COLLES DE PHYSIQUE - MPI – 2024-2025

Colle N°3 : 30 Septembre au 04 Octobre 2024

Au programme des exercices

→ **Révisions de mécanique** de MP2I : Cinématique, dynamique, équilibre d'un système, Théorème du moment cinétique, mécanique du solide (tout sauf Forces centrales, particules chargées dans ($\vec{E}$,$\vec{B}$) et oscillateurs harmoniques (en particulier forcés)

→ **Chapitre CHIM1** : Systèmes chimiques, réaction chimique, constante d'équilibre thermodynamique et loi d'action de masse. Application à la détermination du sens d'évolution d'un système et à la recherche de son état final. Ruptures d'équilibre, formulation d'hypothèse sur le caractère très peu avancé ou quasi-total d'une réaction.

Si les réactions avec solides peuvent être étudiées, les notions de solubilité ou de constante de solubilité sont hors-programme.

Liste des questions de cours sans corrigés

1. ❤ On mélange un volume $V_1 = 10$ mL d'une solution de chlorure de sodium NaCl entièrement dissous pour donner des ions sodium $\mathrm{Na^+}$ et des ions chlorure $\mathrm{Cl^-}$, de concentration $c_1 = 0{,}10$ mol.L^{-1} et un volume $V_2 = 20$ mL d'une solution de chlorure de potassium KCl entièrement dissous pour donner des ions sodium $\mathrm{K^+}$ et des ions chlorure $\mathrm{Cl^-}$, de concentration $c_2 = 0{,}15$ mol.L^{-1}. Calculer les concentrations dans le mélange.

2. ❤ Considérons la réaction totale suivante en milieu de pH tamponné ([H$^+$] = cte) :

$\mathrm{IO_3^-} + 5\mathrm{I^-} + 6\mathrm{H^+} = 3\mathrm{I_2} + 3\mathrm{H_2O}$, avec initialement 0,1 mol de $\mathrm{IO_3^-}$ et 0,2 mol de $\mathrm{I^-}$.

Déterminer l'état final du système.

3. On dissout 30 mg de sulfate de sodium hydraté (Na_2SO_4, 10 H_2O) dans de l'eau. Le volume de la solution est de 500 mL. Déterminer la quantité de matière en solution de sulfate de sodium puis les activités des ions $\mathrm{Na^+_{(aq)}}$ et $\mathrm{SO^{2-}_{4,(aq)}}$.

$$M(\mathrm{Na}) = 23\mathrm{g/mol} \quad M(\mathrm{S}) = 32\mathrm{g/mol} \quad M(\mathrm{O}) = 16\ \mathrm{g/mol} \quad M(\mathrm{H}) = 1\ \mathrm{g/mol}$$

4. ❤ Prévoir le sens d'évolution et la composition à l'équilibre des réactions suivantes :

1) Réaction acido-basique entre l'acide éthanoïque et les ions fluorure :

$$CH_3COOH + F^- = CH_3COO^- + HF \quad (K° = 10^{-1.60} \text{ à } 25°C),$$

a) Conditions initiales : [CH_3COOH] = 0,10 mol.L^{-1}, [CH_3COO^-] = 0 mol.L^{-1}, [F^-] = 0,1 mol.L^{-1} et HF] = 0 mol.L^{-1}.

b) Conditions initiales : [CH_3COOH] = 0,10 mol.L^{-1} = [F^-], [CH_3COO^-] = 0,10 mol.L^{-1} et [HF] = 0,10 mol.L^{-1}.

2) Réaction de formation de l'hydroxyde de calcium $Ca(OH)_2$(s) :

Ca^{2+} + 2 HO^- = $Ca(OH)_2$(s) $K° = 10^{5.2}$; état initial : [Ca^{2+}] = 2.0 10^{-4} mol.L^{-1} et [HO^-] = 2.0 10^{-4} mol.L^{-1}.

5. La réduction de l'oxyde de zinc par le charbon est une étape de la métallurgie du zinc par voie sèche, modélisée par l'équation-bilan

$$C_{(s)} + ZnO_{(s)} = CO_{(g)} + Zn_{(g)}$$

La réaction a lieu dans un four porté à 1300 K, où la constante d'équilibre vaut $K° = 11{,}8$. L'enceinte du four est supposée initialement vide, de volume invariable $V = 10\ L$, dans laquelle on apporte à l'état initial n_0 mol de carbone graphite et n_0 mol d'oxyde de zinc. Déterminer la pression dans l'enceinte pour n_0 variant de 0 à 1 mol et la représenter graphiquement. Préciser dans quel domaine l'équilibre est atteint et dans quel domaine il y a rupture d'équilibre.

6. ❤ On considère la réaction en phase aqueuse diluée des ions carbonates avec des ions oxonium :

$$\mathbf{CO_3^{2-} + 2H_3O^+ = H_2CO_3 + 2H_2O}, \qquad \boldsymbol{K°} = 10^{16{,}7}$$

La concentration initiale en ions carbonate est de 10^{-3} mol.L^{-1} et celle en ions oxonium est de 10^{-2} mol.L^{-1}. Déterminer la composition de la solution à l'équilibre.

7. ❤ On met en solution des ions ammonium à la concentration de 10^{-2} mol.L^{-1}. Ils réagissent avec l'eau selon l'équation bilan :

$$\mathbf{NH_4^+ + H_2O = NH_3 + H_3O^+}, \qquad \boldsymbol{K°} = 10^{-9{,}2}$$

Déterminer la composition de la solution à l'équilibre.

8. ❤ Donner sans démonstration les expressions des vecteurs position, déplacement élémentaire, vitesse et accélération dans une base cylindrique. Cas particuliers des mouvements circulaires puis circulaires uniformes.

9. On considère un projectile lancé avec une vitesse initiale v_0 suffisamment faible pour que l'on puisse négliger la force de frottement fluide de l'air. On note θ l'angle de la vitesse $\vec{v}$ avec le plan horizontal et θ_0 sa valeur à l'instant initial (**figure 1 ci-contre).** On prend un repère dont l'origine O est la position de la particule à l'instant initial.

a) ❤ Etablir l'équation du mouvement sur la base cartésienne.

b) Établir les équations paramétriques de la vitesse et de la position en fonction du temps.

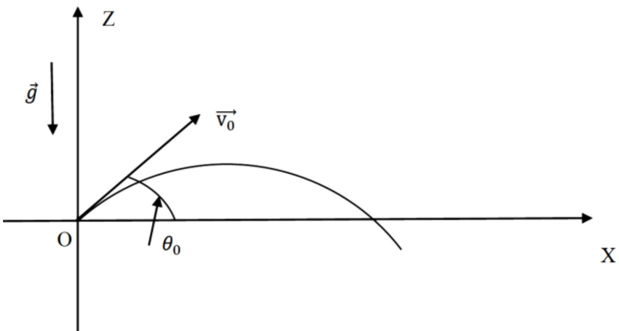
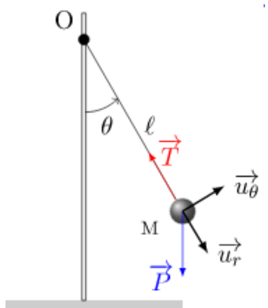


Figure 1 - Trajectoire

10. Un point matériel M de masse m est suspendu à un fil supposé inextensible de longueur L. On suppose que le fil reste toujours tendu. A $t = 0$, le point M est lâché depuis un angle α par rapport à la verticale, avec une vitesse initiale v_0.

a) ❤ Etablir l'équation différentielle du mouvement du pendule en exploitant, au choix de l'examinateur, la seconde loi de Newton ou le théorème de la puissance mécanique.

