

# TD CHAPITRE MK.0 – PARTIE 1 : REVISIONS DE PREMIERE ANNEE

## ■ CONSEILS A SUIVRE ; ERREURS A NE PAS COMMETTRE



Désigne un exercice classique, qu'il est nécessaire de savoir refaire de façon rapide et rigoureuse



Difficulté des techniques et outils mathématiques nécessaires



Difficulté d'analyse, de compréhension, prise d'initiatives

## ■ EXERCICES DE REVISION

### Exercice 1. Course poursuite dans la savane 1 ou 2 | 1

Un guépard affamé tente d'attraper une antilope qui l'a malheureusement repéré. Elle s'élanche alors que le guépard est encore à 70 mètres d'elle, à une vitesse de 85 km.h<sup>-1</sup> qu'elle peut maintenir pendant plusieurs kilomètres. Le guépard peut quant à lui courir à une vitesse de 110 km.h<sup>-1</sup>, mais seulement pendant 400 m. Au-delà, il ralentit fortement et l'antilope devient plus rapide. Dans tout l'exercice, on négligera les phases d'accélération, et on estimera les variations de vitesse comme ayant lieu de manière instantanée.

L'antilope va-t-elle se faire dévorer par le guépard ?

Rép. : non, elle parvient à s'échapper ! Distance parcourue par l'antilope : 340 m

### Exercice 2. Descente dans un parking souterrain *D'après E. Thibierge* | 2 | 2

L'architecture du parking des Halles de Lyon (voir photo ci-contre) est telle que lorsqu'une voiture descend elle reste à distance constante de l'axe du parking. On supposera l'inclinaison de la rampe de parking constante, la voiture sera supposée ponctuelle, et on supposera qu'elle se déplace dans le parking à vitesse constante.



1. Le problème étant étudié en coordonnées cylindriques, justifier qualitativement que la composante verticale de la vitesse  $V_z = \dot{z}$  est constante, puis donner avec le minimum de calculs les équations horaires de la distance à l'axe  $r(t)$  et de l'altitude  $z(t)$ .
2. Rappeler les expressions de la vitesse et de l'accélération en coordonnées cylindriques, et simplifier au maximum ces expressions générales en les adaptant aux caractéristiques du problème étudié.

### Exercice 3. Trajectoires des plombs d'une cartouche *(d'après CCINP MP 2017)* | 2 | 2 ou 3

#### Données

On suppose l'accélération de la pesanteur égale à  $\vec{g} = -g\vec{k}$  avec  $g = 9,81 \text{ m.s}^{-2}$ .

- Le référentiel terrestre est supposé galiléen.
- Masse volumique du plomb solide :  $\rho = 11\,350 \text{ kg.m}^{-3}$ .

- Masse volumique de l'air :  $\rho_a = 1,23 \text{ kg.m}^{-3}$ .

Un fusil de chasse permet d'éjecter de la bouche du fusil les sphères de plomb qui étaient dans la cartouche avec une vitesse initiale qui, en moyenne, vaut  $v_0 = 380 \text{ m.s}^{-1}$ .

Nous allons étudier la trajectoire d'un plomb de cartouche supposée ponctuelle de masse  $m$ , dont la dimension est typiquement de quelques millimètres et la masse inférieure au gramme. On néglige la poussée d'Archimède.

### Premier modèle : trajectoire gravitaire

On considère le cas où la vitesse initiale du projectile est suffisamment faible pour que l'on puisse négliger la force de frottement fluide de l'air.

1. Etablir l'équation du mouvement sur la base cartésienne (figure 1 ci-contre). On note  $\theta$  l'angle de la vitesse  $\vec{v}$  avec le plan horizontal et  $\theta_0$  sa valeur à l'instant initial.

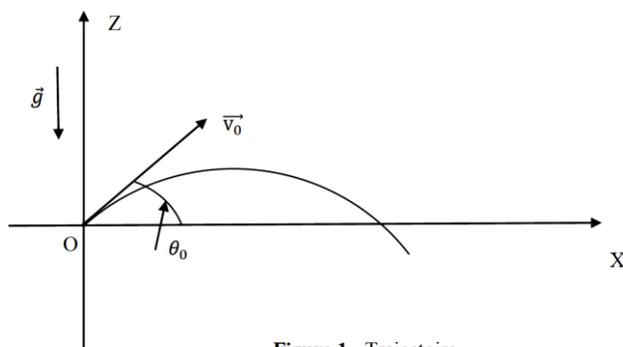


Figure 1 - Trajectoire

On prend un repère dont l'origine O est la position de la particule à l'instant initial.

2. Établir les équations paramétriques de la vitesse et de la position en fonction du temps.
3. Quelle est la nature de cette trajectoire dite « gravitaire » ?
4. Montrer que la portée du tir, c'est-à-dire la distance atteinte par le projectile dans le plan horizontal de départ ( $Z = 0$ ), vaut

$$X_M = \frac{v_0^2 \sin(2\theta_0)}{g}$$

et que la hauteur maximale atteinte par le projectile vaut

$$H_M = \frac{v_0^2 \sin^2(\theta_0)}{2g}$$

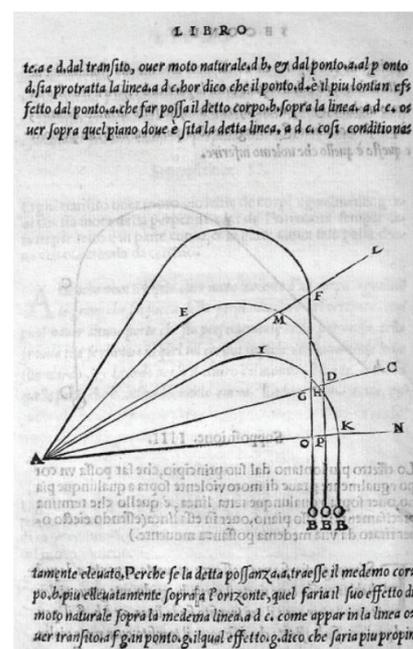
5. Donner la valeur de l'angle  $\theta_0$  pour laquelle la portée est maximale.

La portée maximale calculée à l'aide de ce modèle est 50 fois plus élevée que celle annoncée par le fabricant, il faut en réalité tenir compte des frottements exercés par l'air.

### Deuxième modèle : trajectoire de Tartaglia

Dans ce cas, la trajectoire diffère considérablement de la trajectoire gravitaire. On distingue 3 phases : une première phase à mouvement rectiligne, une deuxième phase à trajectoire asymétrique autour d'un sommet et une troisième phase de mouvement de chute verticale. Il s'agit d'une « trajectoire de Tartaglia », du nom du mathématicien balisticien Niccolò Tartaglia (XVI<sup>e</sup> siècle), qui a décrit les trajectoires (extrait ci-contre) d'un boulet de canon.

Nous allons nous intéresser à la dernière phase, correspondant au mouvement rectiligne descendant quasiment vertical. Au cours de cette phase, la balle est soumise à la force de frottement fluide exercée par l'air qui, dans les cas considérés, est constituée de la traînée aérodynamique qui s'écrit



$$\vec{F}_D = -\frac{1}{2}\rho_a S C_D v \vec{v}$$

où  $v$  est la norme du vecteur vitesse  $\vec{v}$  du projectile,  $\rho_a$  est la masse volumique de l'air,  $S = \pi R^2$  est la section de l'objet exposée au fluide dans la direction de l'écoulement et  $C_D$  est un coefficient sans dimension appelé « coefficient de traînée ». Pour les vitesses typiques étudiées (vitesses supersoniques situées entre 375 et 420 m/s) et pour les formes quasi-sphériques de projectiles,  $C_D$  est de l'ordre de 0,44.

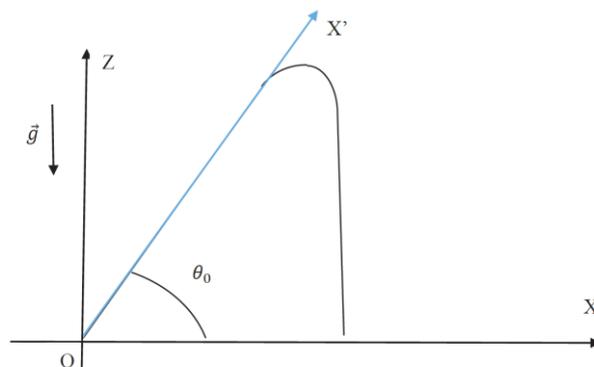


Figure 2 - Trajectoire de Tartaglia

6. Montrer que la vitesse limite atteinte pendant cette dernière phase vaut :

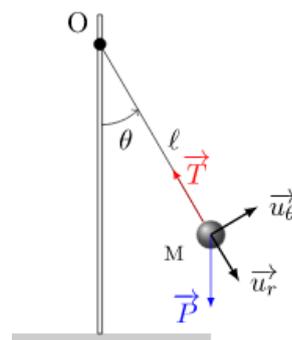
$$\vec{v}_\infty = \sqrt{\frac{2mg}{\pi\rho_a R^2 C_D}} (-\vec{k}).$$

Expliquer le terme de « mur aérodynamique » utilisé pour qualifier cette dernière phase.

**Exercice 4. Pendule** (d'après exos d'oraux ATS 2023)  |  2 |  2 ou 3

Un point matériel M de masse  $m$  est suspendu à un fil supposé inextensible de longueur  $L$ . On supposera pour les premières questions que le fil reste toujours tendu. A  $t = 0$ , le point M est lâché depuis un angle  $\alpha$  par rapport à la verticale, avec une vitesse initiale  $v_0$ .

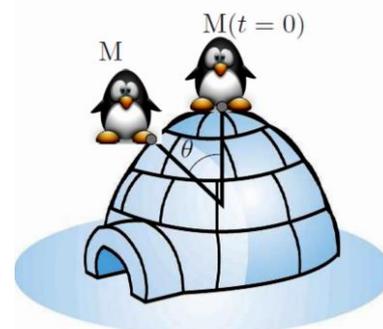
- 1- Etablir l'équation différentielle du mouvement du pendule en exploitant la seconde loi de Newton. La retrouver à l'aide du TMC.
- 2- Déterminer la vitesse  $v$  du point M en fonction de  $\theta$ , angle du fil avec la verticale à un instant  $t$  donné, à l'aide d'un théorème énergétique ; retrouver l'équation différentielle du mouvement par une méthode énergétique.
- 3- Retrouver l'expression de la vitesse  $v$  du point M en fonction de  $\theta$  en intégrant l'équation différentielle du mouvement.
- 4- Exprimer la tension  $T$  du fil en fonction de  $m, g, \alpha, v_0$  et  $\theta$ .
- 5- Etablir la condition sur  $v_0$  pour que le fil reste tendu à tout instant.



**Exercice 5. Glissades sur un igloo**  2 |  3

Le référentiel terrestre est considéré comme galiléen. Un pingouin, assimilé à un point matériel M de masse  $m$ , mobile sur la surface d'un igloo assimilé à une sphère de rayon  $a$ , subit de la part de celui-ci une action de contact sans frottement. Le pingouin est poussé depuis le sommet S de l'igloo avec la vitesse  $v_0$ .

- 1- Le pingouin glisse sur la sphère à partir du point S au sommet de l'igloo, déterminer l'équation différentielle de son mouvement, vérifiée par l'angle  $\theta$  repérant sa position (voir schéma).
- 2- Multiplier l'équation différentielle précédente par  $\dot{\theta}$  et l'intégrer par rapport au temps : on obtient une expression de  $\dot{\theta}$  en fonction de  $\theta$ .



- Déterminer la vitesse initiale  $v_{0,lim}$  à partir de laquelle il décolle dès le sommet S de l'igloo à l'instant  $t = 0$ .
- On se place dans le cas où  $v_0 < v_{0,lim}$ ; déterminer le point  $M_1$  repéré par l'angle  $\theta_1$  où il décolle.
- Calculer le chemin parcouru sur la sphère par le point M lorsque  $v_0 = \frac{v_{0,lim}}{2}$ .

