TD CHAPITRE MK.0-BIS : COMPLEMENTS DE MECANIQUE – FORCES CONSERVATIVES ET STATIQUE DES FLUIDES

CONSEILS A SUIVRE, ERREURS A EVITER

- La poussée d'Archimède doit pouvoir être définie (en français), et vous devez également savoir dire en français de quelle manière la calculer. La formule éventuelle vient seulement après.
- L'application du théorème d'Archimède suppose que le corps étudié soit entièrement immergé dans un ou des fluide(s). D'autre part, pour un corps reposant au fond d'un récipient, il est possible d'utiliser le théorème d'Archimède pour déterminer la résultante des forces pressantes, à condition de bien soustraire la composante correspondant à la base qui n'est pas en contact avec le fluide.
- Attention ! un corps flottant à la surface d'un liquide est totalement immergé dans les fluides air + liquide ! il est donc possible de lui appliquer la poussée d'Archimède. Cette dernière est alors généralement évaluée en ne considérant que le poids du liquide déplacé (la masse volumique de l'air étant 1000 fois plus faible que celle des liquides, son poids déplacé est généralement négligeable).

IMPORTANT **Désigne un exercice classique, qu'il est nécessaire de savoir refaire de façon rapide et rigoureuse**

Difficulté des techniques et outils mathématiques nécessaires

Difficulté d'analyse, de compréhension, prise d'initiatives

APPLICATIONS DE COURS

Exercice 1. Énergies potentielles classiques IMPORTANT | 1 | 2

Etablir l'expression des énergies potentielles suivantes :

1) Energie potentielle de pesanteur E_{pp} dans le champ de pesanteur $\vec{g}$ supposé uniforme,
2) Energie potentielle élastique d'un ressort de constante de raideur k et de longueur à vide L_0 ,

---

Exercice 2. Relation fondamentale de la statique des fluides IMPORTANT | 2 | 2

Établir la relation de la statique des fluides dans le seul champ de pesanteur, en admettant que le champ de pression ne dépend que de la coordonnée verticale z.

Exercice 3. Atmosphère isotherme 1 | 2

On étudie l'équilibre de l'atmosphère terrestre qu'on suppose isotherme à la température $T_0 = 0$ °C.

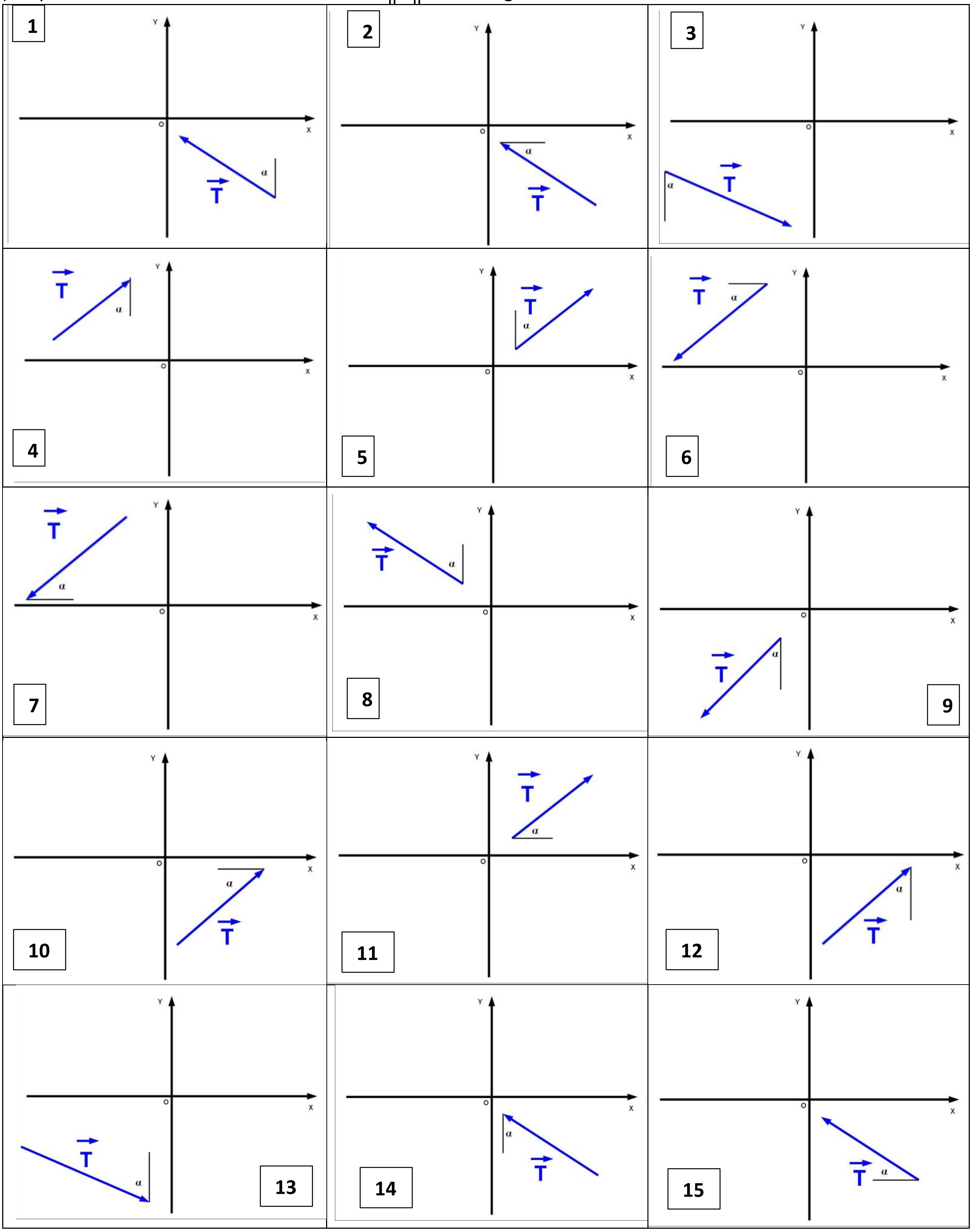
1) Exprimer la masse volumique μ de l'air en fonction de R, T_0, P et la masse molaire M_{air} de l'air.
2) Etablir la loi $P(z)$ de variation de la pression atmosphérique avec l'altitude $z, P_0 = 1$ atm ≈ 1 bar étant la pression atmosphérique au sol. Faire apparaître une grandeur caractéristique des variations de pression dont on déterminera la dimension et dont on donnera la signification physique.
3) Déterminer l'altitude $z_{1/2}$ telle que $P(z_{1/2}) = \frac{P_0}{2}$.
4) Calculer la variation relative de pression entre le sol et l'altitude z pour les altitudes suivantes : $z = 1\,m$; $z = 10\,m$; $z = 1\,km$.