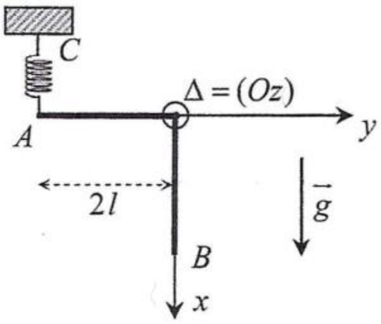
b) Etablir l'expression de la tension T du fil. A quelle condition le fil reste-t-il tendu ?

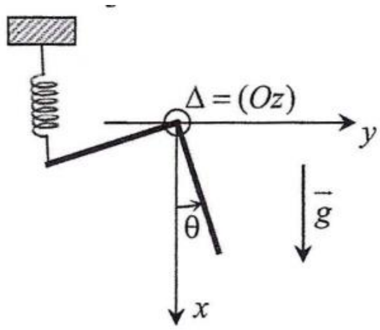


11. ❤ Un parachutiste de masse m saute d'un hélicoptère en vol stationnaire. Au début du saut, il n'est soumis qu'à son poids, puis il ouvre son parachute après avoir atteint une vitesse v_0 à un instant qui sera pris comme instant initial. Il est alors également soumis à une force de frottement exercée par l'air de la forme $\vec{F} = -\lambda\vec{v}$. Etablir l'équation différentielle régissant l'évolution de la vitesse lorsque le parachute est ouvert. Résoudre cette équation en exprimant la vitesse limite v_{lim} atteinte par le parachutiste.

12. ❤ Un étudiant glisse sur une piste de ski depuis une altitude $h = 15\ m$. Sa vitesse initiale est nulle. On note $\alpha = 30°$ l'angle entre la piste et l'horizontale. On tient compte d'une force de frottement constante F. Déterminer l'expression de la vitesse du skieur en bas de la pente en fonction de la force F.

13. Un solide $\mathcal{S}$ est constitué de 2 tiges AO et OB homogènes rigidement liées l'une à l'autre et faisant entre elles un angle droit constant. Chaque tige a pour masse m et pour longueur 2ℓ. $\mathcal{S}$ peut tourner autour d'un axe horizontal (Δ) passant par O (axe (Oz), la liaison en O étant une liaison pivot parfaite. Un ressort de masse négligeable, de constante de raideur k, est accroché à l'un de ses extrémités en A et l'autre extrémité C est maintenue fixe. Lorsque l'ensemble est en équilibre dans le champ de pesanteur, AO est horizontale et OB verticale. On suppose que la force exercée par le ressort sur le solide reste toujours verticale durant le mouvement.

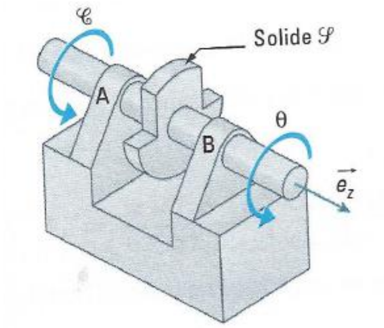




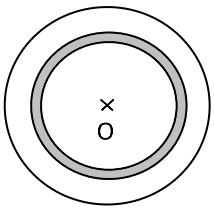
Faire un bilan des actions exercées sur le solide et déterminer leur moment respectif par rapport à O (on pourra projeter sur l'axe de rotation) en fonction notamment de θ.

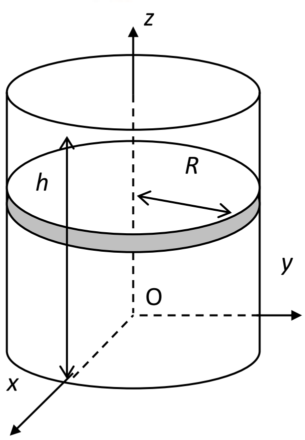
14. ❤️ Un solide $\mathcal{S}$ pouvant être en rotation autour d'un axe de rotation (Δ) a un moment d'inertie J_Δ par rapport à l'axe. Il est soumis à un moment global des forces extérieures par rapport à l'axe (Δ) $\sum_i \mathcal{M}_\Delta(\vec{F_i}) = +mg\ell(\cos\theta - \sin\theta)$. Déterminer à l'aide du théorème du moment cinétique l'équation différentielle vérifiée par $\theta(t)$.

15. Une machine de test est constituée d'un arbre cylindrique homogène d'axe $\Delta = (A\,;\vec{e_z})$ lié à 2 liaisons pivot idéales en A et en B ; elle permet de tester le solide $\mathcal{S}$ qui est solidaire de l'arbre. On supposera que le moment d'inertie de l'arbre par rapport à Δ est négligeable, et que le centre d'inertie du solide appartient à cet axe Δ. Un couple moteur constant $\Gamma = 1{,}5$ Nm est appliqué à l'arbre et permet d'atteindre une vitesse de 1200 tr/min après 18 tours (en partant de l'arrêt). Déterminer le moment d'inertie J_Δ du solide $\mathcal{S}$ par rapport à l'axe $\Delta = (A\,;\vec{e_z})$ à l'aide d'un théorème énergétique.



16. ❤️ Donner en coordonnées cylindriques et sphériques l'expression du volume élémentaire, ainsi que dans le cas des coordonnées cylindriques l'expression des surfaces mésoscopiques correspondant à une couronne dans le plan $z = cte$ et d'une couronne à $r = cte$. Vous vous appuierez sur des schémas.





17. ❤️ Résultante des actions de contact exercées par un support solide sur un autre solide : Description, condition de contact ou de décollement, lois de Coulomb du frottement solide

▪ Questions de cours avec éléments de réponses

1. On mélange un volume $V_1 = 10$ mL d'une solution de chlorure de sodium NaCl entièrement dissous pour donner des ions sodium Na^+ et des ions chlorure Cl^-, de concentration $c_1 = 0{,}10$ mol.L^{-1} et un volume $V_2 =$ 20 mL d'une solution de chlorure de potassium KCl entièrement dissous pour donner des ions sodium K^+ et des ions chlorure Cl^-, de concentration $c_2 = 0{,}15$ mol.L^{-1}. Calculer les concentrations dans le mélange.

Eléments de réponse :

Les concentrations correspondent par définition au nombre de mole du soluté considéré sur le volume total, soit ici :

$$[Na^+]_{éq} = \frac{n_{Na^+,éq}}{V_{tot}} = \frac{c_1V_1}{V_1+V_2} = 3{,}3.10^{-2}\ mol/L \qquad [K^+]_{éq} = \frac{n_{K^+,éq}}{V_{tot}} = \frac{c_2V_2}{V_1+V_2} = 0{,}1\ mol/L$$

Les ions chlorure étant apportés par les deux solides :

$$[Cl^-]_{éq} = \frac{n_{Cl^-,éq}}{V_{tot}} = \frac{c_1V_1 + c_2V_2}{V_1+V_2} = 1{,}33.10^{-2}\ mol/L$$

2. Considérons la réaction totale suivante en milieu de pH tamponné ($[H^+]$ = cte) :

$IO_3^- + 5I^- + 6H^+ = 3I_2 + 3H_2O$, avec initialement 0,1 mol de IO_3^- et 0,2 mol de I^-.

Déterminer l'état final du système.

