

b) Déterminer  $p_n$ .

c) Déterminer le rayon de convergence et le domaine de définition de  $\sum p_n x^n$ .

**1352.** Soit  $p \in \mathbb{N}$ . On dispose de  $p+1$  urnes numérotées de 0 à  $p$  contenant des boules rouges et blanches. La proportion de boules rouges de l'urne numéro  $j$  est  $\frac{j}{p}$ . On choisit au hasard une urne, on effectue  $n$  tirages avec remise dans cette urne et l'on note  $X_n$  le nombre de boules rouges piochées.

a) Loi et espérance de  $X_n$ .

b) Pour  $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$ , calculer  $\lim_{p \rightarrow +\infty} \mathbf{P}(X_n = k)$ . Commenter.

**1353.** Soient  $X$  et  $Y$  deux variables aléatoires indépendantes,  $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$  et  $Y \sim \mathcal{G}(p)$ . On pose  $M = \begin{pmatrix} X & Y \\ Y & X \end{pmatrix}$ .

a) Donner  $\mathbf{E}(\text{rg}(M))$ .

b) Déterminer l'espérance et la variance de la plus grande valeur propre de  $M$ .

### Autres Écoles – MP

#### Algèbre

**1354.** [IMT] Soient  $a$  et  $n$  deux entiers supérieurs ou égaux à 2. Montrer que si  $a^n - 1$  est premier, alors  $a = 2$  et  $n$  est un nombre premier.

**1355.** [IMT] Résoudre l'équation  $x^2 + x + \bar{1} = \bar{0}$  dans  $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$  et dans  $\mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$ .

**1356.** [IMT] Soit  $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$  telle que  $A^2 = 0$  et  $A \neq 0$ .

Montrer que  $A$  est semblable à  $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ .

**1357.** [IMT]

a) Soient  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $u, v \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$  nilpotents et non nuls tels que  $u \circ v = v \circ u$ . Montrer que  $\text{rg}(u \circ v) < \text{rg}(v)$ .

b) Soient  $u_1, \dots, u_n \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$  nilpotents et commutant deux à deux.

Montrer que  $u_1 \circ \dots \circ u_n = 0$ .

**1358.** [CCINP] Soit  $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$  telle que  $M^2 + M = J$  où  $J = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ .

a) Déterminer les valeurs propres de  $J$ . En déduire les valeurs propres éventuelles de  $M$ .

b) Trouver un polynôme annulateur de  $M$ . Montrer que  $M$  est diagonalisable.

c) Déterminer les matrices  $M$  solutions.

**1359.** [IMT] Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur  $(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4$  pour que la matrice  $\begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 2 & c \\ 0 & 0 & d \end{pmatrix}$  soit diagonalisable.

**1360.** [IMT] Pour tout  $c \in \mathbb{R}$ , on considère la matrice  $A(c) = \begin{pmatrix} -c & 1 & -1 \\ 1 & 1-c & 1 \\ -1 & -1 & -c \end{pmatrix}$ .

a) La matrice  $A(c)$  est-elle diagonalisable ?

b) Trouver  $P \in GL_3(\mathbb{R})$  telle que la matrice  $P^{-1}A(c)P$  soit triangulaire supérieure.

**1361.** [IMT] Soient  $a > 0$  et  $A = \begin{pmatrix} 0 & -a & a^2 \\ 1 & 0 & -a \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$  et  $u = \begin{pmatrix} a \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ .

a) Calculer  $Au$ . Que peut-on en déduire ?

b) Calculer  $\det(A)$ . La matrice  $A$  est-elle inversible ?

c) Déterminer le spectre réel de  $A$ .

d) Trouver une condition nécessaire et suffisante pour que  $A$  soit diagonalisable.

**1362.** [IMT] Déterminer les valeurs propres de  $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & \cdots & 1 \\ 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & & \vdots \\ 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ .

**1363.** [IMT] Soit  $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ . Déterminer les valeurs propres

de  $A$ , ainsi que la dimension de ses sous-espaces propres.