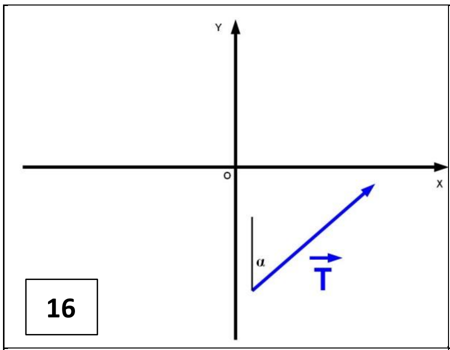
Données : $M_{air} = 29$ g/mol et $R \approx 8$ J.mol^{-1}.K^{-1}.

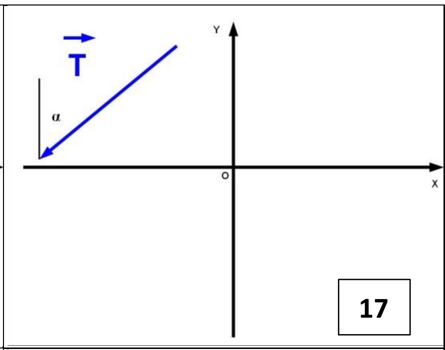
EXERCICES

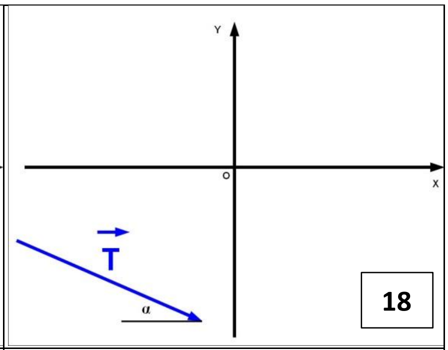
Exercice 4. Je projette, tu projettes, il (elle) projette…. IMPORTANT IMPORTANT | 1 | 2

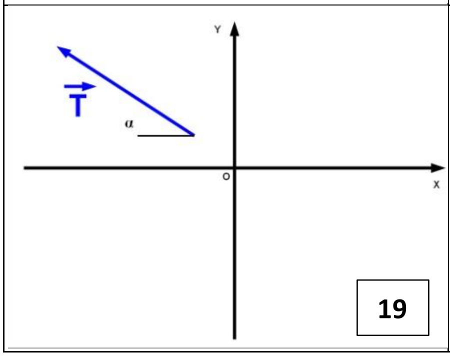
1) Exprimer le vecteur $\vec{T}$ en fonction de $T = \|\vec{T}\|$ et de l'angle α dans la base cartésienne.

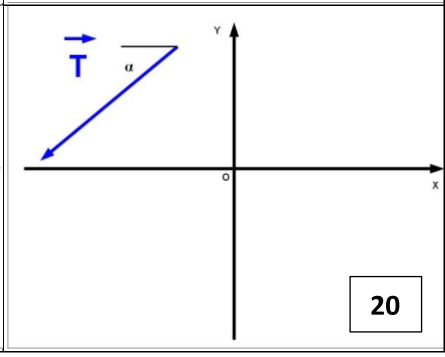












Exercice 5.Pression au fond de la fosse des iles Mariannes 1 | 1

La fosse des Mariannes est la fosse océanique la plus profonde actuellement connue. Elle est située dans la partie nord-ouest de l'océan Pacifique, à l'est des Îles Mariannes, à proximité de l'île de Guam. Le point le plus bas connu se situe selon les relevés à $-10\ 994\ m$. Des organismes dits « piézophiles » y vivent malgré des pressions atteignant $1\ 100\ atm$.

a) Justifier la valeur donnée de la pression.

b) Critiquer le calcul fait.

Exercice 6.Résolution de problème : Atmosphère parisienne *(d'après A. Leuridan)* 2 | 2

Evaluer la différence de pression entre la base et le sommet de la tour Eiffel.
On rappelle : $M_{air} = 29\ \mathrm{g.mol^{-1}}$; $R = 8{,}31\ \mathrm{J.K^{-1}.mol^{-1}}$; $g = 9{,}81\ \mathrm{m.s^{-2}}$

Document : La Tour Eiffel – *d'après Wikipédia*

*La **tour Eiffel** est une tour de fer puddlé située à Paris, à l'extrémité nord-ouest du parc du Champ-de-Mars en bordure de la Seine dans le 7e arrondissement. Construite par Gustave Eiffel et ses collaborateurs pour l'Exposition universelle de Paris de 1889, et initialement nommée « tour de 300 mètres », ce monument est devenu le symbole de la capitale française, et un site touristique de premier plan : il s'agit du troisième site culturel français payant le plus visité en 2015, avec 6,9 millions de visiteurs, … et reste le monument payant le plus visité au monde. D'une hauteur de 312 mètres à l'origine, la tour Eiffel est restée le monument le plus élevé du monde pendant quarante ans. Le second niveau du troisième étage, appelé parfois quatrième étage, situé à 279,11 mètres, est la plus haute plateforme d'observation accessible au public de l'Union européenne.*

Exercice 7.Chute d'un coquillage dans la mer IMPORTANT | 1 | 2

Considérons la chute dans la mer d'un coquillage de masse m modélisé pour simplifier par une sphère homogène de rayon R_c et de masse volumique ρ_c.
La force de frottement exercée par l'eau sur le coquillage est décrite par la loi (empirique) de Stokes :

$$\vec{f} = -6\pi\eta_e R_c\,\vec{v}$$

où η_e est la viscosité dynamique de l'eau avec $\eta_e = 10^{-3} USI$

Données : masse volumique de l'eau salée ρ_e.

1 - Montrer qu'en raison de la poussée d'Archimède tout se passe comme si le coquillage avait une masse volumique apparente $\rho' = \rho_c - \rho_e$.

2 - Établir l'équation différentielle vérifiée par la norme v de la vitesse du coquillage.

3 - Exprimer la vitesse limite atteinte par le coquillage et le temps caractéristique τ du régime transitoire.