**Exercice 6. Saut en parachute (oral ATS 2024)**   **1** |  **1 ou 2**

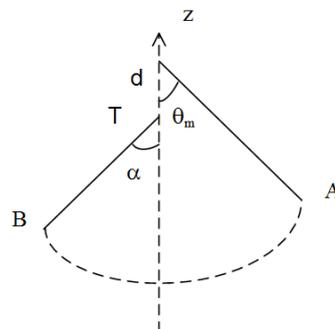
Un élève d'ATS saute d'un hélicoptère en vol stationnaire. Les six premières secondes, l'ATS n'est soumis qu'à son poids (sans frottements). Puis il ouvre son parachute à  $t = 6s$ , avec une résistance exercée par le vent  $\vec{F} = -\lambda\vec{v}$  (avec  $\lambda = 40 \text{ kg}\cdot\text{s}^{-1}$ ). On prendra  $m = 100 \text{ kg}$ .

- Déterminer  $d_0$  et  $v_0$ , la distance parcourue et la vitesse atteinte au bout de  $t = 6 \text{ s}$ .
- Connaissant la distance parcourue  $d_0$ , retrouver la vitesse atteinte à cette distance  $d_0$  en exploitant le théorème de l'énergie mécanique.
- Etablir l'équation différentielle régissant l'évolution de la vitesse lorsque le parachute est ouvert. Résoudre cette équation.
- Une fois le parachute ouvert, montrer qu'il existe une vitesse limite  $v_l$  atteinte par le parachutiste. La calculer.
- Tracer l'allure de l'évolution de la vitesse au cours du temps. Faire apparaître  $v_l$ .

**Exercice 7. Pendule avec butée (oral ATS 2023)**  **1 ou 2** |  **1**

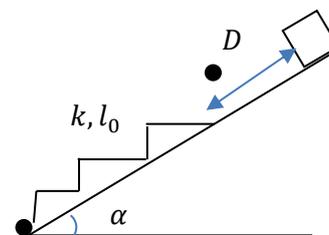
Une masse ponctuelle  $m$  est accrochée à l'aide d'un fil sans masse de longueur  $l$  au point fixe O ; on lâche avec une vitesse nulle et avec un angle  $\theta_m$ . A la verticale de O, en un point T situé à la distance  $d < l$ , est fixé un clou (on suppose l'énergie mécanique conservée au cours du choc).

- Déterminer l'énergie potentielle de la bille à  $t = 0$  (point A = point 1).
- Déterminer l'énergie potentielle de la bille quand elle est à la verticale sous le point d'attache (point 2).
- Exprimer la vitesse de la bille en ce point 2.
- Le pendule remonte jusqu'à un point B (point 3) formant un angle  $\alpha$  avec la verticale. Déterminer l'énergie potentielle de la bille en B.
- Déterminer  $\alpha$ .



**Exercice 8. Ressort comprimé (Oral ATS, 2023)**  **1 ou 2** |  **2**

Considérons une boîte assimilée à un point M de masse  $m$ , lâchée sans vitesse initiale sur un plan incliné. La distance entre la position initiale de la boîte et le ressort est de  $D$ . La boîte glisse sans frottements sur le plan incliné qui forme un angle  $\alpha$  avec l'horizontal, et parcourt donc la distance  $D$  avant d'arriver sur un ressort de constante de raideur  $k$  et de longueur à vide  $l_0$ .



- Déterminer la vitesse de la boîte lors de l'impact avec le ressort.
- Déterminer la longueur  $l_c$  du ressort comprimé au maximum (deux méthodes).
- Déterminer la distance parcourue par la boîte après rebond sur le ressort.
- Tracer l'allure de la position de la masse au cours du temps (sans résolution de l'équation différentielle associée)

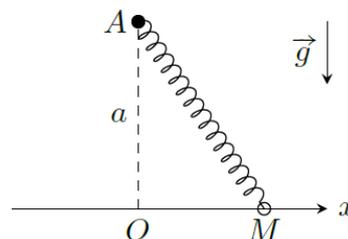
## Exercice 9. Positions d'équilibre d'un oscillateur de Landau – un exemple de bifurcation mécanique (Oral ATS + CCP TSI) 2 | 3

L'oscillateur de Landau est un modèle théorique permettant de modéliser efficacement des systèmes physiques pour lesquelles des faibles non-linéarités sont à prendre en compte. Il s'agit d'une approximation un peu plus précise que celle de l'oscillateur harmonique pour étudier le comportement de systèmes au voisinage de leur position d'équilibre.

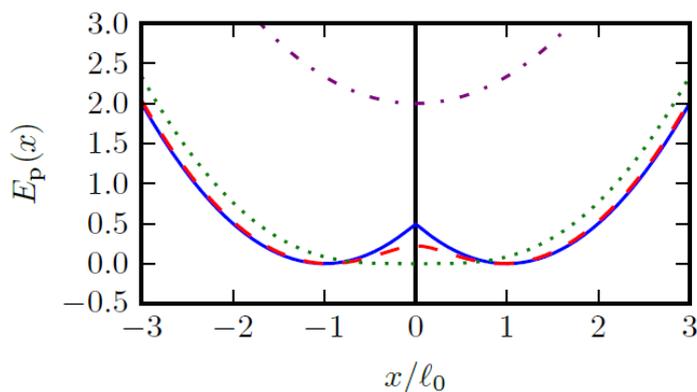
Un exemple de système modèle permettant de réaliser un oscillateur de Landau est un petit anneau, assimilé à un point matériel M de masse  $m$ , astreint à se déplacer sans frottement le long d'une tige rectiligne horizontale choisie comme axe  $(Ox)$ . M est accroché à un ressort de longueur à vide  $L_0$  et de raideur  $k$ .

L'autre extrémité A du ressort est fixe et se situe à la distance  $a$  du point O.

L'objet de ce problème est de déterminer une bifurcation, à savoir une modification du nombre de positions d'équilibre, d'un changement de stabilité des positions d'équilibre...



- 1- Cette question (**facultative pour la suite**) doit être résolue **sans aucun calcul** : dans les 2 cas  $a > L_0$  puis  $a < L_0$ , discuter qualitativement le nombre de positions d'équilibre et leur stabilité.
- 2- Pour une valeur de  $a$  quelconque, déterminer l'expression de l'énergie potentielle globale de M en fonction de  $k, L_0, a$  et  $x$ .
- 3- La courbe d'énergie potentielle est représentée ci-dessous (version couleur sur le site de la classe) pour quatre valeurs de  $a$  :  $a_1 = \frac{L_0}{10}$ ,  $a_2 = \frac{L_0}{3}$ ,  $a_3 = L_0$  et  $a_4 = 3L_0$ . En raisonnant qualitativement sur l'expression de l'énergie potentielle et les positions d'équilibre, attribuer chaque courbe à la valeur de  $a$  qui lui correspond.
- 4- Déterminer par le calcul les positions d'équilibre dans les 2 cas  $a > L_0$  puis  $a < L_0$  et discuter de leur stabilité.
- 5- Tracer sur un même graphe les positions d'équilibre  $x_{eq}$  en fonction de la distance  $a$ . Justifier le nom de bifurcation fourche donnée à cette situation.
- 6- On dit également qu'il s'agit d'une bifurcation à brisure de symétrie. Justifier cette expression.



Rép. : 2)  $E_p(x) = \frac{1}{2} k(\sqrt{x^2 + a^2} - L_0)^2 + cte$       4)  $x = 0$  et  $x = \pm\sqrt{L_0^2 - a^2}$  si  $a < L_0$ ;     $x = 0$  si  $a > L_0$

## Exercice 10. Skieur (Oral ATS 2023)



1 ou 2 |  1 ou 2

Un étudiant de prépa glisse sur une piste de ski depuis une altitude  $h = 15 \text{ m}$ . Sa vitesse initiale est nulle. On note  $\alpha = 30^\circ$  l'angle entre la piste et l'horizontale et on néglige tout frottement dans un premier temps.

1. Déterminer sa vitesse finale sachant qu'il est parti du haut de la piste sans vitesse initiale.
2. Combien de temps faut-il au skieur pour atteindre le bas de la piste ?

3. On tient compte à présent d'une force de frottement solide constante  $F$ . Déterminer l'expression de la vitesse du skieur en bas de la pente en fonction de la force  $F$ .

### Exercice 11. Vibration de la molécule de monoxyde de carbone



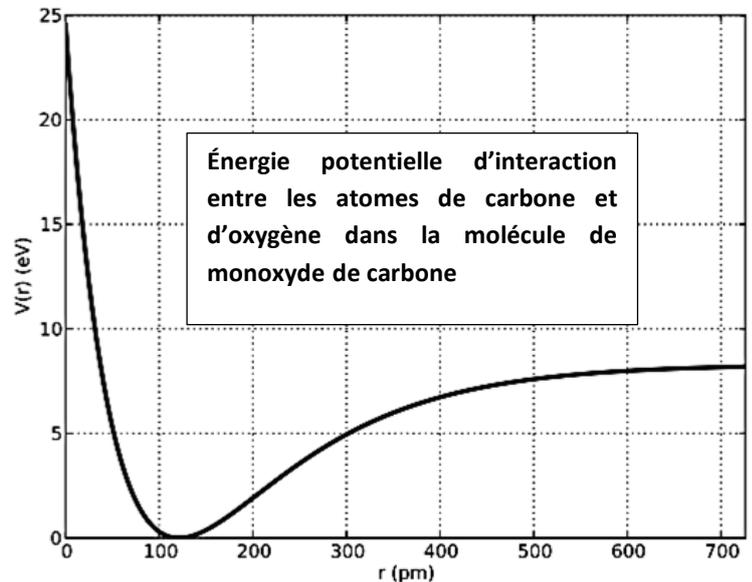
Une molécule de monoxyde de carbone  $CO$  est modélisée par 2 masses ponctuelles  $m_1$  pour l'atome de carbone et  $m_2$  pour l'atome d'oxygène. Pour simplifier, on considérera que l'atome de carbone est fixe dans un référentiel galiléen, et que l'atome d'oxygène ne peut subir que des déplacements rectilignes le long d'un axe  $Ox$ . L'attraction gravitationnelle est négligeable à cette échelle.

L'énergie potentielle d'interaction des 2 atomes, associée à la force qui les lie, est représentée par l'équation empirique :

$$V(r) = V_0 (1 - e^{-\beta(r-r_0)})^2$$

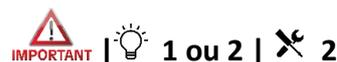
Où  $r$  est la distance des noyaux des 2 atomes et  $V_0$ ,  $\beta$  et  $r_0$  sont des constantes positives.

On donne ci-contre le graphe de  $V(r)$  :



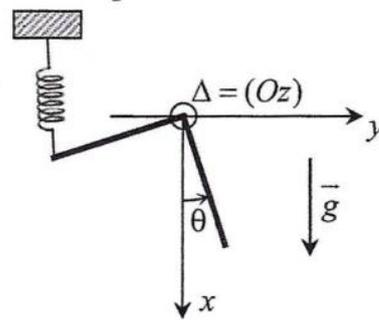
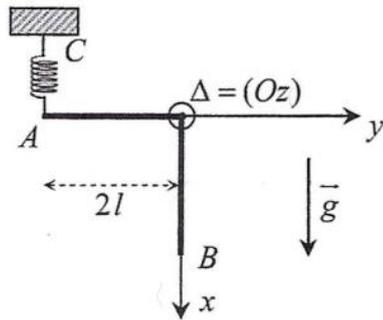
- 1 - Quelle est la dimension de  $\beta$  ? Que représentent physiquement  $V_0$ ,  $r_0$  et  $\beta^{-1}$  ? Faire apparaître  $V_0$  et  $r_0$  sur le graphe et donner leurs valeurs.
- 2 - L'interaction qui lie les 2 atomes est-elle répulsive ou attractive quand leur distance  $r$  est inférieure à la position d'équilibre ? Même question si leur distance  $r$  est supérieure à la position d'équilibre.
- 3 - Analyser qualitativement le mouvement de l'atome d'oxygène si son énergie mécanique est inférieure à  $V_0$ .
- 4 - En effectuant un développement limité à l'ordre 2 de l'énergie potentielle d'interaction au voisinage de  $r_0$ , montrer qu'il existe un domaine de distance où l'interaction entre les deux atomes peut être modélisée par une force de rappel élastique de raideur  $k$  dont on donnera l'expression.
- 5 - En déduire la fréquence des petites oscillations de la molécule de monoxyde de carbone autour de sa position d'équilibre.