Eléments de réponse :

	avancement (mol)	IO_3^-	+ $5\,I^-$	+ $6H^+$	= $3\,I_2$	+ $3\,H_2O$
Etat initial	0	0,1	0,2	*Cte*	0	0
A t	ξ	$0{,}1 - \xi$	$0{,}2 - 5\,\xi$	*Cte*	3ξ	3ξ
A t_∞ (état final)	ξ_{max}	$0{,}1 - \xi_{max}$	$0{,}2 - 5\,\xi_{max}$	*Cte*	$3\,\xi_{max}$	$3\,\xi_{max}$
	16	$0{,}1 - 0{,}04 = 0{,}06$	*0*	*Cte*	$3 \times 0{,}04 = 0{,}12$	$3 \times 0{,}04 = 0{,}12$

Si IO_3^- est l'espèce limitante, dans l'état final $0{,}1 - \xi_{max,1} = 0$ soit $\xi_{max,1} = 0{,}1$ mol ;

Si I^- est l'espèce limitante, dans l'état final $0{,}2 - 5\xi_{max,2} = 0$ soit $\xi_{max,2} = \frac{0{,}2}{5}$ mol $< \xi_{max,1} = 0{,}1$ mol ;

C'est donc I^- qui est l'espèce limitante, avec $\xi_{max,2} = \frac{0{,}2}{5}$ mol = 0,04 mol

3. On dissout 30 mg de sulfate de sodium hydraté (Na_2SO_4, 10 H_2O) dans de l'eau. Le volume de la solution est de 500 mL. Déterminer la quantité de matière en solution de sulfate de sodium puis les activités des ions $Na^+_{(aq)}$ et $SO^{2-}_{4,(aq)}$.

$$M(\text{Na}) = 23\text{g/mol} \quad M(\text{S}) = 32\text{g/mol} \quad M(\text{O}) = 16\text{ g/mol} \quad M(\text{H}) = 1\text{ g/mol}$$

Eléments de réponse :

a) $n = \frac{m}{M}$ *avec* $M = 2M(Na) + M(S) + 14M(O) + 20\,M(H) = 2 \times 23 + 32 + 14 \times 16 + 20 \times 1 = 322\ g/mol$

$n = \frac{30.10^{-3}}{322} = 9{,}32.10^{-5}\ mol$

b) une mole de sulfate de sodium hydraté (Na_2SO_4, 10 H_2O) libère dans l'eau après dissolution une mole de sulfate et deux moles de sodium ; on a donc :

$$a_{sulfate} = \frac{c_{sulf}}{c°} = \frac{n}{Vc°} = \frac{9{,}32.10^{-5}}{0{,}5} = 1{,}86.10^{-4} \qquad a_{Na} = \frac{c_{Na}}{c°} = \frac{2n}{Vc°} = \frac{2 \times 9{,}32.10^{-5}}{0{,}5} = 3{,}73.10^{-4}$$

4. Prévoir le sens d'évolution et la composition à l'équilibre des réactions suivantes :

3) Réaction acido-basique entre l'acide éthanoïque et les ions fluorure :

$CH_3COOH + F^- = CH_3COO^- + HF$ ($K° = 10^{-1.60}$ à 25°C),

c) Conditions initiales : $[CH_3COOH] = 0,10$ mol.L^{-1}, $[CH_3COO^-] = 0$ mol.L^{-1}, $[F^-] = 0,1$ mol.L^{-1} et HF] = 0 mol.L^{-1}.

d) Conditions initiales : $[CH_3COOH] = 0,10$ mol.L^{-1} = $[F^-]$, $[CH_3COO^-] = 0,10$ mol.L^{-1} et $[HF] = 0,10$ mol.L^{-1}.

4) Réaction de formation de l'hydroxyde de calcium $Ca(OH)_2(s)$:

$Ca^{2+} + 2\ HO^- = Ca(OH)_2(s)$ $K° = 10^{5.2}$; état initial : $[Ca^{2+}] = 2.0\ 10^{-4}$ mol.L^{-1} et $[HO^-] = 2.0\ 10^{-4}$ mol.L^{-1}.

Eléments de réponse :

1) **a)** On a $Q_0 = \frac{[CH_3COO^-]_0 \cdot [HF]_0}{[F^-]_0 \cdot [CH_3COOH]_0} = 0 < K°$: Evolution dans le sens direct

Bilan en concentrations	CH_3COOH +	F^- =	HF +	CH_3COO^-
E.I.	c_0	c_0	0	0
E.F.	$c_0(1-\alpha)$	$c_0(1-\alpha)$	$c_0\alpha$	$c_0\alpha$

L.A.M. : $K° = \frac{[CH_3COO^-]_{éq} \cdot [HF]_{éq}}{[F^-]_{éq} \cdot [CH_3COOH]_{éq}} = \frac{(c_0\alpha)^2}{(c_0(1-\alpha))^2} = \left(\frac{\alpha}{1-\alpha}\right)^2$ d'où $\alpha = \frac{\sqrt{K}}{1+\sqrt{K}} = 13,7\%$

b) On a $Q_0 = \frac{[CH_3COO^-]_0 \cdot [HF]_0}{[F^-]_0 \cdot [CH_3COOH]_0} = 1 > K° = 10^{-1,6}$

Evolution dans le sens indirect :

on peut par exemple considérer la réaction inverse de constante $K°' = \frac{1}{K°} = 10^{+1,6}$

Bilan en concentrations	CH_3COO^-	+ HF =	F^- +	CH_3COOH
E.I.	c_0	c_0	c_0	c_0
E.F.	$c_0(1-\alpha)$	$c_0(1-\alpha)$	$c_0(1+\alpha)$	$c_0(1+\alpha)$

L.A.M. : $K°' = \frac{[CH_3COOH]_{éq} \cdot [F^-]_{éq}}{[HF]_{éq} \cdot [CH_3COO^-]_{éq}} = \frac{(c_0(1+\alpha))^2}{(c_0(1-\alpha))^2} = \left(\frac{1+\alpha}{1-\alpha}\right)^2$ d'où $1+\alpha = \sqrt{K°'}(1-\alpha)$ soit

$$\boxed{\alpha = \frac{\sqrt{K°'}-1}{1+\sqrt{K°'}} = 72,6\%}$$

2) $Q_{r,0} = \frac{1}{[Ca^{2+}]_0[HO^-]_0^2} = \frac{1}{2.10^{-4} \times 4.10^{-8}} = \frac{1}{8}10^{12} > K° = 10^{5,2}$:

évolution dans le sens indirect, or en l'absence de produit dans l'état initial, absence de réaction : il ne se passe rien.

5. La réduction de l'oxyde de zinc par le charbon est une étape de la métallurgie du zinc par voie sèche, modélisée par l'équation-bilan

$$C_{(s)} + ZnO_{(s)} = CO_{(g)} + Zn_{(g)}$$

La réaction a lieu dans un four porté à 1300 K, où la constante d'équilibre vaut $K° = 11,8$. L'enceinte du four est supposée initialement vide, de volume invariable $V = 10\ L$, dans laquelle on apporte à l'état initial n_0 mol de carbone graphite et n_0 mol d'oxyde de zinc. Déterminer la pression dans l'enceinte lorsque l'équilibre est atteint. Pour n_0 variant de 0 à 1 mol et la représenter graphiquement. Préciser dans quel domaine l'équilibre est atteint et dans quel domaine il y a rupture d'équilibre.