Exercice 8. L'iceberg

IMPORTANT | 2 | 1

Quel est le rapport de la hauteur émergée à la hauteur totale pour un iceberg en équilibre dans l'eau ? (on pourra modéliser ce dernier par un bloc rectangulaire de hauteur $\boldsymbol{h}$ et de surface $\boldsymbol{S}$).

On donne ρ_{liq} = 1 g.cm^{-3} et ρ_{glace} = 0,92 g.cm^{-3}.

Exercice 9. Ascension d'un ballon-sonde

IMPORTANT | 2 | 1

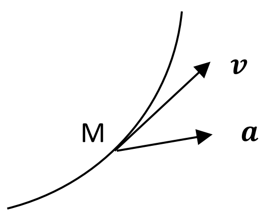
Un ballon-sonde, de masse à vide $m_B = 1{,}0\ \mathrm{kg}$, doit emporter des appareils de mesure dont la masse totale est $m_A = 4{,}0\ \mathrm{kg}$. Le ballon est gonflé à l'hélium de masse volumique $\rho_{He} = 0{,}18\ \mathrm{kg.m^{-3}}$. La masse volumique de l'air est $\rho_{air} = 1{,}3\ \mathrm{kg.m^{-3}}$.

Exprimer le volume d'hélium nécessaire pour que la poussée d'Archimède permette le décollage du ballon en fonction des masses $m_A + m_B$ et des masses volumiques ρ_{He} et ρ_{air}. Application numérique.

VRAI OU FAUX *

Commentez les affirmations suivantes :

1) Le vecteur vitesse d'un point en mouvement est toujours tangent à la trajectoire.
2) Les vecteurs unitaires de la base cartésienne sont tous constants.
3) Si la vitesse d'un mobile à l'instant t est nulle, alors son accélération est nécessairement nulle.
4) La figure ci-contre est possible :



5) Si le vecteur accélération est constant d'un point en mouvement est constant, le mouvement est uniforme.
6) Lorsque le vecteur accélération est constant, la vitesse peut changer de direction.
7) Si le mouvement d'un point est uniforme, alors son vecteur vitesse est nul.
8) Si le vecteur accélération d'un point est nul, alors le mouvement est rectiligne uniforme.
9) Un ressort de raideur k, de longueur à vide ℓ_0, de longueur ℓ, a une extrémité fixe en O. La force qu'il exerce sur l'autre extrémité, M, est $\vec{F} = ½\, k(\ell - \ell_0)^2\, \vec{e}_{OM}$ si on note $\vec{e}_{OM}$ le vecteur unitaire dirigé par $\overrightarrow{OM}$.
10) Si Oz est la verticale ascendante, alors le poids s'écrit $-m\vec{g}$.
11) Un ballon de volume V rempli d'hélium et en équilibre dans l'air subit une poussée d'Archimède $\vec{A} = \rho_{air} V \vec{g}$
12) Une force de puissance nulle peut ne pas être citée dans le bilan des forces.
13) Une force conservative ne dépend pas du chemin suivi.
14) La réaction d'un support sans frottement est une force non conservative.
15) Le travail d'une force $\vec{F}$ lorsque son point d'application M se déplace avec une vitesse $\vec{v}$ est :

$$\delta W = \vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{M} = \vec{F} \cdot \vec{v}\,\mathrm{d}t$$

16) Force conservative et énergie potentielle sont liées par la relation $\vec{F} \cdot \mathrm{d}\overrightarrow{OM} = -\mathrm{d}E_p$

EXERCICES COMPLEMENTAIRES

Exercice 10. Energie potentielle d'une somme de forces conservatives 1 | 1

Montrer que l'énergie potentielle totale associée à une somme de deux forces conservatives est la somme des énergies potentielles associées à chacune des forces.

Exercice 11. Détermination de la force exercée par un ressort 1 | 2

Considérons un ressort (raideur k, longueur à vide L_0) dont une extrémité est fixe en O et qui reste suivant un axe fixe Ox.

L'extrémité libre du ressort est le point M, repéré par son abscisse $x = L$.

Connaissant l'expression de l'énergie potentielle élastique, établir l'expression de la force élastique exercée par le ressort

---

Exercice 12. Expression du poids à partir de l'énergie potentielle de pesanteur 1 | 2

On s'intéresse à un point $M(m)$ dans le champ de pesanteur terrestre, repéré en coordonnées cartésiennes.

On donne l'énergie potentielle de pesanteur : $E_p = +mgz$, avec Oz axe vertical ascendant.

Quelle est l'expression de la force de pesanteur ?

Exercice 13. Résolution de problème 2 | 1

En Grèce, il est interdit de marcher dans les sites antiques avec des talons aiguilles pour ne pas les endommager.

Sur un sol fragile, est-il préférable d'accepter une femme en talons aiguilles ou un éléphant d'Afrique ?

Exercice 14. Atmosphère à gradient de température 1 | 2 ou 3

L'air est assimilé à un gaz parfait. On considère l'atmosphère terrestre au repos et on suppose que la température T varie avec l'altitude z selon un gradient de température constant $T(z) = T_0(1 - az)$ avec $T_0 = T(z = 0) = 15°\mathrm{C}$ correspondant à la température au sol, et $a = 0{,}021$ km^{-1} (ce modèle-ci de variation de la température atmosphérique est mieux adapté à la troposphère, soir de 0 à 10 km d'altitude, que le modèle de l'atmosphère isotherme).

1) Etablir la loi $P(z)$ de variation de la pression atmosphérique avec z, $P_0 = 1$ atm ≈ 1 bar étant la pression atmosphérique au sol, et la mettre sous la forme $P(z) = P_0(1 - az)^{\beta}$

2) Montrer que la masse volumique évolue selon $\mu(z) = \mu_0(1 - az)^{\beta - 1}$.

Données : $M_{air} = 29$ g/mol et $R \approx 8$ J.mol^{-1}.K^{-1}.

Exercice 15. Glaçon dans un verre 2 | 2

1) Un glaçon dans un verre flotte à la surface de l'eau. Le buveur d'eau s'amuse à l'enfoncer en jouant avec sa paille. Estimer la force qu'il exercer avec sa paille pour le maintenir à la lisière de la surface de l'eau.

2) Le glaçon flotte dans un verre d'eau rempli à ras bord. Le verre va-t-il déborder lors de la fonte du glaçon ?

