

DM. DE PHYSIQUE N°13 - MPI

PROBLEME N° 1 : POLES GEOGRAPHIQUES ET MAGNETIQUES (CCMP PSI)

Ce sujet aborde différentes questions relatives aux propriétés physiques particulières aux régions polaires. Les notations, valeurs des constantes fondamentales et les autres données numériques nécessaires à la résolution du problème ainsi qu'un formulaire sont regroupés à la fin de l'énoncé.

Les exemples seront tous traités dans le cas des régions polaires nord (également appelées arctiques ou boréales). Les notations géographiques usuelles sont également rappelées en fin d'énoncé. Les applications numériques comporteront au plus 2 chiffres significatifs.

Les pôles géographiques sont assez proches des pôles magnétiques ; dans tout ce qui suit, on pourra confondre les deux axes reliant les pôles opposés de chaque type. La recherche des pôles magnétiques s'est d'abord appuyée sur la mesure du champ magnétique terrestre (ou champ géomagnétique), et en particulier de sa direction. L'intensité croissante du champ géomagnétique à l'approche des pôles contribue enfin à expliquer un phénomène optique spectaculaire : les aurores polaires. Les parties I.A et I.B sont indépendantes entre elles.

La partie I.A est consacrée à la description dipolaire du champ géomagnétique (le dipôle disposé au centre de la Terre et modélisant des courants électriques dans le noyau de la planète).

Enfin, la partie I.B décrit quelques propriétés des mouvements des particules chargées à l'approche du pôle nord.

I.A. — Boussole, champ géomagnétique et dipôle central

Une boussole est formée d'un aimant permanent, solide en forme d'aiguille équivalente à un petit dipôle magnétique \vec{m} de norme constante m , la direction du vecteur \vec{m} étant supposée indiquer le nord.

Cette aiguille aimantée peut librement tourner autour d'un axe vertical (Δ) dirigé par le vecteur \vec{e}_r local et formant un pivot à faible frottement (cf. fig. 1).

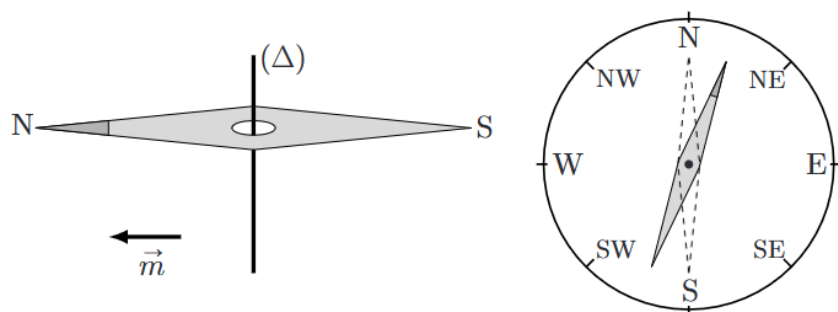


FIGURE 1 – Boussole de navigation

❑ 1 — Pourquoi la boussole à l'équilibre indique-t-elle le nord ? Cet équilibre est-il stable ?

On note I le moment d'inertie de l'aiguille aimantée relativement à son axe de rotation (Δ) ; légèrement écartée de sa position d'équilibre (cf. fig. 1), l'aiguille aimantée oscille avec une pseudo-période τ_{osc} .

❑ 2 — Montrer que la connaissance de m , τ_{osc} et I permet de déterminer une des composantes du champ géomagnétique. Laquelle ?

On étudie un modèle de champ géomagnétique créé par un dipôle magnétique $\vec{M} = M_0 \vec{e}_z$ disposé au centre O de la Terre (assimilée à une sphère de rayon R_T), l'axe (Oz) étant l'axe polaire géographique dirigé du pôle sud de cet axe vers son pôle nord (cf. fig. 5). On rappelle d'une part qu'un point de la surface est caractérisé par ses coordonnées géographiques φ (longitude) et $\lambda = \frac{\pi}{2} - \theta$ (latitude) et d'autre part qu'à l'équateur le champ magnétique terrestre est horizontal, dirigé vers le pôle nord géographique et y a pour intensité B_E .

□ 3 — Exprimer, en un point de la surface de la Terre et en coordonnées sphériques, le champ géomagnétique en fonction de μ_0 (perméabilité du vide), M_0 et R_T .