Eléments de réponse :

Tableau d'avancement de la réaction lorsque l'équilibre est atteint :

	Bilan en moles		$C_{(s)}$ +	$ZnO_{(s)}$ =	$CO_{(g)}$ +	$Zn_{(g)}$	$n_{tot,gaz}$
	E.I.		n_0	n_0	0	0	0
	E.F.		$n_0 - \xi_{éq}$	$n_0 - \xi_{éq}$	$\xi_{éq}$	$\xi_{éq}$	$2\xi_{éq}$

Si l'équilibre est atteint, d'après la L.A.M. :

$$K° = 11{,}8 = \frac{a_{CO,éq}a_{Zn,éq}}{a_{C,eq}a_{ZnO,éq}} = \frac{P_{CO,éq}P_{Zn,éq}}{P°^2 \times 1 \times 1} = \frac{x_{CO,éq}x_{Zn,éq}}{P°^2}P_{éq}{}^2 = \frac{n_{CO,éq}n_{Zn,éq}}{n_{tot,gaz}{}^2}\left(\frac{P_{éq}}{P°}\right)^2 = \left(\frac{\xi_{éq}}{2\xi_{éq}}\frac{P_{éq}}{P°}\right)^2 = \left(\frac{1}{2}\frac{P_{éq}}{P°}\right)^2$$

Soit

$$\boxed{P_{éq} = 2\sqrt{K°}P° = 6{,}87 \text{ bar}}$$

D'après l'équation d'état des gaz parfaits, $P_{éq}V = n_{tot,gaz}RT = 2\xi_{éq}RT$ soit $\boxed{\xi_{éq} = \frac{P_{éq}V}{2RT} = 0{,}318 \text{ mol}}$.

Si $n_0 > \xi_{éq}$: à l'équilibre, le nombre de moles final $n_0 - \xi_{éq}$ de C $_{(s)}$ et de ZnO $_{(s)}$ est non nul, l'équilibre est bien atteint, et la pression P_F régnant dans l'enceinte est $P_F = P_{éq} = 6{,}87 \text{ bar} = \text{cte}$.

$\forall n_0 < \xi_{éq}$, il y a rupture d'équilibre, avec $\xi_{max} = n_0$ et $P_F V = n_{tot,gaz}RT = 2n_0RT$ soit $\boxed{P_F = \frac{2n_0RT}{V}}$: variation linéaire.

6. ❤ On considère la réaction en phase aqueuse diluée des ions carbonates avec des ions oxonium :

$$\mathbf{CO_3^{2-} + 2H_3O^+ = H_2CO_3 + 2H_2O}, \qquad \boldsymbol{K°} = 10^{16,7}$$

La concentration initiale en ions carbonate est de 10^{-3} mol.L^{-1} et celle en ions oxonium est de 10^{-2} mol.L^{-1}. Déterminer la composition de la solution à l'équilibre.

Eléments de réponse :

Absence de réactifs dans l'état initial, $Q_r = 0$, avancement dans le sens direct. Tableau d'avancement :

Bilan en mol /L	CO_3^{2-}	+ $2H_3O^+$	$= H_2CO_3$	$+ 2H_2O$
E.I.	10^{-3}	10^{-2}	0	/
E.F.	$10^{-3} - x$	$10^{-2} - 2x$	x	/
E.F. approché	ε	8.10^{-3}	10^{-3}	/

Avec $K° = 10^{16,7} \gg 1$, on peut faire l'hypothèse d'une réaction quasi-totale, avec consommation complète du réactif limitant, soit ici $x \approx 10^{-3}$ mol/L et $\varepsilon = 10^{-3} - x \ll 10^{-3}$ mol/L

A l'équilibre, d'après la L.A.M. :

$$K° = \frac{[H_2CO_3] \times 1}{[CO_3^{2-}] \times [H_3O^+]^2} = \frac{x}{(10^{-3} - x)(10^{-2} - 2x)^2} \approx \frac{10^{-3}}{\varepsilon(8.10^{-3})^2} = 10^{16,7}$$

Soit $\varepsilon = \frac{10^{-13,7}}{64} = 3{,}1.10^{-16}$ mol/L : on a bien $\varepsilon = 10^{-3} - x \ll 10^{-3}$ mol/L, hypothèse validée.

7. ❤ On met en solution des ions ammonium à la concentration de 10^{-2} mol.L^{-1}. Ils réagissent avec l'eau selon l'équation bilan :

$$\mathbf{NH_4^+ + H_2O = NH_3 + H_3O^+}, \qquad \boldsymbol{K°} = 10^{-9,2}$$

Déterminer la composition de la solution à l'équilibre.

Eléments de réponse :

Absence de réactifs dans l'état initial, $Q_r = 0$, avancement dans le sens direct. Tableau d'avancement :

Bilan en mol /L	NH_4^+	+ H_2O	$= NH_3$	+ H_3O^+
E.I.	10^{-2}	/	0	0
E.F.	$10^{-2} - x$	/	x	x
E.F. approché	10^{-2}	/	ε	ε

Avec $K° = 10^{-9,2} \ll 1$, on peut faire l'hypothèse d'une réaction très peu avancée, soit ici $10^{-2} - x \approx 10^{-2}$ mol/L et $x = \varepsilon \ll 10^{-2}$ mol/L

A l'équilibre, d'après la L.A.M. :

$$K_s = \frac{[\mathrm{NH_3}] \times [\mathrm{H_3O^+}]}{[\mathrm{NH_4^+}] \times 1} = \frac{x^2}{(10^{-2} - x)} \approx \frac{\varepsilon^2}{10^{-2}} = 10^{-9{,}2}$$

Soit $\boldsymbol{\varepsilon = 10^{-5{,}6}\ \mathrm{mol/L} = 2{,}5.10^{-6}\ \mathrm{mol/L}}$

On a bien $\boldsymbol{\varepsilon} \ll \mathbf{10^{-2}}\ \mathrm{mol/L}$ hypothèse validée.

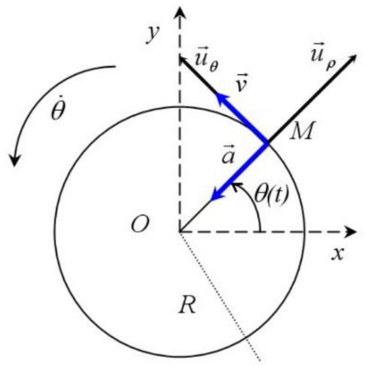
8. ❤ Donner sans démonstration les expressions des vecteurs position, déplacement élémentaire, vitesse et accélération dans une base cylindrique. Cas particuliers des mouvements circulaires puis circulaires uniformes.

Coordonnées	**Vecteur position $\overrightarrow{OM}$**	**Vitesse $\overrightarrow{v_R}$**	**Déplacement élémentaire $\mathrm{d}\overrightarrow{OM}$**	**Accélération $\overrightarrow{a_R}$**
cylindriques	$r\,\overrightarrow{u_r}(\theta) + z.\overrightarrow{u_z}$	$\dot{r}\,\overrightarrow{u_r} + r\,\dot{\theta}\,\overrightarrow{u_\theta} + \dot{z}\,\overrightarrow{u_z}$	$dr\,\overrightarrow{u_r} + r\,d\theta\,\overrightarrow{u_\theta} + dz\,\overrightarrow{u_z}$	$(\ddot{r} - r\,\dot{\theta}^2)\overrightarrow{u_r} + (2\dot{r}\dot{\theta} + r\,\ddot{\theta})\,\overrightarrow{u_\theta} + \ddot{z}\,\overrightarrow{u_z}$

MC (mouvement circulaire) :

$$\overrightarrow{v_R} = R\dot{\theta}\,\overrightarrow{u_\theta} = R\omega\,\overrightarrow{u_\theta}$$

$$\overrightarrow{a_R} = -\,R\,\dot{\theta}^2\,\overrightarrow{u_r} + R\ddot{\theta}\,\overrightarrow{u_\theta} = \underbrace{-\frac{v^2}{R}\overrightarrow{u_r}}_{\vec{a}_N} + \underbrace{R\ddot{\theta}\,\overrightarrow{u_\theta}}_{\vec{a}_T} = -\frac{v^2}{R}\overrightarrow{u_r} + R\frac{d\omega}{dt}\overrightarrow{u_\theta}$$