Exercice 16. Ballon gonflé à l'hélium 2 | 2

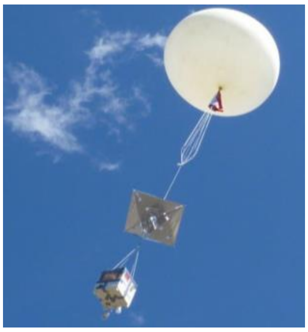
Masse molaire de l'air (mélange constitué principalement de diazote et de dioxygène) : $M = 29\ g.mol^{-1}$, Masse molaire de l'hélium : $M^* = 4\ g.mol^{-1}$. Dans les conditions usuelles de température et de pression ($20°C$ et $1\ bar$), volume molaire d'un gaz : $V_m = 24\ L.mol^{-1}$. Accélération de la pesanteur : $g = 9{,}8\ m.s^{-2}$.

1) Exprimer littéralement puis numériquement les masses volumiques ρ et ρ^* de l'air et de l'hélium dans les conditions usuelles de température et de pression.

Un enfant tient un ballon rempli d'hélium dans les conditions usuelles de température et de pression, de volume supposé fixe $= 20\ L$. On note $m_0 = 15\ g$ la masse de l'enveloppe du ballon et de la ficelle qui lui est attachée.

2) Faire le bilan des forces subies par l'ensemble ballon + ficelle.
3) Exprimer littéralement puis numériquement la tension de la ficelle.
4) Quelle est l'accélération initiale du ballon si l'enfant le lâche ?

Exercice 17. Ascension d'un ballon sonde IMPORTANT | 2 | 2



Un ballon sonde de masse m sert à emmener à haute altitude un appareillage en vue d'effectuer des mesures. L'enveloppe du ballon contient initialement n moles de dihydrogène (masse molaire M_{H2}). L'atmosphère est assimilée à un gaz parfait de masse molaire M_{air} en équilibre isotherme à la température T_0.

1) Quelle est la force résultante qui s'exerce sur le ballon ?
2) On pose $n_0 = \frac{m}{M_{air} - M_{H2}}$. Montrer que n_0 est la quantité minimale de dihydrogène assurant le décollement de celui-ci pour $m = 50$ kg et évaluer le volume V_0 correspondant du ballon à l'altitude nulle de départ pour une température de 273 K et une pression de 1 bar.
3) Le volume du ballon (initialement flasque) ne peut dépasser une valeur notée V_1 sans que celui-ci n'éclate. Montrer que cela implique l'existence d'une altitude z_1 maximale atteinte par le ballon que l'on exprimera en fonction de n, n_0, T_0, M_{air}, R, g, V_0 et V_1.

TD CHAPITRE MK.0-BIS : COMPLEMENTS DE MECANIQUE – FORCES CONSERVATIVES ET STATIQUE DES FLUIDES – ELEMENTS DE CORRECTION

■ APPLICATIONS DE COURS

Exercice 1.Energies potentielles usuelles

Energie potentielle de pesanteur : $M(m)$ subit, à la surface de la Terre, une force $m\vec{g} = -mg\vec{e}_z$ si Oz est l'axe vertical ascendant.

$\delta W = m\vec{g} \cdot \mathrm{d}\overrightarrow{\mathrm{OM}}$ avec $\mathrm{d}\overrightarrow{\mathrm{OM}} = dx\,\vec{e}_x + dy\,\vec{e}_y + dz\,\vec{e}_z$ soit $\vec{e}_z \cdot \mathrm{d}\overrightarrow{\mathrm{OM}} = 0 + 0 + dz$ **et** $m\vec{g} \cdot \mathrm{d}\overrightarrow{\mathrm{OM}} = -mg\,dz$

On peut mettre ceci sous forme d'une différentielle : $\delta W = m\vec{g} \cdot \mathrm{d}\overrightarrow{\mathrm{OM}} = -\mathrm{d}(mgz) = -\mathrm{d}(mgz + cte) = -\mathrm{d}E_p$

Exercice 2.Relation fondamentale de la statique des fluides

Démonstration attendue : bilan 1d sur une tranche mésoscopique de surface S et d'épaisseur dz plutôt que bilan sur une particule fluide qui utilise le gradient.

La tranche de fluide subit

- des forces pressantes latérales : résultante nulle, les forces se compensent deux à deux par symétrie, la pression ne dépendant que de z.
- la force pressante sur la face du bas : $+P(z)S\,\vec{e}_z$; sur la face du haut : $-P(z+dz)S\,\vec{e}_z$
- son poids $dm\vec{g} = -dm\,g\,\vec{e}_z = -\mu\,Sdz\,g\,\vec{e}_z$

A l'équilibre, $-\mu\,Sdz\,g\,\vec{e}_z + P(z)S\,\vec{e}_z - P(z+dz)S\,\vec{e}_z = \vec{0}$ D'où $dP = P(z+dz) - P(z) = -\mu g dz$

Exercice 3.Atmosphère isotherme

1) Système : particule fluide de volume $\boldsymbol{d\tau}$ contenant $\boldsymbol{dn}$ moles d'un gaz suppos » parfait

Equation d'état des gaz parfaits : $\boldsymbol{pd\tau = dnRT}$

Or $dn = \frac{dm}{M}$ soit $pd\tau = dnRT = RT\frac{dm}{M}$ et et $\boldsymbol{\rho = \frac{dm}{d\tau} = \frac{pM}{RT}}$ ou $P = \frac{\rho RT}{M}$

2) Expression de $\boldsymbol{p(z)}$

L'équation de la statique des fluides dans le champ de pesanteur uniforme s'écrit :

$$dp + \rho g\,dz = 0 \quad \text{avec } Oz \text{ verticale ascendante}$$

$$\text{Aussi : } \frac{dp}{dz} = -\rho(z)g = -\boldsymbol{\frac{pM}{RT}g}$$

Compte-tenu de l'expression de $\rho(T,p)$, on obtient : $dp + \boldsymbol{\frac{pM}{RT}}g\,dz = 0$

Méthode N°1 : On fait apparaitre une équation différentielle liant pression et altitude : $\frac{dp}{dz} + \boldsymbol{\frac{pM}{RT}}g = 0$

équation différentielle ressemble à des équations vues précédemment, la variable n'est plus t mais z.

