}}{\hbar}$ ,

$$\varphi_{II}(x) = A_2 e^{\alpha x} + B_2 e^{-\alpha x}$$

La fonction  $\varphi_{II}(x)$  devant rester de carré sommable sur la région II, on en déduit que  $A_2 = 0$  (sans cela, l'onde divergerait pour  $x \rightarrow +\infty$ ) ; on a donc :

$$\varphi_{II}(x) = B_2 e^{-\alpha x}$$

On peut déterminer les constantes  $B_1$  et  $B_2$  en exploitant les conditions aux limites de la fonction d'onde :

$$\begin{cases} \varphi_I(0) = \varphi_{II}(0) \\ \varphi_I'(0) = \varphi_{II}'(0) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A_1 + B_1 = B_2 \\ ik_I A_1 - ik_I B_1 = -\alpha B_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} B_2 = \frac{2k_I}{k_I + i\alpha} A_1 \neq 0 \\ B_1 = B_2 - A_1 = \frac{k_I - i\alpha}{k_I + i\alpha} A_1 \neq 0 \end{cases}$$

$B_1 \neq 0$  indique que la particule quantique possède, comme dans l'approche classique, une **probabilité non nulle** d'être **réfléchi par la barrière de potentiel** et de revenir vers la gauche.

$B_2 \neq 0$  indique en revanche que la particule quantique possède une **probabilité non nulle** de se trouver dans la région II, et donc **de franchir la barrière de potentiel** correspondant à une énergie potentielle supérieure à l'énergie totale de la particule ( $E < V_0$ ), ce qui n'est pas possible dans l'approche classique où la région II constitue une zone interdite.

Etude de la fonction d'onde dans la région II

$$\varphi_{II}(x) = B_2 e^{-\alpha x} = \frac{2k_I}{k_I + i\alpha} A_1 e^{-\alpha x}$$
$$\psi_{II}(x) = B_2 e^{-\alpha x} e^{\frac{iEt}{\hbar}} = \frac{2k_I}{k_I + i\alpha} A_1 e^{-\alpha x} e^{\frac{iEt}{\hbar}}$$

On retrouve une séparation des variables avec une atténuation exponentielle de l'amplitude sur une distance caractéristique  $\delta = \frac{1}{\alpha}$ .

**L'onde transmise ne se propage pas** : la fonction d'onde de la région II qui lui est associée possède une **structure d'onde évanescence** associée à une **épaisseur de peau**  $\delta = \frac{1}{\alpha} = \frac{\hbar}{\sqrt{2m(V_0 - E)}}$ .

Cette épaisseur de peau constitue **l'ordre de grandeur de la distance sur laquelle l'onde pénètre dans la barrière** : après une distance de quelques  $\delta$ , l'amplitude de l'onde transmise devient négligeable (elle décroît de façon exponentielle).

La profondeur de pénétration est d'autant plus faible que la particule quantique est massive (les effets quantiques sont toujours plus marqués pour les particules de masse faible) et que la marche est haute (écart important entre l'énergie de la particule et celle de la marche à franchir).