### Exercice 12. Pendule pesant (Oral CCINP MP 2022)



Un solide  $S$  est constitué de deux tiges homogènes rigidement liées l'un à l'autre ;  $AO$  et  $OB$ , faisant entre elles un angle droit constant. Chaque tige a pour masse  $m$  et pour longueur  $2\ell$ .  $S$  peut tourner autour d'un axe horizontal ( $\Delta$ ) passant par  $O$  (soit l'axe  $Oz$ ).

La liaison en  $O$  est une liaison pivot parfaite. Un ressort de masse négligeable, de constante de raideur  $k$ , est accroché à l'un de ses extrémités en  $A$ . L'autre extrémité  $C$  est maintenue fixe. Lorsque l'ensemble est en équilibre dans le champ de pesanteur,  $AO$  est horizontale et  $OB$  verticale. On donne le moment d'inertie  $J$  de l'ensemble des deux tiges par rapport à l'axe de rotation ( $\Delta$ ) :  $J = 8ml^2/3$ . On suppose que la force exercée par le ressort sur le solide reste toujours verticale durant le mouvement.



1. Que signifie l'expression « liaison pivot parfaite » ?
2. Faire un bilan des actions exercées sur le solide et déterminer leur moment respectif par rapport à  $O$  (on pourra projeter sur l'axe de rotation) en fonction notamment de  $\theta$ .
3. Déterminer l'allongement du ressort lorsque le système est à l'équilibre. Le ressort est-il comprimé ou étiré dans cette position ?
4. On se propose d'étudier les petites oscillations ( $\theta \ll 1$  rad). Déterminer l'équation différentielle vérifiée par  $\theta(t)$ . En déduire l'expression de la période du mouvement.
5. Retrouver cette équation (et cette période) par une méthode énergétique.

### Exercice 13. Détermination d'un moment d'inertie

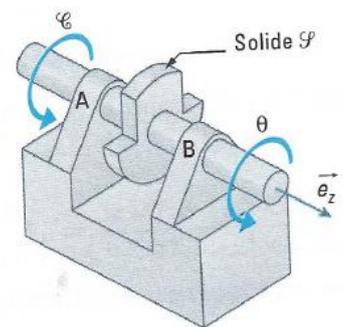


Une machine de test est constituée d'un arbre cylindrique homogène d'axe  $\Delta = (A; \vec{e}_z)$  lié à 2 liaisons pivot idéales en  $A$  et en  $B$  ; elle permet de tester le solide  $S$  qui est solidaire de l'arbre.

On supposera que le moment d'inertie de l'arbre par rapport à  $\Delta$  est négligeable, et que le centre d'inertie du solide appartient à cet axe  $\Delta$ .

Un couple moteur constant  $\Gamma = 1,5$  Nm est appliqué à l'arbre et permet d'atteindre une vitesse de 1200 tr/min après 18 tours (en partant de l'arrêt).

Déterminer le moment d'inertie  $J_\Delta$  du solide  $S$  par rapport à l'axe  $\Delta = (A; \vec{e}_z)$  à l'aide du TMC puis à l'aide d'un théorème énergétique.



## Exercice 1. Course poursuite dans la savane

Soit  $v_G = 110 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1} = 30,6 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$  la vitesse maximale du guépard, et  $\tau_G$  la durée de sa course à cette vitesse  $v_G$ , qu'il maintient sur la distance  $d_G = 400 \text{ m}$ .  $\tau_G = \frac{d_G}{v_G} = \frac{400}{30,6} \approx 13,1 \text{ s}$ .

Pendant cette durée  $\tau_G$ , l'antilope parcourt une distance  $d_A$  à la vitesse  $v_A = 85 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1} = 23,6 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ , soit

$$\boxed{d_A = v_A \tau_G} = 23,6 \times \frac{400}{30,6} \approx \mathbf{308,6 \text{ m}}$$

En supposant une course en ligne droite, sur un axe  $(Ox)$  d'origine O la position initiale du guépard :

la position initiale de l'antilope est  $x_{A,0} = 70 \text{ m}$ , sa position finale est  $\boxed{x_{A,F} = x_{A,0} + d_A} = \mathbf{378,6 \text{ m}}$ ;

la position initiale du guépard est  $x_{G,0} = 0$ , sa position finale est  $\boxed{x_{G,F} = x_{G,0} + d_G} = \mathbf{400 \text{ m}}$

$$\boxed{x_{G,F} < x_{A,F}}$$

L'antilope ne parvient pas à s'échapper...

## Exercice 2. Descente dans un parking

Le mouvement est implicitement étudié par rapport au référentiel terrestre : il est sous-entendu que toutes les dérivées sont calculées par rapport à ce référentiel.

- 1) L'énoncé indique que la voiture reste à distance constante d'un axe, autour duquel il y aura une rotation : cet axe a donc une importance particulière pour le mouvement, il est naturel de le choisir comme axe  $z$  d'un repérage cylindrique, et de d'autant plus que la distance est constante.

Par hypothèse,  $r(t) = R = \text{cte}$ . Par ailleurs comme la voiture se déplace à vitesse constante sur une rampe d'inclinaison constante, sa vitesse de déplacement vertical  $V_z$  est constante, donc  $z(t) = V_z t + z_0$  où  $z_0$  est déterminé par une condition initiale.

- 2) En repérage cylindrique :  $\overrightarrow{v(M)_R} = \dot{r} \overrightarrow{u_r} + r \dot{\theta} \overrightarrow{u_\theta} + \dot{z} \overrightarrow{u_z}$  et

$$\overrightarrow{a(M)_R} = (\ddot{r} - r \dot{\theta}^2) \overrightarrow{u_r} + (2\dot{r}\dot{\theta} + r \ddot{\theta}) \overrightarrow{u_\theta} + \ddot{z} \overrightarrow{u_z}$$

Soit ici avec  $r(t) = R = \text{cte}$  et  $V_z = \dot{z} = \text{cte}$ ,  $\overrightarrow{v(M)_R} = R \dot{\theta} \overrightarrow{u_\theta} + V_z \overrightarrow{u_z}$  et  $\overrightarrow{a(M)_R} = (-R \dot{\theta}^2) \overrightarrow{u_r} + (R \ddot{\theta}) \overrightarrow{u_\theta}$

- 3) La voiture est supposée rouler à vitesse uniforme  $V$  dans le parking. En le traduisant sur la norme du vecteur vitesse,

$$\|\overrightarrow{v(M)_R}\|^2 = V^2 = R^2 \dot{\theta}^2 + V_z^2$$

On déduit de cette équation que la vitesse angulaire  $\dot{\theta}$  est constante, et par conséquent  $\ddot{\theta} = 0$ . L'accélération se simplifie alors en  $\overrightarrow{a(M)_R} = -R \dot{\theta}^2 \overrightarrow{u_r}$ , elle est donc toujours radiale.

## Exercice 3. Trajectoires des plombs d'une cartouche (d'après CCINP MP 2017)

### Premier modèle : trajectoire gravitaire

- 1) Système : point M de masse  $m$  étudié dans le référentiel terrestre supposé galiléen.

Bilan des actions mécaniques extérieures (BAME) : poids  $\vec{P} = m\vec{g}$  (chute libre)

Principe Fondamental de la Dynamique (PDF) :  $m\vec{g} = m\vec{a}_G = m \frac{d\vec{v}}{dt}$

Etude cinématique : coordonnées cartésiennes, en choisissant un axe  $(Oz)$  vertical ascendant et un axe  $(Ox)$  horizontal vers la droite. La vitesse initiale étant dans le plan  $(Oxz)$  ainsi que la résultante des forces, mouvement plan. On a donc  $\vec{v} = \dot{x} \overrightarrow{u_x} + \dot{z} \overrightarrow{u_z}$

Projection du PFD sur  $\vec{u}_x$  et  $\vec{u}_z$  :  $\begin{cases} m\ddot{x} = 0 \\ m\ddot{z} = -mg \end{cases}$

- 2) On intègre les équations précédentes une première fois par rapport au temps, en exploitant la vitesse initiale afin de déterminer les constantes d'intégration :

$$\dot{x} = v_0 \cos(\alpha_0) \quad (1)$$

$$\dot{z} = -gt + v_0 \sin(\alpha_0) \quad (2)$$

Puis une seconde fois, la position initiale correspondant à l'origine du repère :

$$\begin{cases} x(t) = v_0 \cos(\theta_0)t & (3) \\ z(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0 \sin(\theta_0)t & (4) \end{cases}$$

- 3) Avec l'équation (3), on peut exprimer le temps en fonction de l'abscisse  $x$  :  $t = \frac{x}{v_0 \cos(\theta_0)}$  ; en injectant dans (4), on obtient l'équation de la trajectoire, correspondant à une **parabole** :

$$z = -\frac{1}{2}g \left( \frac{x}{v_0 \cos(\theta_0)} \right)^2 + x \tan(\theta_0) \quad (5)$$

*Remarque : Afin de pouvoir indiquer que la trajectoire est parabolique, il faut étudier l'équation  $Z(X)$ . En aucun cas l'équation  $Z(t)$  ne permet d'accéder à la nature géométrique de la trajectoire !!*

- 4) La portée du tir est la valeur  $X_M \neq 0$  de  $X$  telle que  $Z = 0$ . En utilisant l'équation (5) :

$$Z = 0 \text{ et } X \neq 0 \Leftrightarrow X_M = \frac{2v_0^2}{g} \cos^2(\theta_0) \tan(\theta_0) = \frac{v_0^2}{g} \sin(2\theta_0) = X_M$$

La hauteur maximale du tir correspond à l'altitude  $Z(t_1) = H_M$  quand  $\dot{Z} = 0$ , atteinte à l'instant  $t_1$ , soit en utilisant l'équation (2), pour  $t_1 = \frac{v_0 \sin(\theta_0)}{g}$ ; dans l'équation (4) :

$$H_M = Z(t_1) = -\frac{1}{2}g \left( \frac{v_0 \sin(\theta_0)}{g} \right)^2 + v_0 \sin(\theta_0) \frac{v_0 \sin(\theta_0)}{g}$$

$$H_M = \frac{v_0^2 \sin^2(\theta_0)}{2g}$$

*Attention !!! Pour obtenir  $H_M$ , il faut utiliser  $t_1$  dans  $Z$  et non dans  $X$  !!*

- 5) L'angle initial pour lequel la portée est maximale est la valeur de  $\theta_0$  pour laquelle  $\frac{dX_M}{d\theta_0} = 0$  ; soit :

$$\frac{dX_M}{d\theta_0} = 2 \frac{v_0^2}{g} \cos(2\theta_0) = 0 \Leftrightarrow \cos(2\theta_0) = 0 \Leftrightarrow 2\theta_0 = \frac{\pi}{2} [\pi]$$

Et comme  $\theta_0 \in [0, \frac{\pi}{2}]$ , la solution est :  $\theta_0 = \frac{\pi}{4}$ .