□ 4 — Préciser le signe de M_0 puis estimer sa valeur numérique. Quelles sont la direction et l'intensité du champ géomagnétique aux pôles magnétiques nord et sud ?

En un point P de la surface terrestre, on appelle *nord magnétique local* la direction \vec{e}_N du champ géomagnétique \vec{B} , projeté dans le plan horizontal, et *déclinaison magnétique* l'angle D formé par \vec{B} avec le nord magnétique local ; la déclinaison magnétique est positive si \vec{B} est dirigé vers le haut (vers le ciel) et négative s'il est dirigé vers le bas (vers le sol).

□ 5 — Dans l'hémisphère nord, quel est le signe de D ? Calculer $\tan(D)$ en fonction de la latitude λ puis tracer l'allure de la courbe donnant D en fonction de λ pour toutes les valeurs de λ du pôle sud au pôle nord. Pourquoi lisait-on parfois que les boussoles « s'affolent à proximité des pôles » ? Peut-on déterminer, au moyen d'une boussole, si on se trouve dans l'hémisphère nord ou dans l'hémisphère sud ?

I.B. — Aurores polaires

Les aurores polaires sont des phénomènes lumineux spectaculaires observables sur le fond du ciel nocturne des régions polaires : des particules chargées issues du vent solaire et guidées vers les pôles le long des lignes de champ du champ géomagnétique y interagissent avec la haute atmosphère. On n'étudie que quelques caractéristiques du mouvement de ces particules à l'approche du pôle nord.

On étudie d'abord le mouvement circulaire de centre O' d'une particule de charge q et de masse m sous la seule influence d'un champ magnétostatique uniforme $\vec{B}_0 = -B_0 \vec{e}_z$, avec $B_0 > 0$. On pourra utiliser des coordonnées polaires (r, θ) dans le plan du mouvement.

□ 6 — Montrer que le mouvement est uniforme et exprimer la vitesse angulaire ω_c du mouvement. Le cercle est-il parcouru dans le sens direct ou rétrograde ?

Ce mouvement est équivalent, pour des durées nettement supérieures à $2\pi/\omega_c$, à une boucle de courant circulaire de rayon r parcourue par un courant (moyen) i associé à la rotation périodique de la charge q . Il s'agit donc d'un dipôle magnétique de moment \vec{M} .

□ 7 — Montrer que l'énergie cinétique E_c du mouvement vérifie $E_c = -\vec{M} \cdot \vec{B}_0$. Pour la suite de cette partie, on considérera que ce résultat reste applicable, même si \vec{B}_0 n'est plus exactement uniforme.

On étudie maintenant le mouvement d'un proton dans un champ non uniforme, $\vec{B}_0 = -B_0(z) \vec{e}_z$; on notera $G_m(z) = \frac{dB_0}{dz}$ l'intensité du gradient associé. On admet l'expression de la résultante des forces exercées sur cette particule, en fonction du moment magnétique \vec{M} équivalent à son mouvement moyen : $\vec{F} = \left(\vec{M} \cdot \overrightarrow{\text{grad}} \right) \vec{B}_0$ soit aussi $\vec{F} = -M_z \frac{dB_0}{dz} \vec{e}_z$. Le proton, issu du vent solaire, s'approche du pôle terrestre nord.

- ❑ 8 — À l'approche du pôle nord et en justifiant votre réponse, préciser la direction et le sens des trois vecteurs \vec{B}_0 , \vec{M} et \vec{F} . Le proton est-il freiné ou accéléré ?
- ❑ 9 — L'hypothèse $G_m(z) \neq 0$ est-elle compatible avec l'équation de Maxwell assurant la conservation du flux magnétique le long d'un tube de courant ?
- ❑ 10 — Compte tenu du caractère dipolaire du champ géomagnétique, évaluer $G_m(z)$ puis l'accélération d'un proton d'énergie $E_c = 0,50 \text{ keV}$ à l'approche immédiate du pôle ; comparer aux effets de la pesanteur. Que peut-on en conclure ?