On définit une hauteur caractéristique H (équivalent de la constante de temps τ) : $\frac{dp}{dz} + \boldsymbol{\frac{p}{H}} = 0$ $avec\ \boldsymbol{H = \frac{RT}{Mg}}$

$$\boldsymbol{p = A\exp\left(-\frac{z}{H}\right)}$$

C.I. : on note p_0 la pression au niveau du sol, et on trouve alors $A = p_0$

$$\boldsymbol{p = p_0\exp\left(-\frac{z}{H}\right)} \quad avec\ \boldsymbol{H = \frac{RT}{Mg}}$$

Méthode N° 2 : Séparation des variables : $dp = -\boldsymbol{\frac{pM}{RT}}g\,dz$ **soit** $\frac{dp}{p} = -\boldsymbol{\frac{Mg}{RT}}\,dz$

On intègre entre $z = 0$ (on note p_0 la pression au niveau du sol) et z quelconque (pression p) : $\int_{p_0}^{p} \frac{dp}{p} = \int_0^z - \frac{gM}{RT}\, dz$

$\ln\left(\frac{p}{p_0}\right) = -\frac{Mg}{RT} z$ soit $\boldsymbol{p = p_0 \exp\left(-\frac{Mgz}{RT}\right) = p_0 \exp\left(-\frac{z}{H}\right)}$

4) La densité de particules à l'altitude *z* est proportionnelle à la *p* (à *T* donnée), soit avec m_0 masse d'une particule :

$$n^*(z) = \frac{dN}{d\tau} = \frac{dm}{m_0 d\tau} = \frac{\rho}{m_0} = \frac{P(z)M}{RTm_0} = n_0^* \exp\left(-\frac{z}{H}\right)$$

Complément : on montre que le nombre de particules d'énergie potentielle $E_p(z)$ dans le champ de pesanteur est donc proportionnel au ***facteur de Boltzmann*** $k_B T$, avec $R = N_A k_B$:

$$n^*(z) = n_0^* \exp\left(-\frac{z}{H}\right) = n_0^* \exp(-m_0 g z / k_B T\ )$$

Ce facteur $k_B T$ intervient chaque fois qu'une répartition résulte de deux tendances opposées :

• **tendance à l'ordre** : ici, le champ de pesanteur seul tend à amener toutes les molécules au niveau d'énergie le plus bas (cas limite obtenu pour $T \to 0$)

• **tendance au désordre** : l'agitation thermique seule tend à uniformiser la répartition (cas limite obtenu pour $T \to \infty$)

Les niveaux *les plus peuplés* sont toujours les niveaux *de plus basse énergie* ; ici, puisque l'énergie augmente avec l'altitude, la densité de particules diminue lorsque *z* augmente, et l'air (donc l'oxygène) se raréfie en altitude.

Lorsque la *température augmente*, la tendance au désordre est amplifiée, les niveaux d'énergie supérieure sont davantage remplis.

5) Altitude $z_{1/2}$ telle que $P\left(z_{1/2}\right) = \frac{P_0}{2}$:

6) Hauteur caractéristique pour l'air isotherme à $\theta = 0°C$; A.N. pour $T = 273$ K, $H \approx 8$ km.

$z = 1\, m$	$p = p_0 \times \exp\,(-\frac{1}{8000})$	$\left\lvert\frac{\Delta p}{p_0}\right\rvert = 1 - \exp\left(-\frac{1}{8000}\right) \approx 0{,}012\%$
$z = 10\, m$	$p = p_0 \times \exp\,(-\frac{1}{800})$	$\left\lvert\frac{\Delta p}{p_0}\right\rvert = 1 - \exp\left(-\frac{1}{800}\right) \approx 0{,}12\%$
$z = 1\, km$	$p = p_0 \times \exp\,(-\frac{1}{8})$	$\left\lvert\frac{\Delta p}{p_0}\right\rvert = 1 - \exp\left(-\frac{1}{8}\right) \approx 11{,}7\%$

Exercices

Exercice 4.Je projette, tu projettes, il (elle) projette….

Dans la base cartésienne $\mathcal{B}\begin{pmatrix}\overrightarrow{u_x}\\ \overrightarrow{u_y}\end{pmatrix}$:

1) $\vec{T} = \begin{pmatrix}-T\sin\alpha \\ T\cos\alpha\end{pmatrix}$
2) $\vec{T} = \begin{pmatrix}-T\cos\alpha \\ T\sin\alpha\end{pmatrix}$
3) $\vec{T} = \begin{pmatrix}T\sin\alpha \\ -T\cos\alpha\end{pmatrix}$
4) $\vec{T} = \begin{pmatrix}T\sin\alpha \\ T\cos\alpha\end{pmatrix}$
5) $\vec{T} = \begin{pmatrix}T\sin\alpha \\ T\cos\alpha\end{pmatrix}$
6) $\vec{T} = \begin{pmatrix}-T\cos\alpha \\ -T\sin\alpha\end{pmatrix}$
7) $\vec{T} = \begin{pmatrix}-T\cos\alpha \\ -T\sin\alpha\end{pmatrix}$
8) $\vec{T} = \begin{pmatrix}-T\sin\alpha \\ T\cos\alpha\end{pmatrix}$
9) $\vec{T} = \begin{pmatrix}-T\sin\alpha \\ -T\cos\alpha\end{pmatrix}$
10) $\vec{T} = \begin{pmatrix}T\cos\alpha \\ T\sin\alpha\end{pmatrix}$
11) $\vec{T} = \begin{pmatrix}T\cos\alpha \\ T\sin\alpha\end{pmatrix}$
12) $\vec{T} = \begin{pmatrix}T\sin\alpha \\ T\cos\alpha\end{pmatrix}$
13) $\vec{T} = \begin{pmatrix}T\,\mathrm{sins}\,\alpha \\ -T\cos\alpha\end{pmatrix}$
14) $\vec{T} = \begin{pmatrix}-T\sin\alpha \\ T\cos\alpha\end{pmatrix}$
15) $\vec{T} = \begin{pmatrix}-T\cos\alpha \\ T\sin\alpha\end{pmatrix}$
16) $\vec{T} = \begin{pmatrix}T\sin\alpha \\ T\cos\alpha\end{pmatrix}$
17) $\vec{T} = \begin{pmatrix}-T\sin\alpha \\ -T\cos\alpha\end{pmatrix}$
18) $\vec{T} = \begin{pmatrix}T\cos\alpha \\ -T\sin\alpha\end{pmatrix}$

19) $\vec{T} = \begin{pmatrix} -T\cos\alpha \\ T\sin\alpha \end{pmatrix}$ 20) $\vec{T} = \begin{pmatrix} -T\cos\alpha \\ -T\sin\alpha \end{pmatrix}$

Exercice 5.Pression au fond de la fosse des iles Mariannes

$p = p_0 + \rho g h = 1065\ atm$ (avec $g = 9{,}8\ m.s^{-2}$ et $\rho = 10^3\ kg.m^{-3}$)

Deux critiques : $\rho_{eau\ salée} > \rho_{eau\ douce}$: $\rho_{eau\ salée} \approx 1{,}03.10^3\ kg.m^{-3}$

Avec une telle surpression, le modèle de phase condensée incompressible n'est plus très adapté ; la masse volumique de l'eau n'est pas uniforme et augmente avec la profondeur.