MCU (mouvement circulaire uniforme) : $v = R\omega = cte$; $\dot{\theta} = \omega = cte$

$$\overrightarrow{v_R} = R\dot{\theta}\,\overrightarrow{u_\theta} = R\omega\,\overrightarrow{u_\theta} \qquad \overrightarrow{a_R} = -\,R\,\dot{\theta}^2\,\overrightarrow{u_r} = \underbrace{-\frac{v^2}{R}\overrightarrow{u_r}}_{\vec{a}_N}$$

9. On considère un projectile lancé avec une vitesse initiale v_0 suffisamment faible pour que l'on puisse négliger la force de frottement fluide de l'air. On note θ l'angle de la vitesse $\vec{v}$ avec le plan horizontal et θ_0 sa valeur à l'instant initial (**figure 1 ci-contre).** On prend un repère dont l'origine O est la position de la particule à l'instant initial.

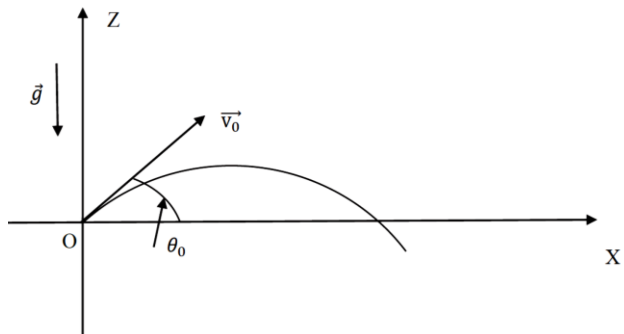


Figure 1 - Trajectoire

c) ❤ Etablir l'équation du mouvement sur la base cartésienne.

d) Établir les équations paramétriques de la vitesse et de la position en fonction du temps.

Eléments de réponse :

1) Système : point M de masse m étudié dans le référentiel terrestre supposé galiléen.

Bilan des actions mécaniques extérieures (BAME) : poids $\vec{P} = m\vec{g}$ (chute libre)

Principe Fondamental de la Dynamique (PDF) : $m\vec{g} = m\vec{a}_G = m\frac{d\vec{v}}{dt}$

Etude cinématique : coordonnées cartésiennes, en choisissant un axe (Oz) vertical ascendant et un axe (Ox) horizontal vers la droite. La vitesse initiale étant dans le plan (Oxz) ainsi que la résultante des forces, mouvement plan. On a donc $\vec{v} = \dot{x}\,\overrightarrow{u_x} + \dot{z}\,\overrightarrow{u_z}$

Projection du PFD sur $\overrightarrow{u_x}$ et $\overrightarrow{u_z}$: $\boxed{\begin{cases} m\ddot{x} = 0 \\ m\ddot{z} = -mg \end{cases}}$

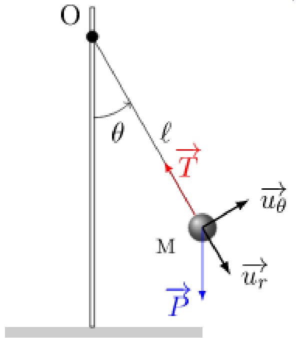
2) On intègre les équations précédentes une première fois par rapport au temps, en exploitant la vitesse initiale afin de déterminer les constantes d'intégration :

$$\dot{x} = v_0 cos(\alpha_0) \qquad (1)$$
$$\dot{z} = -gt + v_0 sin(\alpha_0) \qquad (2)$$

Puis une seconde fois, la position initiale correspondant à l'origine du repère :

$$\boxed{\begin{cases} x(t) = v_0 cos(\theta_0)t & (3) \\ z(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0 sin(\theta_0)t & (4) \end{cases}}$$

10. Un point matériel M de masse m est suspendu à un fil supposé inextensible de longueur L. On suppose que le fil reste toujours tendu. A $t = 0$, le point M est lâché depuis un angle α par rapport à la verticale, avec une vitesse initiale v_0.



c) ❤️ Etablir l'équation différentielle du mouvement du pendule en exploitant, au choix de l'examinateur, la seconde loi de Newton ou le théorème de la puissance mécanique.

d) Etablir l'expression de la tension T du fil. A quelle condition le fil reste-t-il tendu ?

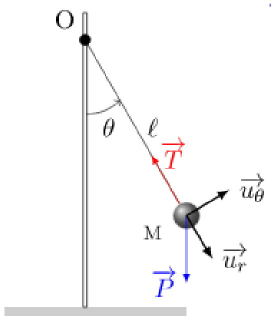
Eléments de réponse :

a) Système : point M de masse m, étudié dans le référentiel terrestre supposé galiléen.

Méthode N°1 : PFD :

Etude cinématique *: mouvement circulaire, choix des coordonnées polaires*

en coordonnées polaires, $\overrightarrow{v(M)_R} = L\,\dot{\theta}\,\overrightarrow{u_\theta}$ *et* $\overrightarrow{a(M)_R} = \left(-L\,\dot{\theta}^2\right)\overrightarrow{u_r} + (L\,\ddot{\theta}\,)\,\overrightarrow{u_\theta}$



Bilan des actions mécaniques extérieures *: M subit*

- *Son poids, vertical descendant :* $\vec{P} = m\,\vec{g} = mgcos\theta\,\overrightarrow{u_r} - mgsin\theta\,\overrightarrow{u_\theta}$
- *La tension du fil dirigée selon le fil vers O et de norme T inconnue :* $\vec{T} = -T\,\overrightarrow{u_r}$

PFD *: Selon la 2nde loi de Newton dans un référentiel galiléen :* $\vec{P} + \vec{T} = m\,\overrightarrow{a(M)_R}$

Projection sur	$\vec{P}$	+	$\vec{T}$	=	$m\,\overrightarrow{a(M)_R}$
$\overrightarrow{u_r}$	$mgcos\theta$	+	$-T$	=	$-mL\,\dot{\theta}^2$
$\overrightarrow{u_\theta}$	$-mgsin\theta$	+	0	=	$mL\,\ddot{\theta}$

Equation différentielle du mouvement : correspond à la projection sur $\overrightarrow{u_\theta}$:

$$mL\ddot{\theta} = -mgsin\theta \quad \Leftrightarrow \quad \boxed{L\ddot{\theta} + gsin\theta = 0}$$

Méthode N°2 : TPM

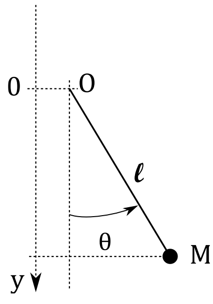
On introduit l'axe (Oy) vertical descendant

Bilan des actions mécaniques extérieures *s'exerçant sur le système :*

Poids, associé à l'énergie potentielle de pesanteur $Ep_p = -mgy + cte$.