Données et formulaire utiles pour l'ensemble du sujet

Données numériques et constantes fondamentales

Champ magnétique terrestre à l'équateur	$B_E = 3,0 \times 10^{-5} \text{ T}$
Charge élémentaire	$e = 1,6 \times 10^{-19} \text{ C}$
Durée du jour solaire moyen	$T_0 = 24 \text{ h} = 8,6 \times 10^4 \text{ s}$
Intensité du champ de pesanteur	$g_0 = 9,8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$
Masse du proton	$m_p = 1,7 \times 10^{-27} \text{ kg}$
Masse volumique de l'eau liquide à 4°C	$\rho_e = 1,0 \times 10^3 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$
Perméabilité magnétique du vide	$\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \text{ H} \cdot \text{m}^{-1}$
Rayon terrestre	$R_T = 6,4 \times 10^3 \text{ km}$
Viscosité dynamique de l'eau liquide à 4°C	$\eta_e = 1,6 \times 10^{-3} \text{ kg} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{s}^{-1}$
Logarithme népérien du nombre 20	$\ln(20) \simeq 3,0$

Coordonnées sphériques et géographiques

On notera $(Oxyz)$ les axes cartésiens associés à la base orthonormée et directe $(\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$. Les coordonnées sphériques d'un point P sont notées (r, θ, φ) avec la base locale associée $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_\varphi)$, cf. fig. 5 à gauche. On note aussi φ (longitude) et λ la latitude d'un point P de la surface terrestre ; le point A est situé sur l'équateur dans le méridien origine ($\varphi = 0$) ; celui-ci passe par l'observatoire de Greenwich G , cf. fig. 5 à droite.

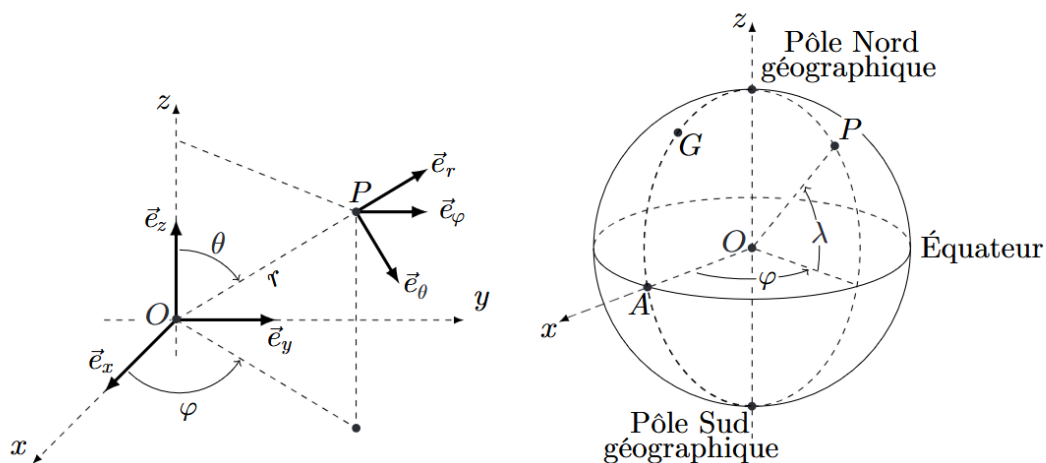


FIGURE 5 – Coordonnées sphériques et géographiques

Données et formules relatives aux dipôles magnétiques

Le champ magnétique créé par un dipôle de moment dipolaire \vec{M} placé à l'origine O des coordonnées est donné au point P par :

$$\vec{B}(P) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{3\vec{R}(\vec{M} \cdot \vec{R}) - R^2 \vec{M}}{R^5} \quad \text{où } \vec{R} = \overrightarrow{OP} \text{ et } R = \|\vec{R}\|$$

Les interactions d'un dipôle magnétique rigide de moment dipolaire \vec{m} soumis à un champ magnétique extérieur \vec{B} sont décrites par l'énergie potentielle $E_p = -\vec{m} \cdot \vec{B}$ et par le couple des actions électromagnétiques $\vec{\Gamma} = \vec{m} \wedge \vec{B}$.

PROBLEME N° 2 : TERRAFORMATION DE MARS (CCS PC)