Exercice 6.Résolution de problème : Atmosphère parisienne *(d'après A. Leuridan)*

Modèle atmosphère isotherme à $T_0 = 290\ K$: $p = p_0 \exp\left(-\frac{Mgz}{RT}\right)$, avec $p_{bas} = p_0$ et $p_{haut} = p_0 \exp\left(-\frac{Mgh}{RT}\right)$

en notant h hauteur de la Tour. Cf. doc. : on peut prendre $h \approx 300\ m$.

$$\Delta p = p_{bas} - p_{haut} = p_0\left[1 - \exp\left(-\frac{Mgh}{RT}\right)\right]$$

A.N. : $\Delta p = 0{,}035\ bar = 3500\ Pa$; variation relative de 3,5%

Exercice 7.Chute d'un coquillage dans la mer

- ***Système*** *: coquillage de masse $m = \rho_c \frac{4\pi R^3}{3}$ étudié dans le référentiel $\Re$ terrestre supposé galiléen.*
- ***Bilan des forces :*** *force de frottement visqueux $\vec{F_S} = -6\pi\eta_e R\vec{v}$*

  Poussée d'Archimède $\vec{F_A}$ *exercée par la mer sur le coquillage :*

$$\vec{F_A} = -m_{eau,déplacé}\vec{g} = -\rho_e V_c \vec{g} = -\rho_e \frac{4}{3}\pi R^3 \vec{g}$$

  Poids $\vec{P}$ *du coquillage : $\vec{P} = m_c \vec{g} = \rho_c V_c \vec{g} = \rho_c \frac{4}{3}\pi R^3 \vec{g}$*

- *En appliquant le principe fondamental de la dynamique au système gouttelette dans le référentiel $\Re$ terrestre supposé galiléen :*

$$m\frac{d\vec{v}}{dt} = \rho_c \frac{4}{3}\pi R^3 \frac{d\vec{v}}{dt} = (\rho_c - \rho_e)\frac{4}{3}\pi R^3 \vec{g} - 6\pi\eta_e R\vec{v}$$

$$\rho_c \frac{4}{3}\pi R^3 \frac{d\vec{v}}{dt} + 6\pi\eta_e R\vec{v} = (\rho_c - \rho_e)\frac{4}{3}\pi R^3 \vec{g}$$

$$\frac{d\vec{v}}{dt} + \frac{9\eta_e}{2\rho_c R^2}\vec{v} = \frac{(\rho_c - \rho_e)}{\rho_c}\vec{g}$$

- *Soit $\vec{e_z}$ le vecteur unitaire de l'axe (Oz) descendant. En l'absence de vitesse initiale et avec une accélération initiale selon $\vec{e_z}$, la bille va avoir un mouvement initial selon l'axe vertical (Oz), sa vitesse initiale est alors selon cet axe. La force de frottement qui apparaît avec la vitesse est donc également selon cet axe. Ainsi, à tout instant, l'accélération et la vitesse sont selon $\vec{e_z}$; le mouvement est par conséquent rectiligne selon $\vec{e_z}$: $\overrightarrow{OM} = z\vec{e_z}$ et $\vec{v} = v\vec{e_z}$.*
- Par projection de l'équation différentielle du mouvement selon $\vec{e_z}$:

$$\boxed{\frac{dv}{dt} + \frac{9\eta_e}{2\rho_c R^2} v = \frac{\rho_c - \rho_e}{\rho_c} g}$$

C'est une équation différentielle linéaire du 1er ordre à coefficients constants avec un second membre constant, caractéristique d'un régime transitoire du 1er ordre.

En posant $\frac{1}{\tau} = \frac{9\eta_e}{2\rho_c R^2}$ tel que $\frac{dv}{dt} + \frac{1}{\tau} v = \frac{\rho'}{\rho_c} g$, on introduit le temps caractéristique τ du régime transitoire :

$$\boxed{\tau = \frac{2\rho_c R^2}{9\eta_e}}$$

Lorsque la bille atteint sa vitesse limite v_{lim}, $\frac{dv_{lim}}{dt} = 0$, soit dans l'équation différentielle :

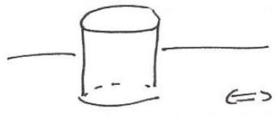
$$\frac{\mathrm{d}v_{lim}}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{\tau}\, v_{lim} = \frac{\rho'}{\rho_c}\mathrm{g} = 0 + \frac{1}{\tau}\, v_{lim}$$

Soit $\boxed{v_{lim} = \tau\frac{\rho'}{\rho_c}\mathrm{g} = \frac{2R^2}{9\eta_e}\rho'\mathrm{g}}$ et $\boxed{\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{\tau}\, v = \frac{1}{\tau}v_{lim}}$

Exercice 8.L'iceberg

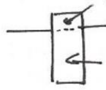
1) Partie immergé d'un iceberg :

Soit ρ_g la masse volumique de l'eau sous forme de glace et ρ_L celle de l'eau liquide.



$\Longleftrightarrow$ $\vec{u_z}$

Ⓗ cylindre



V_e = volume émergé

V_i = volume immergé

$V = V_e + V_e$ = volume total

masse m = masse totale

- ***Système** : iceberg étudié dans le référentiel $\mathfrak{R}$ terrestre supposé galiléen.*
- ***Bilan des forces :***

  ***Poussée d'Archimède $\overrightarrow{F_A}$** exercée par la mer sur l'iceberg (on négligera la poussée d'Archimède exercée par l'air) :*

  $$\overrightarrow{F_A} = -\, m_{eau,déplacé}\vec{g} = -\,\rho_e V_i \vec{g} = -\rho_e h_i S \vec{g}$$

  ***Poids $\vec{P}$** de l'iceberg :* $\vec{P} = m\vec{g} = \rho_g V\vec{g} = \rho_g hS\vec{g}$

- *En appliquant le principe fondamental de la dynamique au système iceberg dans le référentiel $\mathfrak{R}$ terrestre supposé galiléen :*

$$m\frac{d\vec{v}}{dt} = \left(\rho_g h - \rho_e h_i\right)S\vec{g} = \vec{0}$$

- *Soit $\vec{e_z}$ le vecteur unitaire de l'axe (Oz) ascendant. Par projection de l'équation du mouvement selon $\vec{e_z}$:*

$$\boxed{0 = \rho_g h - \rho_e h_i} \quad \text{soit} \quad \frac{h_i}{h} = \frac{\rho_g}{\rho_e} = 92\%$$

Exercice 9.Ascension d'un ballon-sonde

Système : {ballon sonde + appareils de mesure}, étudié dans le référentiel Terrestre suppose galiléen.