Tension du fil, qui ne travaille pas (toujours perpendiculaire au déplacement

Le système est donc conservatif.



$$y = +\,\ell\cos\theta$$

D'où : $$E_p = -\,mg\ell\cos\theta + cte$$

Energie mécanique en un point quelconque *caractérisé par l'angle θ :* $Em = Ec + Ep$;

le point M décrivant une trajectoire circulaire de rayon l, sa vitesse est $v = l\dot{\theta}$*, d'où:* $Ec = \frac{1}{2}m\ell^2\dot{\theta}^2$

soit finalement $Em = \frac{1}{2}m\ell^2\dot{\theta}^2 - mgl\cos\theta + cte \underbrace{=}_{système\ conservatif} cte$

Théorème de la puissance mécanique :

$\frac{dEm}{dt} \underbrace{=}_{\substack{système \\ conservatif}} 0 = m\ell^2\dot{\theta}\ddot{\theta} + mgl\dot{\theta}\sin\theta \iff \begin{cases} \dot{\theta} = 0 \\ \ell^2\ddot{\theta} + gl\sin\theta = 0 \end{cases}$

La solution $\dot{\theta} = 0$ *correspond à une vitesse toujours nulle, ce qui n'a pas d'intérêt pour l'étude du mouvement.*

L'équation différentielle du mouvement est donc : $\ell^2\ddot{\theta} + gl\sin\theta = 0 \iff \boxed{\ddot{\theta} + \frac{g}{l}\sin\theta = 0}$

b) D'après la projection du PFD selon $\overrightarrow{u_r}$ *, on a* $mg\cos\theta - T = -mL\,\dot{\theta}^2 = -m\,\frac{v^2}{L}$ *Soit* $\boxed{T = mg\cos\theta + \frac{mv^2}{L}}$

Fil tendu si $\forall t,\ T > 0$

11. ❤️ Un parachutiste de masse m saute d'un hélicoptère en vol stationnaire. Au début du saut, il n'est soumis qu'à son poids, puis il ouvre son parachute après avoir atteint une vitesse v_0 à un instant qui sera pris comme instant initial. Il est alors également soumis à une force de frottement exercée par l'air de la forme $\vec{F} = -\lambda\vec{v}$. Etablir l'équation différentielle régissant l'évolution de la vitesse lorsque le parachute est ouvert. Résoudre cette équation en exprimant la vitesse limite v_{lim} atteinte par le parachutiste.

Eléments de réponse :

Après ouverture du parachute :

Bilan des actions mécaniques extérieures :

$\vec{P} = m\vec{g} = mg\overrightarrow{u_z}$ *(et* $E_p = -mgz + cte$*)*

$\vec{F} = -\lambda v\,\overrightarrow{u_z}$ *(et* $P = \vec{F}.\vec{v} = -\lambda v^2$*)*

Principe fondamental de la dynamique projeté ou TPM après simplification :

$$m\frac{dv}{dt} = mg - \lambda v \implies \frac{dv}{dt} + \frac{\lambda}{m}v = g$$

$$\boxed{\frac{dv}{dt} + \frac{\lambda}{m}v = g}$$

Equation différentielle du premier ordre à coefficients constants positifs et second membre constant. Lorsque la vitesse limite est atteinte, on a $\frac{dv}{dt} = 0$ *, soit* $\frac{\lambda}{m}v_{lim} = g$ *ou* $v_{lim} = \frac{mg}{\lambda}$

sous forme canonique avec $\tau = \frac{m}{\lambda}$ *temps caractéristique :*

$$\frac{dv}{dt} + \frac{v}{\tau} = \frac{v_{lim}}{\tau}$$

Solution Générale à l'équation Homogène : $v_H(t) = Ae^{-\frac{t}{\tau}}$

Solution Particulière à l'équation Complète : $v_p(t) = v_{lim}$

Solution Générale à l'équation Complète : $v(t) = Ae^{-\frac{t}{\tau}} + v_{lim}$

Constante d'intégration à l'aide des conditions initiales :

$$v(t=0) \underbrace{=}_{\substack{équation \\ à\ t=0}} A + v_{lim} \underbrace{=}_{C.I.} v_0$$

$$A = v_0 - v_{lim}$$

$$\boxed{v = (v_0 - v_{lim})e^{-\frac{t}{\tau}} + v_{lim}}$$

12. ❤️ Un étudiant glisse sur une piste de ski depuis une altitude $h = 15\ m$. Sa vitesse initiale est nulle. On note $\alpha = 30°$ l'angle entre la piste et l'horizontale. On tient compte d'une force de frottement constante F. Déterminer l'expression de la vitesse du skieur en bas de la pente en fonction de la force F.

Eléments de réponse :

Travail de la force de frottement du point A en haut de la piste au point B au bas de la piste : on introduit un axe (Ox) le long de la pente, d'origine le point A, avec $x_B = x_f = \frac{h}{\sin\alpha}$.

$$W(\vec{F}) = \int_A^B -F\overrightarrow{u_x}.\,d\overrightarrow{OM} = \int_A^B -Fdx = -Fx_f = -F\frac{h}{\sin\alpha}$$

Système *: étudiant supposé ponctuel étudié dans le référentiel terrestre supposé galiléen*

Bilan des actions mécaniques extérieures :

- *poids $\vec{P}$ (dérivant de l'énergie potentielle de pesanteur $E_{pp} = +mgz + cte$, avec z altitude)*
- *réaction normale du support $\overrightarrow{R_N}$*
- *Force de frottement solide $\vec{F} = -F\overrightarrow{u_x}$, non conservative*

Étude énergétique :

Théorème de l'énergie mécanique *entre le point A : position initiale du skieur en haut de la piste et le point B : skieur en bas de la piste :*

$$E_m(B) - E_m(A) = W(\vec{F}_{non\ conservative}) = \int_A^B -F\overrightarrow{u_x}.\,d\overrightarrow{OM} = -F\frac{h}{\sin\alpha}$$

Avec $E_m(A) = \frac{1}{2}m{v_A}^2 + mgz_A + cte \underbrace{=}_{\substack{vitesse\\initiale\\nulle}} mgz_A + cte$ *et*

$E_m(B) = \frac{1}{2}m{v_B}^2 + mgz_B + cte = \frac{1}{2}m{v_f}^2 + mgz_B + cte$

En l'exploitant le Théorème de l'énergie mécanique entre les points A et B :

$E_m(B) - E_m(A) = -F\frac{h}{\sin\alpha}$ *avec* $z_A - z_B = h$: $\frac{1}{2}m{v_f}^2 - mgh = -F\frac{h}{\sin\alpha}$

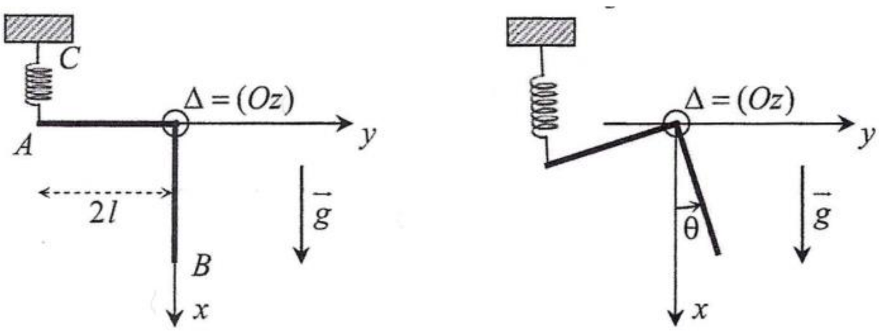
soit

$$\frac{1}{2}m{v_f}^2 = mgh - F\frac{h}{\sin\alpha} = h\left(mg - \frac{F}{\sin\alpha}\right)$$

D'où

$$\boxed{v_f = \sqrt{2h\left(g - \frac{F}{m\sin(\alpha)}\right)}}$$

13. Un solide $\mathcal{S}$ est constitué de 2 tiges AO et OB homogènes rigidement liées l'une à l'autre et faisant entre elles un angle droit constant. Chaque tige a pour masse m et pour longueur 2ℓ. $\mathcal{S}$ peut tourner autour d'un axe horizontal (Δ) passant par O (axe (Oz), la liaison en O étant une liaison pivot parfaite. Un ressort de masse négligeable, de constante de raideur k, est accroché à l'un de ses extrémités en A et l'autre extrémité C est maintenue fixe. Lorsque l'ensemble est en équilibre dans le champ de pesanteur, AO est horizontale et OB verticale. On suppose que la force exercée par le ressort sur le solide reste toujours verticale durant le mouvement.