## Deuxième modèle : trajectoire de Tartaglia ; Troisième et dernière phase : mouvement rectiligne descendant

- 6) Cette phase correspond à un **mouvement de chute avec résistance de l'air** puisqu'on tient compte de la force de frottement de l'air (dans la chute libre, la seule force qui s'exerce sur l'objet est son poids).

$$\text{PFD : } \vec{F}_D + m\vec{g} = m \frac{d\vec{v}}{dt}$$

On pose  $\vec{v} = -v\vec{k}$  puisque le mouvement est vers le bas.

$$+ \frac{\rho_a S C_D}{2} v^2 \vec{k} - mg\vec{k} = m \frac{d\vec{v}}{dt} = -m \frac{dv}{dt} \vec{k}$$

$$\frac{\rho_a S C_D}{2} v^2 - mg = -m \frac{dv}{dt}$$

d'où l'équation différentielle :  $\frac{dv}{dt} + \frac{\rho_a S c_D}{2m} v^2 = g$

Quand la vitesse limite est atteinte,  $\frac{dv}{dt} = 0$ , et donc :

$$\frac{\rho_a S c_D}{2m} v_\infty^2 = g \Rightarrow \boxed{\vec{v}_\infty = -\sqrt{\frac{2mg}{\pi R^2 \rho_a c_D}} \vec{k}}$$

On parle de « mur aérodynamique » car la **vitesse de cette phase est limitée par la force aérodynamique** : force de frottement fluide ; de plus, plus les frottements sont importants et plus la vitesse limite est faible.

#### Exercice 4. Pendule

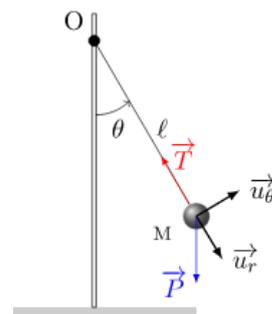
1) Système : point M de masse  $m$ , étudié dans le référentiel terrestre supposé galiléen

**Etude cinématique** : mouvement circulaire, choix des coordonnées polaires

en coordonnées polaires,  $\overrightarrow{v(M)}_R = L \dot{\theta} \vec{u}_\theta$  et  $\overrightarrow{a(M)}_R = (-L \dot{\theta}^2) \vec{u}_r + (L \ddot{\theta}) \vec{u}_\theta$

**Bilan des actions mécaniques extérieures** : M subit

- Son poids, vertical descendant :  $\vec{P} = m \vec{g} = mg \cos \theta \vec{u}_r - mg \sin \theta \vec{u}_\theta$
- La tension du fil dirigée selon le fil vers O et de norme  $T$  inconnue :  $\vec{T} = -T \vec{u}_r$



a) **PFD** : Selon la 2<sup>nd</sup>e loi de Newton dans un référentiel galiléen :  $\vec{P} + \vec{T} = m \overrightarrow{a(M)}_R$

Projection sur	$\vec{P}$	+	$\vec{T}$	=	$m \overrightarrow{a(M)}_R$
$\vec{u}_r$	$mg \cos \theta$	+	$-T$	=	$-mL \dot{\theta}^2$
$\vec{u}_\theta$	$-mg \sin \theta$	+	$0$	=	$mL \ddot{\theta}$

Equation différentielle du mouvement : correspond à la projection sur  $\vec{u}_\theta$  :

$$mL \ddot{\theta} = -mg \sin \theta \Leftrightarrow \boxed{L \ddot{\theta} + g \sin \theta = 0}$$

b) **TMC** :

**Théorème du moment cinétique (TMC)** par rapport à l'axe  $\Delta$  de rotation du pendule (axe  $(Oz)$  orthogonal au plan du mouvement, fixe dans le référentiel terrestre galiléen correspondant au référentiel d'étude) :

$$\left. \frac{dL_\Delta(M)_{/\mathcal{R}_g}}{dt} \right|_{\mathcal{R}_g} = \sum_i \mathcal{M}_{\Delta,i}(\vec{F}_i) = \mathcal{M}_\Delta(\vec{P}) + \mathcal{M}_\Delta(\vec{T})$$

**Moments de forces** :

$\mathcal{M}_\Delta(\vec{T}) = 0$  (Force centrale, la droite d'action passe par l'axe, le bras de levier est nul).

$$\mathcal{M}_\Delta(\vec{P}) = \overrightarrow{\mathcal{M}}_O(\vec{P}) \cdot \vec{u}_z = (\overrightarrow{OM} \wedge \vec{P}) \cdot \vec{u}_z$$

Avec  $\vec{P} = m \vec{g} = mg \cos \theta \vec{u}_r - mg \sin \theta \vec{u}_\theta$ ,  $\overrightarrow{OM} \wedge \vec{P} = L \vec{u}_r \wedge (mg \cos \theta \vec{u}_r - mg \sin \theta \vec{u}_\theta) = -mgL \sin \theta \vec{u}_z$

$$\mathcal{M}_\Delta(\vec{P}) = -mgL \sin \theta$$

Aussi, plus simplement :  $\mathcal{M}_\Delta(\vec{P}) = \pm P \times \text{bras de levier} \stackrel{\substack{= \\ \text{rotation par } \vec{P} \\ \text{dans le sens négatif}}}{=} -mg \times \text{bras de levier} = -mgL \sin \theta$

**Moment cinétique**

$$L_\Delta(M) = \sigma_\Delta(M) = \overrightarrow{L}_{/O}(M) \cdot \vec{u}_z = (\overrightarrow{OM} \wedge m \vec{v}(M)) \cdot \vec{u}_z = mL^2 \dot{\theta} \text{ soit}$$

$$\left. \frac{dL_{\Delta}(M)/\mathcal{R}_g}{dt} \right|_{\mathcal{R}_g} = mL^2\ddot{\theta}$$

$$\text{TMC} : \left. \frac{dL_{\Delta}(M)/\mathcal{R}_g}{dt} \right|_{\mathcal{R}_g} = \mathcal{M}_{\Delta}(\vec{P}) + \mathcal{M}_{\Delta}(\vec{T}) \Leftrightarrow mL^2\ddot{\theta} = -mgL\sin\theta \Leftrightarrow \boxed{\ddot{\theta} + \frac{g}{L}\sin\theta = 0}$$

## 2) Etude de la vitesse à l'aide d'un théorème énergétique

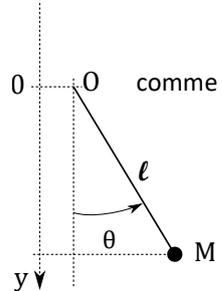
On introduit l'axe ( $Oy$ ) vertical descendant

**Bilan des actions mécaniques extérieures** s'exerçant sur le système :

- Poids, associé à l'énergie potentielle de pesanteur  $E_p = -mgy$  en choisissant le point O comme origine des potentiels (choix arbitraire).
- Tension du fil, qui ne travaille pas (toujours perpendiculaire au déplacement)

Le système est donc conservatif.

$$y = +\ell \cos \theta$$



Penser à vérifier la cohérence de l'expression établie à l'aide de cas particuliers tels que  $\theta = 0$  ou  $\theta = \frac{\pi}{2}$  !

D'où, avec l'origine choisie :  $E_p = -mg\ell \cos \theta$

**Energie mécanique en un point quelconque** caractérisé par l'angle  $\theta$  :  $E_m = E_c + E_p$  ;

le point M décrivant une trajectoire circulaire de rayon  $l$ , sa vitesse est  $v = l\dot{\theta}$ , et donc son énergie cinétique :  $E_c = \frac{1}{2}m\ell^2\dot{\theta}^2$

soit finalement  $E_m = \frac{1}{2}m\ell^2\dot{\theta}^2 - mg\ell \cos \theta$

TEM entre l'état initial et un point M quelconque :

$$E_m(M) - E_m(M_0) = W_{nc} = 0$$

Soit

$$\frac{1}{2}mv^2 - mg\ell \cos \theta = \frac{1}{2}mv_0^2 - mg\ell \cos \alpha$$

D'où

$$v^2 = v_0^2 + 2g\ell(\cos \theta - \cos \alpha) \Leftrightarrow \boxed{v = \sqrt{v_0^2 + 2g\ell(\cos \theta - \cos \alpha)}}$$

*Remarque : on pouvait également déterminer l'équation différentielle à l'aide du TPM (théorème de la puissance mécanique) :*

$$E_m = \frac{1}{2}m\ell^2\dot{\theta}^2 - mg\ell \cos \theta$$

D'après le théorème de la puissance mécanique pour un système conservatif, on a

$$\frac{dE_m}{dt} = 0 = m\ell^2\dot{\theta}\ddot{\theta} + mg\ell\dot{\theta}\sin \theta$$

Attention au calcul de la dérivée !!! il s'agit d'une dérivée par rapport au temps, avec  $f(t) = \frac{1}{2}m\ell^2\dot{\theta}^2 = f(\theta(t))$ , soit la dérivée d'une fonction composée.

$$\text{On a alors } f'(t) = \frac{df}{dt} = \frac{df}{d\theta} \cdot \frac{d\theta}{dt} = \dot{\theta} \frac{df}{d\theta}$$

$$m\ell^2\dot{\theta}\ddot{\theta} + mg\ell\dot{\theta}\sin \theta = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \dot{\theta} = 0 \\ \ell^2\ddot{\theta} + g\ell \sin \theta = 0 \end{cases}$$

La solution  $\dot{\theta} = 0$  correspond à une vitesse toujours nulle, donc un système arrêté, ce qui n'a pas d'intérêt pour l'étude du mouvement.

L'équation différentielle du mouvement est donc :  $l^2 \ddot{\theta} + gl \sin \theta = 0 \Leftrightarrow \boxed{\ddot{\theta} + \frac{g}{l} \sin \theta = 0}$

### 3) Vitesse à partir de l'équation différentielle du mouvement :

On multiplie l'équation différentielle du mouvement par  $\dot{\theta}$  pour pouvoir intégrer par rapport au temps :

$$-g \dot{\theta} \sin \theta = L \dot{\theta} \ddot{\theta}$$

On obtient alors après intégration :  $g \cos \theta = \frac{1}{2} L \dot{\theta}^2 + cste K$

Or  $V = L |\dot{\theta}|$  donc  $\dot{\theta}^2 = \frac{v^2}{L^2}$ , la relation précédente devient :  $g \cos \theta = \frac{1}{2} \frac{v^2}{L} + K$

De plus à  $t = 0, V = V_0$  et  $\theta = 0$ , donc  $K = g - \frac{1}{2} \frac{v_0^2}{L}$

Pour finir  $v^2 = v_0^2 + 2gL (\cos \theta - 1) \Rightarrow v = \sqrt{v_0^2 + 2gL (\cos \theta - 1)}$

### 4) Etude de la tension du fil

D'après la projection du PFD selon  $\vec{u}_r$ , on a  $mg \cos \theta - T = -mL \dot{\theta}^2 = -m \frac{v^2}{L}$

Soit  $\boxed{T = mg \cos \theta + \frac{mv^2}{L}}$

Fil tendu si  $\forall t, T > 0 \Leftrightarrow \forall t, T = mg \cos \theta + \frac{mv^2}{L} > 0$

Or  $v^2 = v_0^2 + 2gL (\cos \theta - 1)$  donc  $T = mg \cos \theta + \frac{m}{L} \cdot [v_0^2 + 2gL (\cos \theta - 1)]$

Soit

$$\boxed{T = m \frac{v_0^2}{L} + mg(3 \cos \theta - 2)}$$

Le fil reste tendu à tout instant si  $\forall t, T > 0 \Leftrightarrow \forall \theta, m \frac{v_0^2}{L} + mg(3 \cos \theta - 2) > 0 \Leftrightarrow$

$$\forall \theta, \frac{v_0^2}{L} > g(2 - 3 \cos \theta) \Rightarrow \frac{v_0^2}{L} > g(2 - 3(-1)) = 5g$$

(pour que la tension reste toujours positive, il faut que  $\frac{v_0^2}{L}$  soit supérieur à la valeur maximale de  $g(2 - 3 \cos \theta)$ , atteinte pour  $\theta = \pi$ )

$$\boxed{\frac{v_0^2}{L} > 5g}$$

Si  $\frac{v_0^2}{L} > 5g, v$  et  $T$  ne s'annulent jamais. M a un mouvement circulaire révolutif (l'angle  $\theta$  ne fait que croître)

## Exercice 5. Glissades sur un igloo 2 | 3

1) **Système** : pingouin = point M de masse  $m$ , étudié dans le référentiel terrestre supposé galiléen.