BAME : - poids $\vec{P} = m_{tot}\vec{g} = (m_A + m_B + \rho_{He}V)\vec{g}$ où V est le volume d'Hélium, soit le volume du ballon;

- poussée d'Archimède $\vec{\Pi} = -m_{air,déplacé}\vec{g}$ avec $m_{air,déplacé} \approx \rho_{air}V$ où V est le volume du ballon (on néglige le volume de la nacelle devant le volume du ballon)
- Réaction du sol sur la nacelle du ballon : $\overrightarrow{R_N}$ lorsque le ballon touche encore le sol

PFD : $m_{tot}\vec{a} = \vec{P} + \vec{\Pi} + \overrightarrow{R_N} = (m_A + m_B + \rho_{He}V - \rho_{air}V)\vec{g} + \overrightarrow{R_N}$

Lorsque le ballon repose encore sur le sol, $\vec{a} = \vec{0}$; projection sur l'axe vertical ascendant (Oz) :

$$m_{tot}\ddot{z} = R_N - (m_A + m_B + \rho_{He}V - \rho_{air}V)g = 0$$

Soit $R_N = (m_A + m_B + \rho_{He}V - \rho_{air}V)g$

Pour qu'il y ait décollage du ballon, il faut que la reaction s'annule.

Le ballon ne décolle pas pour $R_N = (m_A + m_B + \rho_{He}V - \rho_{air}V)g > 0$, soit $m_A + m_B + (\rho_{He} - \rho_{air})V > 0 \quad \Leftrightarrow$ $(\rho_{air} - \rho_{He})\, V < m_A + m_B \quad \Leftrightarrow \quad V < \frac{m_A + m_B}{\rho_{air} - \rho_{He}}$

Condition de décollage : $V > \frac{m_A + m_B}{\rho_{air} - \rho_{He}} = 4{,}5\ m^3$.

■ VRAI OU FAUX *

1) Vrai ; 2) Vrai ; 3) Faux ; 4) Faux ; 5) Vrai ; 6) Faux ; 7) Faux ; 8) Vrai ; 9) Faux ; 10) Vrai ; 11) Faux ; 12) Faux ; 13) Faux ; 14) Vrai ; 15) Vrai ; 16) Vrai

■ EXERCICES COMPLEMENTAIRES

Exercice 10. Energie potentielle d'une somme de forces conservatives

Exercice 11. Détermination de la force exercée par un ressort

Exercice 12. Expression du poids à partir de l'énergie potentielle de pesanteur

$$F_x = -\frac{\partial E_p}{\partial x} = -\frac{\partial(mgz)}{\partial x} = 0$$
$$F_y = -\frac{\partial E_p}{\partial y} = -\frac{\partial(mgz)}{\partial y} = 0$$
$$F_z = -\frac{\partial E_p}{\partial z} = -\frac{\partial(mgz)}{\partial z} = -mg$$

On retrouve donc la force donnée plus haut : $\vec{F} = -mg\vec{e}_z$

Recherche directe possible :

On cherche $\vec{F}$ telle que $\vec{F}\cdot d\vec{M} = -d(mgz)$ Soit $\vec{F}\cdot d\vec{M} = -mg\,dz$

On décompose les deux vecteurs dans la base cartésienne, chacun d'eux a trois composantes :

$$\vec{F} = \begin{vmatrix} F_x \\ F_y \\ F_z \end{vmatrix} \text{ et } d\vec{M} = \begin{vmatrix} dx \\ dy \\ dz \end{vmatrix}$$

Le produit scalaire est donc : $\vec{F}\cdot d\vec{M} = F_x dx + F_y dy + F_z dz$

à identifier à $\vec{F}\cdot d\vec{M} = -mg\,dz$

On en déduit $F_x = F_y = 0$ et $F_z = -mg$

On retrouve donc la force donnée plus haut : $\vec{F} = -mg\boldsymbol{\vec{e}_z}$

Exercice 13. Résolution de problème

Pression exercée par le poids : éléphant $m_{él} \approx 5\ t$ et $S \approx$ disque de 30 cm de diamètre ; femme $m_f \approx 60$ kg et $S \approx$ disque de 1 cm^2 supportant environ ¼ du poids de la femme

$$p_{éléphant} \approx \frac{m_{él}g}{4S} \approx 2\ bar; \qquad p_{talons} \approx \frac{mg}{4S} \approx 15\ bar\ !$$

Exercice 14. Atmosphère à gradient de température

1) Système : particule fluide de volume $\boldsymbol{d\tau}$ contenant $\boldsymbol{dn}$ moles d'un gaz suppos » parfait

Equation d'état des gaz parfaits : $\boldsymbol{pd\tau = dnRT}$

Or $dn = \frac{dm}{M}$ soit $pd\tau = dnRT = RT\frac{dm}{M}$ et et $\boldsymbol{\rho = \frac{dm}{d\tau} = \frac{pM}{RT}}$ ou $P = \frac{\rho RT}{M}$

2) Expression de $\boldsymbol{p(z)}$

L'équation de la statique des fluides dans le champ de pesanteur uniforme s'écrit :

$$dp + \rho g\,dz = 0 \quad \text{avec } Oz \text{ verticale ascendante.}$$

Compte-tenu de l'expression de $\rho(T,p)$, on obtient : $dp + \frac{\boldsymbol{pM}}{\boldsymbol{RT(z)}} g\,dz = 0$

Séparation des variables : $\int_{P_0}^{P(z)} \frac{dp}{p} = -\frac{\boldsymbol{Mg}}{\boldsymbol{RT_0}} \int_{z=0}^{z} \frac{dz}{1-az}$ **soit en posant** $H = \frac{RT_0}{Mg}$ hauteur caractéristique

$$\int_{P_0}^{P(z)} \frac{dp}{p} = -\frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{H}} \int_{z=0}^{z} \frac{dz}{1-az}$$