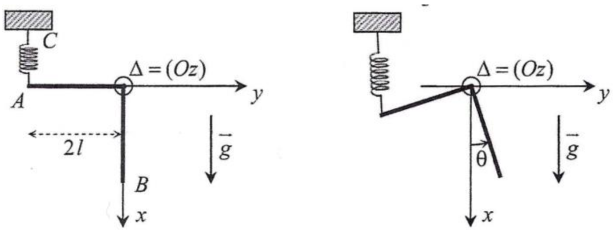
Faire un bilan des actions exercées sur le solide et déterminer leur moment respectif par rapport à l'axe de rotation, en fonction notamment de θ.

Eléments de réponse

Système Etudié : *l'ensemble solide $\mathcal{S}$ constitué des deux tiges, de moment d'inertie total $J_\Delta = \frac{8mL^2}{3}$ par rapport à l'axe $\Delta = (O\,;\,\overrightarrow{e_z})$.*

Référentiel d'étude : *Référentiel terrestre $\mathcal{R}_g(O\,;\overrightarrow{e_x}\,;\,\overrightarrow{e_y}\,;\overrightarrow{e_z}\,)$ supposé galiléen.*

Bilan des actions mécaniques extérieures :



Poids $\vec{P} = m\vec{g}$ du système ;

Force de liaison en O

Force de rappel élastique $\vec{F}_{eA}$ exercée par le ressort en A :

$$\vec{F}_{eA} = -k(AC - \ell_0)\overrightarrow{e_x}$$

Or $AC = \underbrace{\ell_{éq}}_{\substack{\text{longueur lorsque} \\ \text{la tige AO est horizontale}}} + 2l\sin\theta$

$$\vec{F}_{eA} = -k\left(\ell_{éq} + 2l\sin\theta\ - \ell_0\right)\overrightarrow{e_x}$$

La liaisons pivot en O étant idéale, $\mathcal{M}_\Delta\left(\vec{F}_{liaison}\right) = 0$

Le système étant composé de deux tiges OA et OB, on a $\mathcal{M}_\Delta(\vec{P}) = \mathcal{M}_\Delta(\vec{P}_{OA}) + \mathcal{M}_\Delta(\vec{P}_{OB})$.

De plus, le centre de gravité de chaque tige, supposée homogène et de longueur $2l$, se trouve au milieu de la tige, donc à la distance l du point O. En choisissant un sens positif de rotation dans le sens trigonométrique, on a :

$\mathcal{M}_\Delta(\vec{P}) = \mathcal{M}_\Delta(\vec{P}_{OA}) + \mathcal{M}_\Delta(\vec{P}_{OB}) = +mg\ell\cos\theta - mg\ell\sin\theta.$

$$\mathcal{M}_\Delta(\vec{F}_{eA}) = -k\left(\ell_{éq} + 2l\sin\theta\ - \ell_0\right)(2\ell\cos\theta)$$

$$\sum_i \mathcal{M}_\Delta(\vec{F}_i) = +mg\ell\cos\theta - mg\ell\sin\theta - k(2\ell\sin\theta + AC - \ell_0)(2\ell\cos\theta)$$

14. ❤ Un solide $\mathcal{S}$ pouvant être en rotation autour d'un axe de rotation $(\Delta\,)$ a un moment d'inertie J_Δ par rapport à l'axe. Il est soumis à un moment global des forces extérieures par rapport à l'axe $(\Delta\,)$ $\sum_i \mathcal{M}_\Delta\left(\vec{F}_i\right) = +mg\ell(\cos\theta - \sin\theta)$. Déterminer à l'aide du théorème du moment cinétique l'équation différentielle vérifiée par $\theta(t)$.

Eléments de réponse :

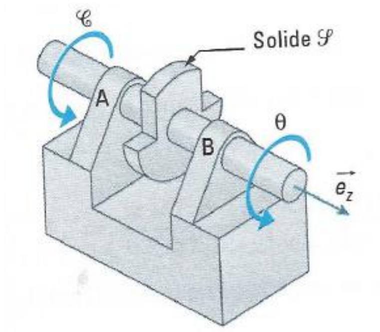
Théorème du moment cinétique scalaire au solide dans $\mathcal{R}_g$

$$\frac{dL_\Delta}{dt} = \sum_i \mathcal{M}_\Delta(\vec{F}_i)$$

Le solide étant en rotation autour d'un axe fixe Δ, $L_\Delta = J_\Delta \omega = J_\Delta \dot{\theta}$, *soit* $\frac{dL_\Delta}{dt} = J_\Delta \ddot{\theta}$

$$J_\Delta \ddot{\theta} = mg\ell(\cos\theta - \sin\theta)$$

15. Une machine de test est constituée d'un arbre cylindrique homogène d'axe $\Delta = (A\,;\overrightarrow{e_z})$ lié à 2 liaisons pivot idéales en A et en B ; elle permet de tester le solide $\mathcal{S}$ qui est solidaire de l'arbre. On supposera que le moment d'inertie de l'arbre par rapport à Δ est négligeable, et que le centre d'inertie du solide appartient à cet axe Δ. Un couple moteur constant $\Gamma = 1{,}5$ Nm est appliqué à l'arbre et permet d'atteindre une vitesse de 1200 tr/min après 18 tours (en partant de l'arrêt). Déterminer le moment d'inertie J_Δ du solide $\mathcal{S}$ par rapport à l'axe $\Delta = (A\,;\overrightarrow{e_z})$ à l'aide d'un théorème énergétique.



Eléments de réponse :

***Utilisation du Théorème de l'énergie cinétique au solide dans** $\mathcal{R}_g$ entre le point correspondant à la position initiale et le point correspond à l'instant t₁ (18 tours parcourus).*

$\boldsymbol{\Delta Ec} = W(\vec{P}) + W(\vec{F}_{liaison}) + W(\vec{F}_{couple})$

Le solide étant en rotation autour d'un axe fixe Δ, $Ec = \frac{1}{2}J_\Delta\omega^2$ *;*

Le centre d'inertie G appartenant à Δ, il ne se déplace pas : $W(\vec{P}) = 0.$

De même, le point d'application des forces de liaison ne se déplace pas : $W(\vec{F}_{liaison}) = 0$ *;*

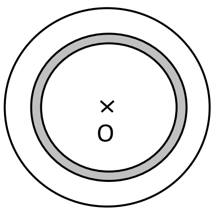
Le solide étant en rotation autour d'un axe fixe Δ,

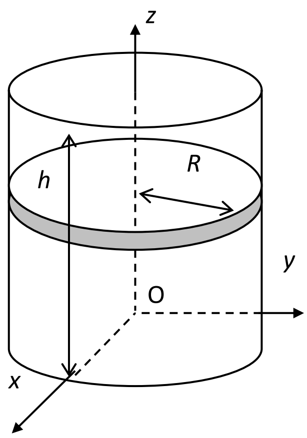
$$W(\vec{F}_{couple}) = \int \Gamma\, d\theta$$