**Etude cinématique** : mouvement circulaire sur la sphère, choix des coordonnées polaires. On a, le mouvement étant circulaire de rayon  $a$  :  $\vec{v}(M)_R = a \dot{\theta} \vec{u}_\theta$  et  $\vec{a}(M)_R = (-a \dot{\theta}^2) \vec{u}_r + a \ddot{\theta} \vec{u}_\theta$

**BAME** (Bilan des actions mécaniques extérieures) :

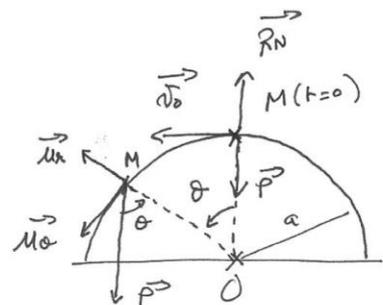
$$\text{poids } \vec{P} = m\vec{g} = -mg \sin \theta \vec{u}_r + mg \sin \theta \vec{u}_\theta$$

$$\text{réaction normale du support : } \vec{R} = \vec{N} = N \vec{u}_r$$

**PFD** :  $m\vec{a} = \vec{P} + \vec{R}$

**Projection du PFD sur  $\vec{u}_\theta$**  :  $ma\ddot{\theta} = mg \sin \theta$

$$\boxed{\ddot{\theta} = \frac{g}{a} \sin(\theta)}$$



$$2) \quad \dot{\theta} \ddot{\theta} = \frac{g}{a} \dot{\theta} \sin(\theta)$$

En intégrant entre  $t = 0$  et  $t$  quelconque, soit entre  $\dot{\theta}_0 = \frac{v_0}{a}$  et  $\dot{\theta}$  et  $0$  et  $\theta$  :

$$\int_0^t \dot{\theta} \ddot{\theta} dt = \frac{g}{a} \int_0^t \dot{\theta} \sin(\theta) dt$$

$$\left[ \frac{1}{2} \dot{\theta}^2 \right]_{\dot{\theta}_0}^{\dot{\theta}} = \frac{g}{a} [-\cos \theta]_0^\theta$$

$$\boxed{\dot{\theta}^2 = \dot{\theta}_0^2 + \frac{2g}{a} (1 - \cos \theta) = \frac{v_0^2}{a^2} + \frac{2g}{a} (1 - \cos \theta)}$$

3) Le pingouin décolle lorsque la réaction du support  $\vec{N}$  s'annule. Par projection du PFD sur  $\vec{u}_r$  :

$$N = 3mg \cos \theta - 2mg - m a \dot{\theta}_0^2 = m \left( 3g \cos \theta - 2g - \frac{v_0^2}{a} \right)$$

Au sommet de l'igloo, on a  $\theta = 0$  soit  $\cos \theta = 1$  :  $N = m \left( 3g - 2g - \frac{v_0^2}{a} \right) = m \left( g - \frac{v_0^2}{a} \right)$

$$N > 0 \Leftrightarrow g - \frac{v_0^2}{a} > 0 \Leftrightarrow v_0^2 < ga \Leftrightarrow v_0 < \sqrt{ga}$$

$$\boxed{v_{0,lim} = \sqrt{ga}}$$

4) Pour une vitesse  $v_0 < \sqrt{ga}$ , il décolle pour  $\theta_1$  tq  $N = m \left( 3g \cos \theta_1 - 2g - \frac{v_0^2}{a} \right) = 0 \Leftrightarrow$

$$3g \cos \theta_1 = 2g + \frac{v_0^2}{a}$$

$$\boxed{\cos \theta_1 = \left( \frac{2}{3} + \frac{v_0^2}{3ga} \right)}$$

5) Avec  $v_0 = \frac{v_{0,lim}}{2} = \frac{\sqrt{ga}}{2}$ , décollage en  $\theta_1$  tel que  $\cos \theta_1 = \left( \frac{2}{3} + \frac{ga}{4 \times 3ga} \right) = \frac{9}{12} = \frac{3}{4}$

Distance parcourue sur le cercle de rayon  $a$  :

$$\boxed{\ell = a \cdot \arccos \left( \frac{3}{4} \right)}$$

## Exercice 6. Saut en parachute (oral ATS 2024)

1. **Système** : étudiant supposé ponctuel étudié dans le référentiel terrestre supposé galiléen

**Repérage** : axe ( $Oz$ ) descendant, d'origine la position initiale de l'étudiant au début du saut.

**Bilan des actions mécaniques extérieures** : pour la première phase avant ouverture du parachute

$$\text{poids } \vec{P} = m\vec{g} = mg\vec{e}_z$$

**Principe fondamental de la dynamique** :

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{P} = m\vec{g}$$

**Etude cinématique** : En l'absence de vitesse initiale et de force autre que selon  $\vec{e}_z$ , mouvement rectiligne vertical :

$$\vec{v} = \dot{z}\vec{e}_z \quad \text{et} \quad \frac{d\vec{v}}{dt} = \ddot{z}\vec{e}_z$$

**Projection sur  $\vec{e}_z$**  :

$$m\ddot{z} = mg$$

Soit

$$\ddot{z} = g$$

Mouvement rectiligne uniformément accéléré.

En intégrant par rapport au temps, avec les conditions initiales :  $v(0) = 0$  et  $z(0) = 0$  :

$$\dot{z} = gt + cte \stackrel{c.I.}{=} gt$$

$$z = \frac{1}{2}gt^2 + cte \stackrel{c.I.}{=} \frac{1}{2}gt^2$$

Après une chute d'une durée  $t_0$  :

$$\boxed{d_0 = \frac{1}{2}gt_0^2} = 180 \text{ m} ; \quad \boxed{v_0 = gt_0 = \sqrt{2gd_0}} = 60 \text{ m.s}^{-1}$$

2. Théorème de l'énergie mécanique entre  $z = 0$  et  $z = d_0$  en l'absence de force non conservative :

$$\Delta Em = 0 = \frac{1}{2}mv_0^2 - mgd_0 \quad v_0 = \sqrt{2gd_0}$$

3. Après ouverture du parachute :

Bilan des actions mécaniques extérieures :

$$\vec{P} = m\vec{g} = mg\vec{u}_z \text{ (et } E_p = -mgz + cte)$$

$$\vec{F} = -\lambda v \vec{u}_z \text{ (et } P = \vec{F} \cdot \vec{v} = -\lambda v^2)$$

Principe fondamental de la dynamique projeté :

$$m \frac{dv}{dt} = mg - \lambda v \Rightarrow \frac{dv}{dt} + \frac{\lambda}{m} v = g$$

$$\boxed{\frac{dv}{dt} + \frac{\lambda}{m} v = g}$$

Equation différentielle du premier ordre à coefficients constants positifs et second membre constant, soit sous forme canonique avec  $\tau = \frac{m}{\lambda}$  temps caractéristique :

$$\frac{dv}{dt} + \frac{v}{\tau} = \frac{v_{lim}}{\tau}$$

Solution Générale à l'équation Homogène :  $v_H(t) = Ae^{-\frac{t}{\tau}}$

Solution Particulière à l'équation Complète :  $v_p(t) = v_{lim}$

Solution Générale à l'équation Complète :  $v(t) = Ae^{-\frac{t}{\tau}} + v_{lim}$

Nouvelle origine des temps, ouverture du parachute :

Constante d'intégration à l'aide des conditions initiales :

$$v(t=0) \stackrel{c.I.}{=} A + v_{lim} \stackrel{c.I.}{=} v_0$$

équation  
à t=0

$$A = v_0 - v_{lim}$$

$$\boxed{v = (v_0 - v_{lim})e^{-\frac{t}{\tau}} + v_{lim}}$$

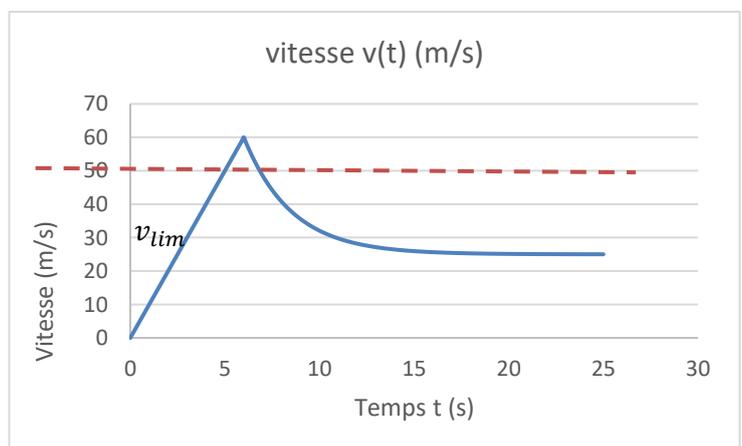
Après ouverture du parachute :

Vitesse limite atteinte lorsque l'accélération devient nulle :

PFD projeté :  $m \frac{dv_{lim}}{dt} = mg - \lambda v_{lim} = 0 \Rightarrow$

$$\frac{\lambda}{m} v_{lim} = g \Rightarrow \boxed{v_{lim} = \frac{mg}{\lambda}}$$

A.N. :  $v_{lim} = 100 \times \frac{10}{40} = 25 \text{ m.s}^{-1}$



## Exercice 7. Pendule avec butée

1) **Système** : la masse ;      Référentiel : terrestre, supposé galiléen

**Bilan des actions mécaniques extérieures** :

- poids  $\vec{P} = m\vec{g}$ , dérivant de l'énergie potentielle de pesanteur,
- tension du fil  $\vec{T}$

La tension du fil ne travaille pas car elle est toujours perpendiculaire au déplacement : système conservatif.

**Théorème de l'énergie mécanique** au système conservatif entre le point A = 1 et le point 2 :

$$E_m(2) - E_m(1) = W(\vec{F}_{non\ conservative}) = 0 \text{ soit } E_m(2) - E_m(1) = 0$$

Soit  $z$ , l'axe vertical ascendant, d'origine le point le plus bas (point 2).

$$\text{Energie potentielle de pesanteur : } E_p = mgz + cte$$

En choisissant le point le plus bas comme origine des potentiels :  $E_p(z = 0) = 0 + cte = 0$ , d'où  $cte = 0$

$$E_p = mgz$$

$$\text{à } t = 0 \text{ (point A) : } \boxed{E_p(A) = mgz_A = mgl(1 - \cos \theta_0)}$$

2) Au point 2 :  $E_p = 0$  et au point 1 : vitesse initiale nulle

Entre le point 1 et le point 2, l'énergie mécanique se conservant :

$$E_m(1) = E_m(2) \quad \Leftrightarrow \quad E_{c1} + E_{p1} = E_{c2} + E_{p2}$$

$$mgl(1 - \cos \theta_0) = \frac{1}{2} m v_2^2$$

$$\boxed{v_2 = \sqrt{2gl(1 - \cos \theta_0)}}$$

3) Au point 3,  $E_{p,3} = mgz_3 = mg(l - h)(1 - \cos \alpha)$

Entre le point 2 et le point 3, l'énergie mécanique se conserve à nouveau, le système restant conservatif.