Terraformation de Mars

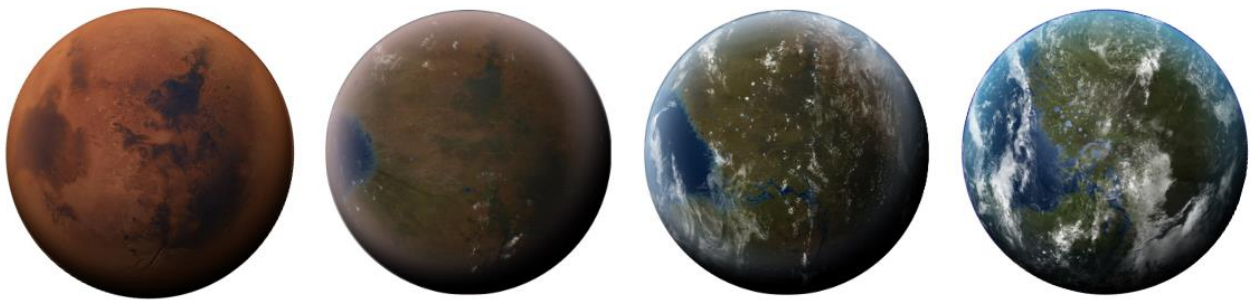


Figure 1 Vue d'artiste des phases hypothétiques de la terraformation de Mars. D'après Wikipédia, auteur : Daein Ballard.

Parue entre 1994 et 2000, la Trilogie de Mars de l'américain Kim Stanley Robinson relate la colonisation et la terraformation de la planète Mars.

La terraformation consiste à modifier la géologie et le climat d'une planète pour la rendre habitable par les humains ou toute forme de vie terrestre. Les modifications profondes à apporter à la planète sont complexes et demandent énormément de ressources. Sur Mars, les faibles température et pression empêchent la vie à la surface. Avant de développer un écosystème, il faut d'abord apporter une atmosphère à même de réchauffer la planète et de supporter la vie. Bien que considérée comme un vieux rêve de science fiction, la faisabilité de la terraformation soulève de nombreuses questions de physique, ce problème en abordant quelques-unes.

II Constitution d'une atmosphère martienne

II.A – Conditions de température et de pression attendues sur Mars

Terraformer, c'est aussi changer la température sur la planète à coloniser. Avec une température moyenne de 210 K, l'eau liquide n'est quasiment pas présente à la surface de la planète Mars. On va étudier dans quelle mesure l'atmosphère peut permettre, par effet de serre, une augmentation de la température.

On rappelle la loi de Stefan-Boltzmann qui donne la puissance émise par unité de surface d'un corps noir à la température T : $p_e = \sigma T^4$ où $\sigma = 5,67 \times 10^{-8} \text{ W}\cdot\text{m}^{-2}\cdot\text{K}^{-4}$.

De même, on rappelle la loi du déplacement de Wien qui permet de prédire la longueur d'onde pour laquelle la densité spectrale de puissance du rayonnement thermique émis par ce corps est maximale: $\lambda = \frac{\beta}{T}$, avec $\beta = 2,90 \times 10^{-3} \text{ m}\cdot\text{K}$. Dans la suite, on pourra considérer que ce rayonnement est monochromatique.

Les puissances surfaciques sont indiquées par des p minuscules, les puissances totales, par des \mathcal{P} majuscules caligraphiés. On repère par un premier indice, s ou m , les grandeurs relatives respectivement au Soleil ou à la planète Mars; un second indice, i , e ou a , indique respectivement si la puissance est incidente, émise ou absorbée.

II.A.1) Détermination de la température d'équilibre en l'absence d'atmosphère

En l'absence d'atmosphère, la principale source d'énergie permettant au sol martien d'atteindre sa température d'équilibre, notée T_m , est le rayonnement solaire. On suppose que T_m est uniforme en tout point de la surface de Mars.

Dans ce modèle, on considère que le sol de Mars n'absorbe pas la totalité de la puissance du rayonnement solaire incident, notée $\mathcal{P}_{m,i}$. Il en réfléchit une partie, notée $\mathcal{P}_{m,r}$, selon la loi $\mathcal{P}_{m,r} = \alpha \mathcal{P}_{m,i}$ où la constante α , appelée albédo de Bond de la surface de Mars, vaut 0,25.

Q 23. Exprimer la puissance totale émise par la surface du Soleil, notée $\mathcal{P}_{s,e}$.

Q 24. Exprimer la puissance moyenne surfacique reçue par le sol martien, $p_{m,i}$, au niveau de l'orbite de Mars.

Q 25. Exprimer la puissance totale absorbée par la planète, notée $\mathcal{P}_{m,a}$.

Q 26. Exprimer la puissance émise par la planète, notée $\mathcal{P}_{m,e}$.

Q 27. Justifier que la puissance absorbée doit être égale à la puissance émise, puis en déduire l'expression et la valeur de la température d'équilibre T_m pour la surface de Mars en l'absence d'atmosphère. Commenter.