Or $\frac{dz}{1-az} = -\frac{1}{a}\frac{d(1-az)}{1-az}$ **(astuce permettant de faire apparaitre une forme** $\frac{dX}{X}$ **avec** $1-az = X)$ **Soit**

Méthode N°1 : $\int_{P_0}^{P(z)} \frac{dp}{p} = -\frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{H}} \int_{z=0}^{z} \frac{dz}{1-az} = \frac{1}{Ha}\int_{X=1-a\times 0=1}^{X=1-az} \frac{d(1-az)}{1-az}$

Méthode N°2 : $\int_{P_0}^{P(z)} \frac{dp}{p} = -\frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{H}} \int_{z=0}^{z} \frac{dz}{1-az} = \frac{1}{Ha}\int_{z=0}^{z} \frac{-adz}{1-az}$ **de façon à faire apparaître une forme** $\frac{u'}{u}$ **avec ici** $u(z) = 1 - az$

Finalement $\ln\left(\frac{P(z)}{P_0}\right) = \frac{1}{HA}\ln(1-az) = \ln(1-az)^{\beta}$ **avec** avec $\beta = \frac{Mg}{RT_0 a} = \frac{1}{Ha}$

$P(z) = P_0(1-az)^{\frac{Mg}{RT_0 a}}$ avec $\beta = \frac{Mg}{RT_0 a} = \frac{1}{Ha}$, $H = \frac{RT_0}{Mg}$ hauteur caractéristique

3) $\mu = \frac{PM}{RT} = \frac{P_0 M}{RT_0(1-az)}(1-az)^{\beta} = \mu_0(1-az)^{\beta-1}$ avec $\mu_0 = \frac{P_0 M}{RT_0} = \mu(z=0)$

Exercice 15. Glaçon dans un verre

1) Soient ρ_{glace} la masse volumique du glaçon étudié, et $V_{glaçon}$ son volume. En supposant en première approximation un glaçon de forme cylindrique, de hauteur *h* et de rayon *R*, on a $V_{glaçon} = \pi R^2 h$.

Soit $\vec{F}$ la force exercée verticalement sur le glaçon par la paille.

1) Nouveau bilan des forces : Poids $\vec{P} = \rho_{glace}\pi R^2 h \vec{g}$
Tout le glaçon immergé : Poussée d'Archimède $\vec{\Pi} = -\rho_L \pi R^2 h \vec{g}$
Force $\vec{F}$
à l'équilibre : $\sum \vec{F} = \vec{0} = (\rho_{glace} - \rho_L)\pi R^2 h \vec{g} + \vec{F}$

D'où $\boxed{\vec{F} = \left(\rho_L - \rho_{glace}\right)\pi R^2 h \vec{g}}$.

Ordres de grandeur : hauteur du glaçon : $h \approx 3\ cm$; $R \approx 1\ cm$; $g \approx 9{,}8\ m.s^{-2}$;

De plus, les 9/10 d'un iceberg sont immergés car la masse volumique de la glace ≈ 9/10 de celle de l'eau,

d'où $\rho_L - \rho_{glace} \approx \frac{1}{10}\rho_L \approx 100\ kg.m^{-3}$. A.N. : $\underline{\boldsymbol{F \approx 9.10^{-3} N.}}$

2) Pour un glaçon qui flotte : idem, $V_i \simeq 0{,}92\ V$ avec $V_i = \frac{\rho_g}{\rho_L} V$
(masse totale m)

Lorsque le glaçon fond, il occupe un volume V_f.
Si $V_f < V_i$, le niveau d'eau dans le verre diminue
$V_f > V_i$, le verre déborde
$V_f = V_i$: rempli à ras bord, pas de modif.

Le glaçon ayant totalement fondu, V_f correspond à 1 masse m d'eau liquide, soit $m = \rho_L V_f = \rho_g V$ or $\rho_g V = \rho_L V_i$
soit $\rho_L V_f = \rho_L V_i \iff \boxed{V_f = V_i}$ rien ne se passe !

Exercice 16. Ballon gonflé à l'hélium

$\rho = \frac{M}{V_m} = 1{,}21\ kg.m^{-3}$; $\rho^* = 0{,}17\ kg.m^{-3}$;

$T = (m - m_0 - m^*)\ g = (\rho V - m_0 - \rho^* V)\ g = 5{,}7.10^{-2} N$; $a_0 = \frac{T}{m^* + m_0} = 3{,}2\ m.s^{-2}$.

Exercice 17. Ascension d'un ballon sonde

1) **Bilan des actions mécaniques extérieures** :
   Poids (masse du ballon, des instruments etc. et masse du dihydrogène à l'intérieur du ballon) : $\vec{P} = (m + nM_{H2})\vec{g}$,
   poussée d'Archimède (l'opposé du poids du fluide déplacé par le ballon, ici de l'air occupant le volume du ballon en son absence) : $\vec{\pi} = -nM_{air}$ (Il s'agit bien du même nombre de moles pour le dihydrogène et l'air, car gaz parfaits occupant le même volume aux mêmes pression et température).

   réaction normale $\vec{N}$du support, nulle après décollage

   Résultante $\vec{F} = (m + n(M_{H2} - M_{air}))\vec{g} + \vec{N} = (N - (m + n(M_{H2} - M_{air}))g)\overrightarrow{e_z}$

2) Pour assurer que le ballon ne décolle pas, il faut $N > 0$; soit avec à ce moment là une accélération nulle :
   $N > 0 \Leftrightarrow (m + n(M_{H2} - M_{air}))g > 0$
   Le ballon décolle donc pour $m + n(M_{H2} - M_{air}) \leq 0$ soit à la limite pour $n_0 = \frac{m}{M_{air} - M_{H2}}$

   G.P. : $V_0 = \frac{n_0 R T_0}{P_0}$ A.N. : $V_0 = 42\ m^3$

3) Atmosphère isoT : cf. démo de cours : $P = P_0 \exp\left(-\frac{z}{H}\right)$ avec $H = \frac{RT_0}{M_{air} g}$. Le ballon étant fermé, il contient un nombre de moles de gaz constant. De plus, dans le cadre du modèle atmosphère isotherme, la température est constante. Modèle gaz parfait : $PV = nRT = cte$, donc lorsque la pression diminue le volume augmente jusqu'à atteindre le volume maximal d'où $\ln\left(\frac{V_1}{V_0}\right) = \frac{z_1}{H}$