En 3,  $v_3 = 0$ .

$$E_m(2) = E_m(3) \quad \Leftrightarrow \quad E_{c2} + E_{p2} = E_{c3} + E_{p3}$$

$$\frac{1}{2} m v_2^2 = mg(l - h)(1 - \cos \alpha) = \frac{1}{2} m 2gl(1 - \cos \theta_0)$$

$$\boxed{\cos \alpha = 1 - \frac{l}{(l - h)}(1 - \cos \theta_0)}$$

---

## Exercice 8. Ressort comprimé (Oral ATS, 2023)

1. **Système** : point M. **BAME** : pesanteur, avec axe (Oz) vertical ascendant d'origine le point O en bas de la pente, origine de l'Epp :  $E_{pp} = mgz$

Soit (Ox) l'axe ascendant suivant la pente, de même origine O que l'axe (Oz)

On a donc  $z = x \sin(\alpha)$  et  $E_{pp} = mgx \sin(\alpha)$

**Théorème de l'énergie mécanique** entre le point I : position initiale et le point A : impact avec le ressort qui est alors à sa longueur à vide  $l_0$

$$E_{mI} = E_{mA} \Rightarrow \frac{1}{2} m v_A^2 + mgl_0 \sin(\alpha) = 0 + mg(D + l_0) \sin \alpha \Rightarrow \frac{1}{2} m v_A^2 = mgD \sin \alpha \Rightarrow$$

$$v_A = \sqrt{2gD \sin \alpha}$$

2. **Méthode N°1** : Soit B point où le ressort est comprimé au maximum (point du demi-tour) :

BAME : pesanteur :  $E_{pp} = mgz$

Energie potentielle élastique :  $E_{pe} = \frac{1}{2}k(l - l_0)^2$

Théorème de l'énergie mécanique entre le point O et le point B en supposant qu'il n'y a pas de dissipation d'énergie lors de l'impact :

$$E_{m0} = E_{mB} \Rightarrow \frac{1}{2}k(l_c - l_0)^2 + mgl_c \sin \alpha = mg(l_0 + D) \sin \alpha$$

$$(l_c - l_0)^2 = \frac{2mg}{k} \sin \alpha (l_0 + D) - \frac{2mgl_c}{k} \sin \alpha = l_c^2 - 2l_0 l_c + l_0^2$$

$$l_c^2 + 2 \left( \frac{mg}{k} \sin \alpha - l_0 \right) l_c + l_0^2 - \frac{2mg}{k} \sin \alpha (l_0 + D) = 0$$

Remarque : PFD à l'équilibre projeté sur (Ox) :  $-mg \sin \alpha - k(l_{\text{éq}} - l_0) = 0$ , soit  $l_{\text{éq}} = l_0 - \frac{mg \sin \alpha}{k}$

On peut également poser  $x_i = l_0 + D$

$$l_c^2 - 2l_{\text{éq}} l_c + l_0^2 - 2(l_{\text{éq}} - l_0)x_i = 0$$

Soit en posant  $L^2 = l_0^2 - 2(l_{\text{éq}} - l_0)x_i = l_0^2 - 2(l_{\text{éq}} - l_0)(l_0 + D) = l_0^2 - (2l_{\text{éq}}l_0$

$$l_c^2 - 2l_{\text{éq}} l_c + L^2 = 0$$

$$l_c = \frac{2l_{\text{éq}} \pm \sqrt{4l_{\text{éq}}^2 - 4L^2}}{2} = l_{\text{éq}} \pm \sqrt{l_{\text{éq}}^2 - L^2}$$

Or  $l_c$  étant la distance minimale :  $l_c = l_{\text{éq}} - \sqrt{l_{\text{éq}}^2 - L^2} = l_{\text{éq}} - \sqrt{\left(l_0 - \frac{mg \sin \alpha}{k}\right)^2 - l_0^2 - 2 \frac{mg \sin \alpha}{k} (l_0 + D)}$

$$l_c = l_{\text{éq}} - \sqrt{\left(\frac{mg \sin \alpha}{k}\right)^2 + 2 \frac{mg \sin \alpha}{k} D} = l_{\text{éq}} - \sqrt{(l_0 - l_{\text{éq}})(l_0 - l_{\text{éq}} + 2D)}$$

$$l_c = l_0 - \frac{mg \sin \alpha}{k} - \sqrt{\frac{mg \sin \alpha}{k} \left(\frac{mg \sin \alpha}{k} + 2D\right)}$$

**Méthode N°2** : PFD à l'équilibre projeté sur (Ox) :

$$mg \sin \alpha - k(x_{\text{éq}} - l_0) = 0 \quad \text{soit} \quad x_{\text{éq}} = l_{\text{éq}} = l_0 - \frac{mg \sin \alpha}{k}$$

PFD projeté sur (Ox) :  $mg \sin \alpha - k(x - l_0) = m\ddot{x}$

d'où  $m\ddot{x} + k(x - x_{\text{éq}}) = 0 \Rightarrow \ddot{X} + \omega_0^2 X = 0$  avec  $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$  et  $X = x - x_{\text{éq}}$

$$X = x - x_{\text{éq}} = X_m \cdot \cos(\omega t + \varphi)$$

$$\dot{X} = \dot{x} = -\omega X_m \cdot \sin(\omega t + \varphi)$$

$X(t)$  sera minimum pour  $\cos(\omega t + \varphi) = -1$  et donc  $X_{\text{mini}} = l_c - x_{\text{éq}} = -X_m \Rightarrow$

$$l_c = x_{\text{éq}} - X_m = l_0 - \frac{mg \sin \alpha}{k} - X_m$$

C.I. : en prenant comme instant  $t = 0$  le moment du premier impact au point A, avec  $x(t = 0) = l_0$  et

$$\dot{x}(t = 0) = v_A = \sqrt{2gD \sin \alpha}$$

$$l_0 - x_{\text{éq}} = X_m \cdot \cos(\varphi)$$

$$v_A = -\omega X_m \cdot \sin(\varphi)$$

$$X_m^2 (\cos^2(\varphi) + \sin^2(\varphi)) = X_m^2 = (l_0 - x_{\text{éq}})^2 + \left(\frac{v_A}{\omega}\right)^2 = \left(\frac{mg \sin \alpha}{k}\right)^2 + \frac{2mgD \sin \alpha}{k}$$

$$l_c = x_{\text{éq}} - X_m = l_{\text{éq}} - \sqrt{(l_0 - l_{\text{éq}})^2 + 2(l_0 - l_{\text{éq}})D} = l_{\text{éq}} - \sqrt{(l_0 - l_{\text{éq}})(l_0 - l_{\text{éq}} + 2D)}$$

$$\ell_c = \ell_0 - \frac{mg \sin \alpha}{k} - \sqrt{\left(\ell_0 - \frac{mg \sin \alpha}{k}\right)^2 + \frac{2mgD \sin \alpha}{k}}$$

### Exercice 9. Positions d'équilibre d'un oscillateur de Landau – un exemple de bifurcation mécanique

1) **Système** : point M ; soumis à son poids, la tension du ressort et la réaction de l'axe ( $Ox$ ) (orthogonale à l'axe en l'absence de frottements).

Si  $a < L_0$  : lorsque le point M se trouve en O à la verticale du point A, le ressort est comprimé. Il n'y a alors aucune force selon l'axe ( $Ox$ ), et ce point O correspond à une position d'équilibre.

Si on écarte un peu M du point O, le ressort comprimé va avoir tendance à éloigner M de O, qui est donc une position d'équilibre instable.

De plus, il va alors exister deux positions de M, symétriques par rapport à O, telles que  $AM = L_0$ . Dans ce cas, il n'y pas d'action du ressort, et aucune force selon ( $Ox$ ) : il s'agit donc de deux autres positions d'équilibre. En écartant un peu de ces positions, le ressort sera soit comprimé, soit étiré, et aura tendance à ramener M vers la position où il est à sa longueur à vide : ce sont des positions d'équilibre stable.

Au contraire, si  $a > L_0$ , le ressort est toujours étiré et la seule position où il n'y pas de forces selon l'axe ( $Ox$ ) est le point O, qui correspondra à une position d'équilibre stable. En effet, en déplaçant légèrement M à proximité de O, le ressort étiré va ramener M vers O.

2) On étudie le point matériel M de masse  $m$  dans le référentiel terrestre galiléen.

**BAME** : Les forces subies par M( $m$ ) sont

- le poids d'énergie potentielle de pesanteur associée  $E_{pp}$  constante, l'altitude du point M étant constante. On peut par exemple la choisir nulle :  $E_{pp} = 0$

*Remarque : Ce choix d'origine des potentiels n'influence aucun des résultats ci-dessous car seules les dérivées première et seconde de l'énergie potentielle sont exploitées.*

- la réaction normale du support, qui ne travaille pas, les déplacements ayant lieu sans frottements, à laquelle on peut donc associer une énergie potentielle nulle.

- la force de rappel du ressort d'énergie potentielle associée  $E_{pe}(x) = \frac{1}{2}k(L - L_0)^2$  avec  $L = \sqrt{x^2 + a^2}$

L'énergie potentielle globale est l'énergie potentielle élastique et a l'expression suivante :

$$E_p(x) = \frac{1}{2}k(L - L_0)^2 + cte = \frac{1}{2}k(\sqrt{x^2 + a^2} - L_0)^2 + cte.$$

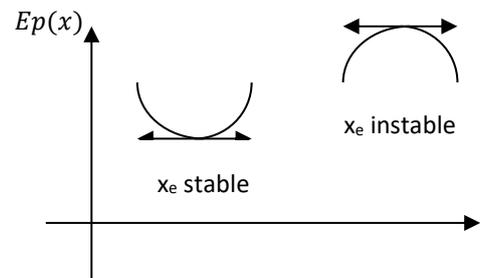
3) On peut utiliser la discussion de la première question, ou en reprendre une basée sur l'expression de l'énergie potentielle obtenue. Si  $a < L_0$ , alors deux positions de M, symétriques par rapport à O sont telles que  $AM = L_0$ . Dans ce cas, l'énergie potentielle élastique est nulle, et il y aura donc deux minima d'énergie potentielle totale. Au contraire, si  $a > L_0$ , le ressort est toujours étiré et l'énergie potentielle élastique jamais nulle. Ce raisonnement qualitatif se retrouve bien sûr sur l'expression mathématique de  $E_p$ .

Ainsi on peut identifier **la courbe en pointillés violets (la plus haute) au cas  $a_4 = 3L_0$** . La courbe en points verts (la plus basse en  $x = 0$ ) ne fait apparaître qu'un seul minimum, mais son énergie potentielle est nulle : elle correspond au **cas limite  $a_3 = L_0$** . Enfin, il reste à identifier les 2 dernières courbes, ce qui peut se faire à partir de la valeur de l'énergie potentielle en  $x = 0$ .

Elle est plus élevée sur la courbe bleue en trait plein que sur la courbe rouge (tirets), signe que le ressort est davantage comprimé. On en déduit que **la courbe bleue est celle du cas  $a_1 = \frac{L_0}{10}$**  alors que **la courbe rouge correspond à  $a_2 = \frac{L_0}{3}$** .

4) Point d'équilibre stable :  $\frac{dEp}{dx}\Big|_{x=x_{eq}} = 0$  et  $\frac{d^2Ep}{dx^2}\Big|_{x=x_{eq}} > 0$ .

