

Problème N°1 : Exercice du TD : Radioactivité

## Problème N°2 : Module d'élasticité des solides déformables

**L'usage de la calculatrice et de tout dispositif électronique est interdit.**

Le physicien anglais ROBERT HOOKE est le premier à avoir énoncé (en 1676) la loi associée à la déformation élastique d'un ressort, établissant son allongement comme une fonction linéaire de la force exercée sur ses extrémités. Il ne s'agit en général que du premier ordre d'un développement en série de Taylor et la loi linéaire de Hooke peut donc devenir inexacte pour les grandes déformations.

### I.A Mouvements d'un ressort

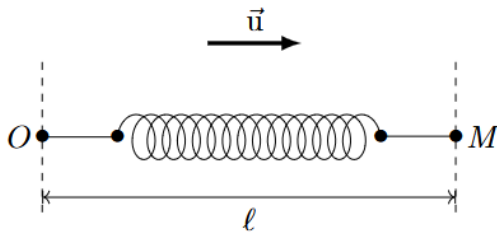


FIGURE 1 – Loi de Hooke

On notera  $k$  la raideur d'un ressort élastique, de masse négligeable, de longueur au repos  $\ell_0$ . Si l'une de ses extrémités est fixe en  $O$ , l'exercice d'une force de tension  $\vec{T} = -T\vec{u}$  (où  $\vec{u}$  est un vecteur unitaire) sur l'extrémité mobile  $M$  du ressort induit une déformation de celui-ci de sorte que (cf. figure 1)  $\vec{OM} = \ell\vec{u}$  soit colinéaire à  $\vec{T}$  avec  $T = k[\ell - \ell_0]$ .

C'est la *loi de Hooke*. On note aussi  $\sigma = 1/k$  la *souplesse* du ressort.

De ces études, on peut déduire ce qui suit : la raideur  $k$  d'un fil métallique élastique de longueur  $L$  et de section (constante)  $s$  s'exprime sous la forme :

$$k = E \frac{s}{L} \quad (1)$$

où  $E$  est une grandeur caractéristique du matériau appelée *module d'élasticité* ; cette notion a notamment été présentée par l'anglais THOMAS YOUNG en 1807.

Cette partie I.A. ne sera pas traitée.

## II.A Estimation en ordre de grandeur

Le module d'élasticité, relié à la raideur  $k$  d'une tige élastique de longueur  $L$  et de section  $s$  par la relation (1), est lié aux variations d'énergie de la tige lors d'une dilatation ou d'une compression. L'énergie concernée est, dans le cas d'un matériau métallique, celle des électrons, de masse  $m_e = 9,1 \cdot 10^{-31}$  kg au sein des mailles du cristal métallique ; on notera  $a$  la dimension caractéristique de ces mailles.

Dans une première approche heuristique, on fait l'hypothèse que le module d'élasticité ne dépend que de  $m_e$ ,  $a$  et de la constante de Planck  $h = 6,6 \cdot 10^{-34}$  J.s sous la forme  $E = C m_e^\alpha h^\beta a^\gamma$  où la constante adimensionnée  $C$  est de l'ordre de grandeur de l'unité.

- – 13. Par analyse dimensionnelle, déterminer les entiers  $\alpha$ ,  $\beta$  et  $\gamma$ .
- – 14. Rappeler l'ordre de grandeur usuel de  $a$  ; en déduire celui de  $E$ .

## II.B Modèle quantique du puits infini 3D

On rappelle ici l'équation de Schrödinger pour une particule de masse  $m$  lorsque l'interaction avec l'extérieur est décrite par le potentiel d'interaction  $U(\vec{r})$  :

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \Delta \Psi(\vec{r}, t) + U(\vec{r}) \Psi(\vec{r}, t) = j\hbar \frac{\partial}{\partial t} \Psi(\vec{r}, t) \quad (2)$$

où  $j^2 = -1$ ,  $\Psi(\vec{r}, t)$  est la fonction d'onde et  $\hbar = h/2\pi$ . Dans ce qui suit, on étudie une particule dans un *puits de potentiel infini* défini à trois dimensions par  $U = \text{cte} = U_0$  pour  $0 < x < a_1$ ,  $0 < y < a_2$  et  $0 < z < a_3$  tandis que  $U \rightarrow +\infty$  en dehors de cette région bornée de l'espace.

- – 15. Quelles sont l'interprétation physique et la dimension de la fonction d'onde  $\Psi(\vec{r}, t)$  ?
- – 16. On cherche des solutions de l'équation de Schrödinger de la forme  $\Psi(\vec{r}, t) = \Phi(x, y, z)W(t)$ . Quelle est la forme de  $W(t)$  ? Comment s'appelle ce type de solution ?
- – 17. On suppose encore  $\Phi(x, y, z) = F_1(x)F_2(y)F_3(z)$ . Déterminer les fonctions  $F_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) en fonction de  $a_i$  et de trois nombres entiers  $n_i \in \mathbb{N}^*$ , à une constante multiplicative arbitraire près.
- – 18. Montrer que l'énergie  $\mathcal{E}_f$  de l'état fondamental de la particule s'écrit :

$$\mathcal{E}_f = U_0 + \frac{\hbar^2}{8m} \left[ \frac{1}{a_1^2} + \frac{1}{a_2^2} + \frac{1}{a_3^2} \right] \quad (3)$$

La particule de masse  $m$ , qui reste dans son état fondamental, évolue lentement d'un état isotrope où le volume  $V = a^3$  du puits est celui d'un cube de côté  $a$  à une *situation comprimée* où une des dimensions  $a_1 = a - \delta a < a$  tandis que les deux autres dimensions augmentent simultanément et symétriquement ( $a_2 = a_3$  à tout instant) de manière à maintenir constant le volume  $V = a_1 a_2 a_3$  du puits.

- – 19. Exprimer la variation  $\Delta \mathcal{E}_1$  de l'énergie de l'état fondamental qui accompagne cette transformation.
- – 20. On suppose  $\delta a \ll a$ . Montrer qu'au premier ordre non nul en  $\delta a/a$  la variation d'énergie se met sous la forme  $\Delta \mathcal{E}_1 = \frac{1}{2} K \delta a^2$ , on exprimera  $K$  en fonction de  $h$ ,  $m$  et  $a$ .  
On rappelle que  $(1 - \epsilon)^{-2} = 1 + 2\epsilon + 3\epsilon^2 + o(\epsilon^2)$ .