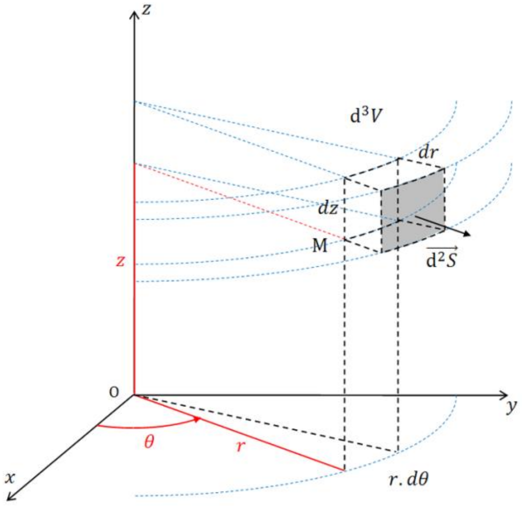
Finalement, $\boxed{\boldsymbol{\Delta Ec} = \frac{1}{2}J_\Delta \Delta(\omega^2) = \Gamma\Delta\theta}$

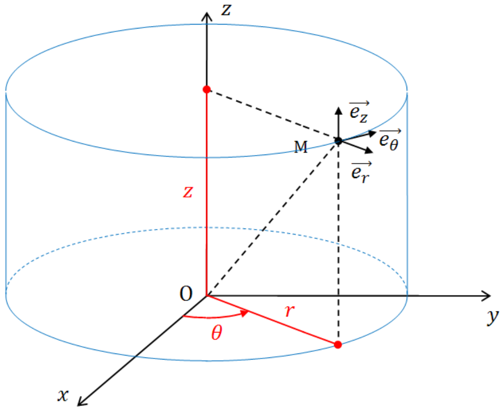
Soit ici entre $t = 0$ *et* t_1 *:* $\boxed{\frac{1}{2}J_\Delta\omega_1^2 = \Gamma\theta_1}$ *d'où* $\boxed{J_\Delta = 2\frac{\Gamma\theta_1}{\omega_1^2}}$

16. ❤ Donner en coordonnées cylindriques et sphériques l'expression du volume élémentaire, ainsi que dans le cas des coordonnées cylindriques l'expression des surfaces mésoscopiques correspondant à une couronne dans le plan $z = cte$ et d'une couronne à $r = cte$. Vous vous appuierez sur des schémas.





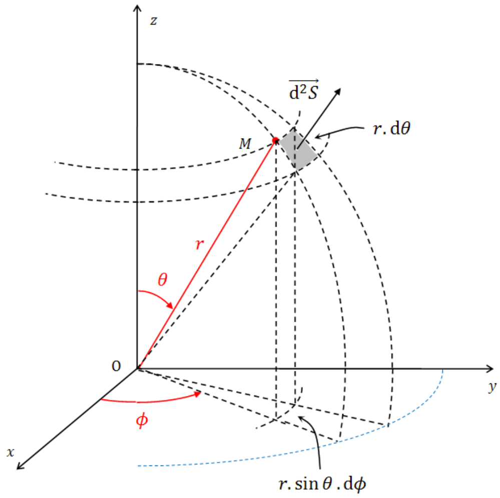




coordonnées cylindriques : Volume élémentaire : $d\tau = rd\theta drdz$

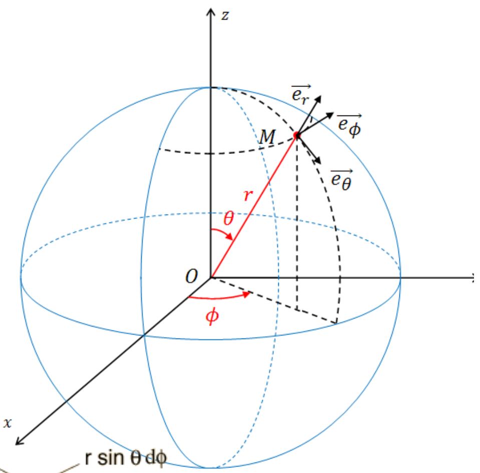
Couronne à $z = cte$: $dS = 2\pi rdr$ *(surface élémentaire* $d^2S = rd\theta dr$ *intégrée sur* θ *variant de 0 à* 2π*)*

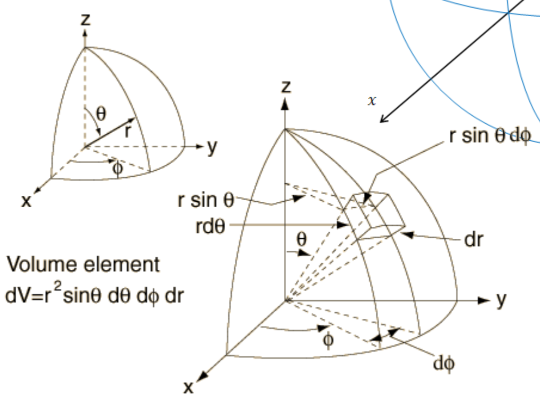
Couronne à $r = cte$: $dS = 2\pi Rdz$ *(surface élémentaire* $d^2S = Rd\theta dz$ *intégrée sur* θ *variant de 0 à* 2π*)*



Coordonnées sphériques :

$d\tau = r^2 sin\theta d\theta d\phi dr$





17. ❤️ Résultante des actions de contact exercées par un support solide sur un autre solide : Description, condition de contact ou de décollement, lois de Coulomb du frottement solide

Résultante des actions de contact de S_2 *(le support) sur* S_1*(le système) s'appliquant au niveau du contact* I *:*

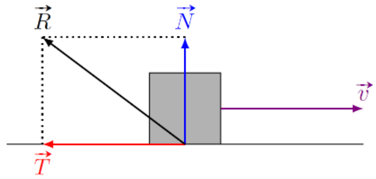
$$\vec{R}_{2\to 1} = \overrightarrow{R_N} + \overrightarrow{R_T}$$

Réaction normale *$\vec{N}$ ou $\overrightarrow{R_N}$: dirigée selon la normale au support, toujours orientée de la surface du support vers le système.*

$\overrightarrow{R_N} \perp \mathcal{P}$ *et* $\overrightarrow{R_N} = R_N\ \overrightarrow{n_{21}}$

avec $\overrightarrow{n_{21}}$ normale au plan $\mathcal{P}$ tangent au support au niveau du point I de contact, et telle que $\overrightarrow{R_N}.\overrightarrow{n_{21}} > 0$.

Réaction tangentielle *$\vec{T}$ ou $\vec{R}_T$: tangentielle au support et dirigée dans le sens opposé à la vitesse de glissement en cas de mouvement.*



$\vec{R}_T \in \mathcal{P}$ *et en cas de glissement : $\vec{R}_T.\vec{v}_g < 0$.*

Condition de contact *: telle que $R_N > 0$.*

Condition de décollement *de l'objet : $\vec{R}_N = \vec{R}_{2\to 1} = \vec{0}$*

Lois de Coulomb

Non glissement *du solide sur le support : $\|\overrightarrow{R_T}\| \leq f_s\|\overrightarrow{R_N}\|$*

où f_s coefficient de frottement statique. On a alors $\vec{v}_{g1/2} = \vec{0}$

Glissement *du solide sur le support : $\|\overrightarrow{R_T}\| = f_d\|\overrightarrow{R_N}\|$*

où f_d coefficient de frottement dynamique, avec $\overrightarrow{R_T}$ colinéaire à la vitesse de glissement $\vec{v}_{g1/2} \neq \vec{0}$ et de sens opposé.

$$\overrightarrow{R_T}.\vec{v}_{g1/2} < 0$$

Attention !! *Il s'agit de relations **entre les normes** des vecteurs, **pas entre les vecteurs.***