Point d'équilibre instable :  $\frac{dEp}{dx}\Big|_{x=x_{eq}} = 0$  et  $\frac{d^2Ep}{dx^2}\Big|_{x=x_{eq}} < 0$ .



$$\frac{dEp}{dx} = kx \left( 1 - \frac{L_0}{\sqrt{x^2+a^2}} \right) \text{ et}$$

$$\frac{d^2Ep}{dx^2} = k \left( 1 - \frac{L_0}{\sqrt{x^2+a^2}} \right) + kx^2 \frac{L_0}{(x^2+a^2)^{3/2}} = k \left( 1 - \frac{L_0 a^2}{(x^2+a^2)^{3/2}} \right)$$

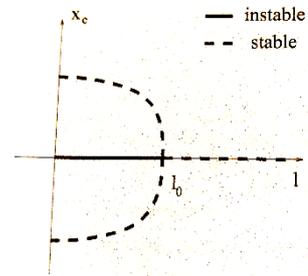
Donc  $\frac{dEp}{dx} = 0$  pour  $x = 0$  et  $x = \pm\sqrt{L_0^2 - a^2}$  si  $a < L_0$

$\frac{dEp}{dx} = 0$  pour  $x = 0$  uniquement si  $a > L_0$

De plus,  $\frac{d^2Ep}{dx^2}\Big|_{x=\sqrt{L_0^2-a^2}} = k \left( 1 - \frac{a^2}{L_0^2} \right) > 0$  si  $a < L_0$  et  $\frac{d^2Ep}{dx^2}\Big|_{x=0} = k \left( 1 - \frac{L_0}{a} \right) > 0$  si  $a > L_0$  et  $< 0$  si  $a < L_0$

Si  $a < L_0$ ,  $x = 0$  est position d'équilibre instable et  $x = \pm\sqrt{L_0^2 - a^2}$  sont deux positions d'équilibre stables.

Si  $a > L_0$ ,  $x = 0$  est position d'équilibre stable



5) Pour  $a = L_0$ , le système bifurque vers d'autres positions d'équilibre que  $x = 0$ . L'allure du tracé rappelle une fourche d'où le nom " bifurcation fourche".

6) On passe de 3 positions d'équilibre à une seule en fonction de la valeur de la distance  $a$  ; de plus, la position d'équilibre existant dans tous les cas de figure change de stabilité. C'est pourquoi on parle de brisure de symétrie.

### Exercice 10. Skieur

**Système** : étudiant supposé ponctuel étudié dans le référentiel terrestre supposé galiléen

**Bilan des actions mécaniques extérieures** :

- poids  $\vec{P}$  (dérivant de l'énergie potentielle de pesanteur  $E_{pp} = +mgz + cte$ , avec  $z$  altitude, origine au point B au niveau du sol)
- réaction du support  $\vec{R}_N$  (supposée normale au support en négligeant les frottements solides), ne travaille pas, étant toujours normale au déplacement

#### 1. Étude énergétique :

**Théorème de l'énergie mécanique** entre le point A : position initiale du skieur en haut de la piste et le point B : skieur en bas de la piste :

$$E_m(B) - E_m(A) = W(\vec{F}_{non\ conservative}) \stackrel{\text{système conservatif}}{=} 0$$

De plus, par définition de l'énergie mécanique, on a

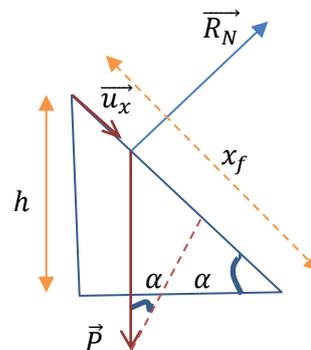
$$E_m = E_c + E_p = E_c + E_{pp} = \frac{1}{2}mv^2 + mgz + cte$$

D'où  $E_m(A) = \frac{1}{2}mv_A^2 + mgz_A + cte \stackrel{\substack{\text{vitesse} \\ \text{initiale} \\ \text{nulle}}}{=} mgz_A + cte$  et

$$E_m(B) = \frac{1}{2}mv_B^2 + mgz_B + cte = \frac{1}{2}mv_f^2 + mgz_B + cte$$

En exploitant  $E_m(B) - E_m(A) = 0$  avec  $z_A - z_B = h$  :  $\frac{1}{2}mv_f^2 - mgh = 0$

$$\boxed{v_f = \sqrt{2gh}} \approx \sqrt{2 \times 10 \times 15} = \sqrt{30 \times 10} = \sqrt{300} = 10\sqrt{3} \approx 17 \text{ m.s}^{-1}$$



**2. Principe fondamental de la dynamique :**  $m\vec{a} = \vec{P} + \vec{R}_N$

**projection** sur le vecteur unitaire  $\vec{u}_x$  associé à l'axe  $(Ox)$  correspondant à la pente, dans la direction du mouvement :

$$m\ddot{x} = \vec{P} \cdot \vec{u}_x + \vec{R}_N \cdot \vec{u}_x = mg \sin \alpha + 0 \Leftrightarrow \ddot{x} = g \sin \alpha$$

**En intégrant** par rapport au temps en exploitant la condition initiale (vitesse initiale nulle) :

$$\dot{x} = gt \sin \alpha + K \stackrel{\substack{\text{C.I.} \\ \dot{x}(t=0)=0}}{=} gt \sin \alpha \quad (2)$$

En intégrant à nouveau par rapport au temps, en choisissant la position initiale comme origine de l'axe  $(Ox)$

$x = \frac{1}{2}gt^2 \sin \alpha + K \stackrel{\substack{\text{C.I.} \\ x(t=0)=0}}{=} \frac{1}{2}gt^2 \sin \alpha$  (2) ; en exploitant  $x_f = \frac{h}{\sin \alpha}$  dans (2) : expression  $x(t)$  :

$$\boxed{t_f = \sqrt{\frac{2x_f}{g \sin \alpha}} = \sqrt{\frac{2h_0}{g \sin^2 \alpha}}}$$

A.N. : avec  $\sin \alpha = 0,5$  :  $t_f = \sqrt{\frac{4 \times 30}{9,81}} = 3,5 \text{ s}$

**3. Travail de la force de frottement :**

$$W(\vec{F}) = \int_A^B -F\vec{u}_x \cdot d\vec{OM} = \int_A^B -F dx = -Fx_f = -F \frac{h}{\sin \alpha}$$

**Système :** étudiant supposé ponctuel étudié dans le référentiel terrestre supposé galiléen

**Bilan des actions mécaniques extérieures :**

- poids  $\vec{P}$  (dérivant de l'énergie potentielle de pesanteur  $E_{pp} = +mgz + cte$ , avec  $z$  altitude)
- réaction normale du support  $\vec{R}_N$
- Force de frottement solide  $\vec{F} = -F\vec{u}_x$ , non conservative

**Étude énergétique :**

**Théorème de l'énergie mécanique** entre le point A : position initiale du skieur en haut de la piste et le point B : skieur en bas de la piste :

$$E_m(B) - E_m(A) = W(\vec{F}_{non\ conservative}) = \int_A^B -F\vec{u}_x \cdot d\vec{OM} = -F \frac{h}{\sin \alpha}$$

Avec  $E_m(A) = \frac{1}{2}mv_A^2 + mgz_A + cte \stackrel{\substack{\text{vitesse} \\ \text{initiale} \\ \text{nulle}}}{=} mgz_A + cte$  et

$$E_m(B) = \frac{1}{2}mv_B^2 + mgz_B + cte = \frac{1}{2}mv_f^2 + mgz_B + cte$$

En l'exploitant le Théorème de l'énergie mécanique entre les points A et B :

$$E_m(B) - E_m(A) = -F \frac{h}{\sin \alpha} \quad \text{avec} \quad z_A - z_B = h : \quad \frac{1}{2}mv_f^2 - mgh = -F \frac{h}{\sin \alpha}$$

soit

$$\frac{1}{2}mv_f^2 = mgh - F \frac{h}{\sin \alpha} = h \left( mg - \frac{F}{\sin \alpha} \right)$$

D'où

$$v_f = \sqrt{2h \left( g - \frac{F}{m \sin(\alpha)} \right)}$$

### Exercice 11. Vibration de la molécule de monoxyde de carbone

1) L'argument d'une exponentielle étant nul,  $[\beta(r - r_0)] = 1$ , soit  $[\beta] = L^{-1}$ .

$V_0 = \lim_{r \rightarrow \infty} V(r)$  : valeur de l'énergie potentielle quand les atomes sont infiniment éloignés l'un de l'autre, ou séparés, donc lorsque la molécule est cassée.

$\beta^{-1}$  distance caractéristique de l'interaction : si  $(r - r_0) \gg \beta^{-1}$  alors  $V = V_0$ , la molécule peut être considérée comme cassée, alors que sinon il y a interaction entre les deux atomes.

$V(r)$  est minimum quand  $r = r_0$ , qui correspond donc à la position d'équilibre stable des 2 atomes. C'est donc la longueur de la liaison

$V_0 \approx 8 \text{ eV}$  et  $r_0 \approx 120 \text{ pm}$ .

2)  $r < r_0$  : l'équilibre étant stable, l'atome d'oxygène a tendance à revenir à sa position d'équilibre, et donc à s'éloigner de l'atome de carbone : l'interaction est répulsive.

$r > r_0$  : l'équilibre étant stable, l'atome d'oxygène a tendance à revenir à sa position d'équilibre, et donc à se rapprocher de l'atome de carbone : l'interaction est attractive.

3) L'atome d'oxygène est alors dans un puits de potentiel, il reste au voisinage de sa position d'équilibre stable car dès qu'il s'en éloigne, il subit une force qui a tendance à l'y ramener. Trajectoire bornée, état lié, avec un mouvement oscillatoire : les atomes vibrent au niveau de la liaison en se rapprochant et s'éloignant périodiquement.  $V_0$  apparaît alors comme l'énergie mécanique minimale à fournir à la molécule pour casser la liaison et obtenir des atomes dans un état de diffusion.

4) On se sert du fait que  $e^x \approx 1 + x$  pour  $x \ll 1$ . On fait donc l'hypothèse que  $r$  est suffisamment proche de  $r_0$  pour que  $r - r_0 \ll 1/\beta$  donc  $e^{-\beta(r-r_0)} \approx 1 - \beta(r - r_0)$ . Ainsi en développant l'expression de l'énergie potentielle d'interaction :

$$V(r) \approx V_0(1 - 1 + \beta(r - r_0))^2 = V_0\beta^2(r - r_0)^2 = \frac{k}{2}(r - r_0)^2$$

Cette énergie potentielle est donc de la forme de celle associée à une force de rappel élastique de raideur  $k = 2V_0\beta^2$ .

5) En utilisant l'approximation harmonique, en considérant le problème conservatif, on a  $\frac{dE_m}{dt} = 0$ , d'où :

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{k}{2}(r - r_0)^2 \right) = 0 \Leftrightarrow m\dot{r}\ddot{r} + k(r - r_0)\dot{r} = 0$$

D'où, en posant  $x = r - r_0$ , on obtient l'équation d'un oscillateur harmonique  $m\ddot{x} + kx = 0$  de pulsation  $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$ .

La fréquence des petites oscillations est donc

$$f = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{2V_0\beta^2}{m}}$$

## Exercice 12. Pendule pesant

1. **Liaison pivot parfaite ou idéale** : aucune force ni couple de frottement ; la réaction du support est normale à l'axe  $\Delta$  de rotation et coupe donc cet axe  $\Delta$ . On a alors  $\mathcal{M}_\Delta(\vec{F}_{liaison}) = 0$ .

2. **Système Etudié** : l'ensemble solide  $\mathcal{S}$  constitué des deux tiges, de moment d'inertie total  $J_\Delta = \frac{8mL^2}{3}$  par rapport à l'axe  $\Delta = (O ; \vec{e}_z)$ .

- **Référentiel d'étude** : Référentiel terrestre  $\mathcal{R}_g(O ; \vec{e}_x ; \vec{e}_y ; \vec{e}_z)$  supposé galiléen.

- **Bilan des actions mécaniques extérieures** :

- Poids  $\vec{P} = m\vec{g}$  du système ;
- Force de liaison en O
- Force de rappel élastique  $\vec{F}_{eA}$  exercée par le ressort en A :

$$\vec{F}_{eA} = -k(AC - \ell_0)\vec{e}_x$$

Or  $AC = \underbrace{\ell_{\acute{e}q}}_{\substack{\text{longueur lorsque} \\ \text{la tige AO est horizontale}}} + 2l \sin \theta$

$$\vec{F}_{eA} = -k(\ell_{\acute{e}q} + 2l \sin \theta - \ell_0)\vec{e}_x$$

La liaisons pivot en O étant idéale,  $\mathcal{M}_\Delta(\vec{F}_{liaison}) = 0$

Le système étant composé de deux tiges OA et OB, on a  $\mathcal{M}_\Delta(\vec{P}) = \mathcal{M}_\Delta(\vec{P}_{OA}) + \mathcal{M}_\Delta(\vec{P}_{OB})$ .