II.A.2) Utilisation du modèle de l'effet de serre

On considère que le sol martien absorbe toujours une fraction du rayonnement solaire incident selon la loi indiquée dans la sous-partie précédente. Par contre, on admet qu'il absorbe totalement le rayonnement atmosphérique. On note T'_m , la nouvelle température d'équilibre de la surface du sol martien, supposée uniforme.

Quant à l'atmosphère, elle peut être modélisée par une fine couche de gaz (épaisseur $e \ll R_m$) totalement transparente aux rayonnements électromagnétiques, sauf aux infrarouges pour lesquels elle absorbe une fraction ε des rayonnements. On suppose que l'atmosphère, homogène, possède une température uniforme notée T_a .

On néglige tout phénomène de réflexion du rayonnement par l'atmosphère.

Q 28. Indiquer à quel domaine du rayonnement électromagnétique correspond le rayonnement émis par le Soleil. Préciser également à quel domaine du rayonnement électromagnétique doit correspondre le rayonnement émis par le sol martien.

Q 29. En respectant les conventions de notations adoptées, réaliser un schéma faisant apparaître les puissances surfaciques incidentes, absorbées et émises par la surface du sol martien et par son atmosphère.

Q 30. À partir de deux bilans de puissances, déterminer la température d'équilibre du sol martien, T'_m , en présence d'une atmosphère en fonction de $\mathcal{P}_{s,e}$, α , ε et r_m , puis en fonction uniquement de T_m et ε .

Q 31. Calculer la valeur du coefficient d'absorption ε qu'il faudrait pour obtenir une température moyenne au sol de 298 K sur Mars. Commenter le résultat.

Q 32. Déterminer la température d'équilibre du sol martien maximale envisageable en supposant que l'on soit capable d'optimiser les coefficients α et ε . Conclure.

Données et formulaire

Caractéristiques de la planète Mars :

Rayon moyen de l'orbite martienne autour du Soleil	r_m	$2,28 \times 10^8$ km
Rayon moyen de la planète Mars	R_m	$3,39 \times 10^3$ km
Masse de la planète Mars	m_m	$6,42 \times 10^{23}$ kg
Température à la surface de Mars	T_0	210 K
Pression à la surface de Mars	P_0	600 Pa
Altitude moyenne de l'exobase (hors tempêtes de poussière)	e	$2,20 \times 10^2$ km

Caractéristiques du Soleil :

Rayon moyen du Soleil	R_s	$6,96 \times 10^5$ km
Masse du Soleil	m_s	$1,99 \times 10^{30}$ kg
Température de surface du Soleil	T_s	5778 K

Ceinture d'astéroïdes :

Rayon moyen de la ceinture d'astéroïdes	r_{ast}	$4,6 \times 10^8$ km
---	-----------	----------------------

Autres données utiles :

Constante de gravitation universelle	G	$6,67 \times 10^{-11} \text{ m}^3 \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{s}^{-2}$
Constante des gaz parfaits	R	$8,314 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{mol}^{-1}$
Constante des gaz parfaits	R	$8,314 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{mol}^{-1}$
Constante d'Avogadro	N_a	$6,02 \times 10^{23} \text{ mol}^{-1}$
Masse molaire du carbone	M_C	$12 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}$
Masse molaire de l'oxygène	M_O	$16 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}$
Masse molaire de l'argon	M_{Ar}	$40 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}$
Masse molaire de l'azote	M_N	$14 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}$

Des opérateurs vectoriels en coordonnées sphériques :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{\text{grad}} f &= \frac{\partial f}{\partial r} \overrightarrow{u_r} + \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta} \overrightarrow{u_\theta} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial f}{\partial \varphi} \overrightarrow{u_\varphi} \\ \text{div } \overrightarrow{f} &= \frac{1}{r^2} \frac{\partial(r^2 f_r)}{\partial r} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial(f_\theta \sin \theta)}{\partial \theta} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial f_\varphi}{\partial \varphi} \\ \left[f(r) \overrightarrow{u_r} \cdot \overrightarrow{\text{grad}} \right] \left(f(r) \overrightarrow{u_r} \right) &= f(r) \frac{df(r)}{dr} \overrightarrow{u_r} \end{aligned}$$

Quelques intégrales : $\int_0^\infty u^2 \exp(-u) du = 2$ et $\int_0^\infty u \exp(-u) du = 1$.

• • • FIN • • •