De plus, le centre de gravité de chaque tige, supposée homogène et de longueur  $2l$ , se trouve au milieu de la tige, donc à la distance  $l$  du point O. En choisissant un sens positif de rotation dans le sens trigonométrique, on a :

$$\mathcal{M}_\Delta(\vec{P}) = \mathcal{M}_\Delta(\vec{P}_{OA}) + \mathcal{M}_\Delta(\vec{P}_{OB}) = +mg\ell \cos \theta - mg\ell \sin \theta.$$

$$\mathcal{M}_\Delta(\vec{F}_{eA}) = -k(\ell_{\acute{e}q} + 2l \sin \theta - \ell_0)(2\ell \cos \theta)$$

$$\sum_i \mathcal{M}_\Delta(\vec{F}_i) = +mg\ell \cos \theta - mg\ell \sin \theta - k(2\ell \sin \theta + AC - \ell_0)(2\ell \cos \theta)$$

### 3. Théorème du moment cinétique scalaire au solide dans $\mathcal{R}_g$

$$\frac{dL_\Delta}{dt} = \sum_i \mathcal{M}_\Delta(\vec{F}_i) = \mathcal{M}_\Delta(\vec{P}) + \mathcal{M}_\Delta(\vec{F}_{liaison}) + \mathcal{M}_\Delta(\vec{F}_{eA}) + \mathcal{M}_\Delta(\vec{F}_{eB})$$

condition d'équilibre :  $\sum_i \mathcal{M}_\Delta(\vec{F}_i) = 0$  pour  $\theta = 0$ , soit

$$+mg\ell \cos \theta - mg\ell \sin \theta - k(\ell_{\acute{e}q} + 2l \sin \theta - \ell_0)(2\ell \cos \theta) = 0 \text{ pour } \theta = 0$$

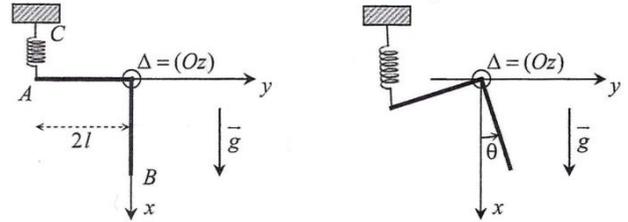
$$mg\ell - k(\ell_{\acute{e}q} - \ell_0)(2\ell) = 0 \Leftrightarrow \boxed{\ell_{\acute{e}q} = \ell_0 + \frac{mg}{2k}}$$

on en déduit que l'allongement vaut

$$\ell_{\acute{e}q} - \ell_0 = \frac{mg}{2k} > 0, \text{ le ressort est donc en tension à l'équilibre}$$

### 4. Théorème du moment cinétique scalaire au solide dans $\mathcal{R}_g$

$$\frac{dL_\Delta}{dt} = \sum_i \mathcal{M}_\Delta(\vec{F}_i) = \mathcal{M}_\Delta(\vec{P}) + \mathcal{M}_\Delta(\vec{F}_{liaison}) + \mathcal{M}_\Delta(\vec{F}_{eA}) + \mathcal{M}_\Delta(\vec{F}_{eB})$$



Le solide étant en rotation autour d'un axe fixe  $\Delta$ ,  $L_\Delta = J_\Delta \omega = J_\Delta \dot{\theta}$ , soit  $\frac{dL_\Delta}{dt} = J_\Delta \ddot{\theta}$

$$J_\Delta \ddot{\theta} = mg\ell \cos \theta - mg\ell \sin \theta - k(\ell_{\text{éq}} + 2l \sin \theta - \ell_0)(2\ell \cos \theta)$$

$$J_\Delta \ddot{\theta} = mg\ell \cos \theta - mg\ell \sin \theta - k\left(\ell_0 + \frac{mg}{2k} + 2l \sin \theta - \ell_0\right)(2\ell \cos \theta)$$

$$J_\Delta \ddot{\theta} = mg\ell(\cos \theta - \sin \theta) - 2k\ell \cos \theta \left(\frac{mg}{2k} + 2l \sin \theta\right) = mg\ell(-\sin \theta) - 2k\ell \cos \theta (2l \sin \theta)$$

$$J_\Delta \ddot{\theta} = -\ell(mg + 4kl \cos \theta) \sin \theta$$

Dans l'approximation des petits angles :  $\cos \theta \approx 1$  et  $\sin \theta \approx \theta$

$$\ddot{\theta} + \frac{\ell(mg + 4k\ell)}{J_\Delta} \theta = 0 \quad \text{et une période} \quad T = 2\pi \sqrt{\frac{J_\Delta}{\ell(mg + 4k\ell)}} = 2\pi \sqrt{\frac{8ml}{3(mg + 4k\ell)}}$$

**4. Méthode N°1 :** exploiter l'intégrale première du mouvement correspondant à la conservation de l'énergie mécanique :

$$Em = E_c + E_{p,\text{élastique}} + E_{p,\text{pesanteur}} = \text{cte}$$

**Méthode N°2 :** Théorème de la puissance cinétique:

$$\frac{dEc}{dt} = J_\Delta \omega \dot{\omega} = \mathcal{P}_{\text{ext}} = \mathcal{M}_{\Delta,\text{ext}} \omega \Leftrightarrow J_\Delta \dot{\theta} \ddot{\theta} = (mg\ell \cos \theta - mg\ell \sin \theta - k(\ell_{\text{éq}} + 2l \sin \theta - \ell_0)(2\ell \cos \theta)) \dot{\theta}$$

Méthode N°2 : Théorème de la puissance mécanique

$$\frac{dEm}{dt} = \frac{dEc}{dt} + \frac{dEp}{dt} = J_\Delta \omega \dot{\omega} + \frac{dE_{p,\text{élastique}}}{dt} + \frac{dE_{p,\text{pesanteur}}}{dt} = \underbrace{\mathcal{P}_{\text{non conservatives}}}_{\text{système conservatif}} = 0$$

Etude du mouvement : la solution  $\dot{\theta} = 0$  n'a pas d'intérêt physique, on retrouve alors en simplifiant par  $\omega = \dot{\theta}$  et dans l'approximation des petits angles :  $\cos \theta \approx 1$  et  $\sin \theta \approx \theta$  :

$$J_\Delta \ddot{\theta} + \ell(mg + 4k\ell)\theta = 0$$

### Exercice 13. Détermination d'un moment d'inertie

- **Système Etudié :** l'ensemble solide  $S$  + arbre, de moment d'inertie total  $J_\Delta$  par rapport à l'axe  $\Delta = (A; \vec{e}_z)$ .
- **Référentiel d'étude :** Référentiel terrestre  $\mathcal{R}_g(O; \vec{e}_x; \vec{e}_y; \vec{e}_z)$  supposé galiléen.
- **Bilan des actions mécaniques extérieures :**
  - Poids  $\vec{P}$  du système ;
  - Forces de liaison en A et B
  - Couple moteur

**Méthode N°1 : Théorème du moment cinétique scalaire au solide dans  $\mathcal{R}_g$**

$$\frac{dL_\Delta}{dt} = \mathcal{M}_\Delta(\vec{P}) + \mathcal{M}_\Delta(\vec{F}_{\text{liaison}}) + \Gamma$$

Le solide étant en rotation autour d'un axe fixe  $\Delta$ ,  $L_\Delta = J_\Delta \omega$ ;

Les liaisons pivot en A et B étant idéales,  $\mathcal{M}_\Delta(\vec{F}_{\text{liaison}}) = 0$

Le centre d'inertie du solide appartenant à  $\Delta$ ,  $\mathcal{M}_\Delta(\vec{P}) = 0$ .

Finalement,

$$\frac{dL_\Delta}{dt} = \Gamma = J_\Delta \frac{d\omega}{dt}$$

soit en intégrant de  $t = 0$  (vitesse angulaire  $\omega_0 = 0$ , angle  $\theta = 0$ ) à un instant  $t$  quelconque :

$$\omega - \omega_0 = \frac{\Gamma}{J_\Delta} t$$

soit avec  $\omega_0 = 0$   $t = \frac{\omega J_\Delta}{\Gamma}$

De plus,  $\omega = \frac{d\theta}{dt} = \frac{\Gamma}{J_\Delta} t$ , d'où

$$\theta = \theta_0 + \frac{1}{2} \frac{\Gamma}{J_\Delta} t^2 = \frac{1}{2} \frac{\Gamma}{J_\Delta} \left( \frac{\omega J_\Delta}{\Gamma} \right)^2 = \frac{1}{2} \frac{J_\Delta}{\Gamma} (\omega)^2$$

En exploitant l'instant  $t = t_1$ , avec  $t_1$  instant où les 18 premiers tous ont été accomplis :

angle parcouru  $\theta_1 = 18$  tours =  $18 \times 2\pi$  rad = 113 rad ;

vitesse angulaire  $\omega_1 = 1200$  tours/min =  $\frac{1200}{60}$  tr/s = 126 rad.s<sup>-1</sup> :

$$\boxed{J_\Delta = 2 \frac{\Gamma}{\omega^2} \theta}$$

A.N. :  $J_\Delta = 0,021$  kg.m<sup>2</sup>

**Méthode N° 2 : Utilisation du Théorème de l'énergie cinétique au solide dans  $\mathcal{R}_g$**  entre le point correspondant à la position initiale et le point correspond à l'instant  $t_1$  (18 tours parcourus).

$$\Delta E_c = W(\vec{P}) + W(\vec{F}_{liaison}) + W(\vec{F}_{couple})$$

Le solide étant en rotation autour d'un axe fixe  $\Delta$ ,  $E_c = \frac{1}{2} J_\Delta \omega^2$  ;

Le centre d'inertie G appartenant à  $\Delta$ , il ne se déplace pas :  $W(\vec{P}) = 0$ .

De même, le point d'application des forces de liaison ne se déplace pas :  $W(\vec{F}_{liaison}) = 0$  ;

Le solide étant en rotation autour d'un axe fixe  $\Delta$ ,  $W(\vec{F}_{couple}) = \int \Gamma d\theta$

Finalement,  $\Delta E_c = \frac{1}{2} J_\Delta \Delta(\omega^2) = \Gamma \Delta\theta$

Soit ici entre  $t = 0$  et  $t_1$  :

$$\boxed{\frac{1}{2} J_\Delta \omega_1^2 = \Gamma \theta_1}$$

d'où  $\boxed{J_\Delta = 2 \frac{\Gamma \theta_1}{\omega_1^2}}$

**Rappel** : pour un solide en rotation autour d'un axe fixe, on peut retrouver facilement les différentes définitions et théorèmes à partir de ceux de la mécanique du point en translaton moyennant l'équivalence ci-dessous.

#### Equivalence entre les variables translation et les variables rotation

translation	$X$	$\dot{X} = v$	$a \doteq \dot{v} = \ddot{X}$	$m$	$p = mv$	$\frac{1}{2} m v^2$	$F$	$m\ddot{X} = F$	$\mathcal{P} = Fv$
Rotation par rapport à un axe $\Delta$	$\theta$	$\dot{\theta} = \omega$	$\dot{\omega} = \ddot{\theta}$	$J_\Delta$	$L_{/\Delta} = J_\Delta \omega$	$\frac{1}{2} J_\Delta \omega^2$	$\mathcal{M}_{/\Delta}$	$J_\Delta \ddot{\theta} = \mathcal{M}_{/\Delta}$	$\mathcal{P} = \mathcal{M}_{/\Delta} \omega$