**1364.** [IMT] Soit  $n \geq 2$ . Soit  $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$  avec  $a_{i,j} = -1$  si  $i > j$ ,  $a_{i,j} = 1$  si  $i < j$  et  $a_{i,i} = 0$ . Soit  $J \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$  dont tous les coefficients sont égaux à 1.

a) Soit  $\lambda \in \mathbb{C}$ . Montrer que  $P : x \mapsto \det(\lambda I_n - A - xJ)$  est polynomiale de degré au plus 1.

b) En déduire  $\chi_A$ .

c) Étudier la diagonalisabilité de  $A$ .

**1365.** [CCINP] Soient  $n \in \mathbb{N}^*$  et  $A, B \in \mathbb{R}_n[X]$  non nuls. On considère l'application  $f$  qui à  $P \in \mathbb{R}_n[X]$  associe le reste de la division euclidienne de  $AP$  par  $B$ .

a) Montrer que  $f$  est un endomorphisme. Est-ce un automorphisme ?

b) On note  $p$  le degré de  $B$  et  $\lambda_1, \dots, \lambda_p$  ses racines.

i) Montrer que 0 est valeur propre de  $f$ .

ii) Soit  $\alpha \in \mathbb{R}^*$  une valeur propre de  $f$ . Montrer qu'il existe  $i \in \llbracket 1, p \rrbracket$  tel que  $A(\lambda_i) = \alpha$ .

iii) L'endomorphisme  $f$  est-il diagonalisable ?

**1366.** [IMT] Soit  $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ . Pour quels réels  $a$  la suite  $(a^n A^n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge-t-elle ?

**1367.** [IMT] Soient  $E$  un espace vectoriel de dimension finie et  $\alpha \neq 0$ . Soient  $f, g \in \mathcal{L}(E)$  telles que  $f \circ g - g \circ f = \alpha f$ .

a) Donner une expression simple de  $f^n \circ g - g \circ f^n$ .

b) En s'intéressant à  $h \mapsto h \circ g - g \circ h$ , montrer que  $f$  est nilpotente.

**1368.** [CCINP] Soit  $A = \left( \frac{i}{j} \right)_{1 \leq i, j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ .

a) La matrice  $A$  est-elle inversible ?

b) Trouver un polynôme annulateur de  $A$ .

c) Montrer que  $A$  est diagonalisable et donner ses valeurs propres.

d) Donner les sous-espaces propres de  $A$ .

e) Soit  $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  commutant avec  $A$ . Montrer que  $\text{Ker}(A)$  et  $\text{Im}(A)$  sont stables par  $M$ .

**1369.** [IMT] Soient  $E = \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ ,  $A, B \in E \setminus \{0\}$  et  $f : M \in E \mapsto \text{Tr}(AM) B$ .

a) Quels sont les éléments propres de  $f$  ? L'endomorphisme  $f$  est-il diagonalisable ?

b) On note  $\mathcal{C} = \{k \in \mathbb{R}^+ ; \forall M \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R}), \text{Tr}(f(M)^2) \leq k \text{Tr}(M^2)\}$ . Montrer que  $\mathcal{C} \neq \emptyset$  et déterminer son minimum.

**1370.** [CCINP] Soit  $f \in \mathcal{L}(\mathbb{C}^n)$ .

a) On suppose que  $f^2$  est inversible et diagonalisable. À l'aide d'un polynôme annulateur de  $f$ , montrer que  $f$  est diagonalisable.

b) On suppose que  $f^2$  n'est plus inversible, que  $f^2$  est diagonalisable et que  $\text{Ker } f = \text{Ker } f^2$ . Montrer que  $f$  est diagonalisable.

**1371.** [IMT] Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$  de rang 1. Montrer que  $A$  est diagonalisable si et seulement si  $\text{tr}(A) \neq 0$ .

**1372.** [CCINP] Soit  $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$  vérifiant  $f^3 + f = 0$  et  $f \neq 0$ .

a) Montrer que  $\mathbb{R}^3 = \text{Ker } f \oplus \text{Ker}(f^2 + \text{id})$ .

b) Soit  $x \in \text{Ker}(f^2 + \text{id})$  non nul. Montrer que  $(x, f(x))$  est libre.

c) Montrer qu'il existe une base de  $\mathbb{R}^3$  dans laquelle la matrice de  $f$  est  $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ .

d) Construire  $u \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$  tel que  $u^2 = f$ .

**1373.** [IMT] Donner toutes les matrices  $M$  de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  vérifiant  $M^5 = M^2$  et  $\text{Tr}(M) = n$ .

**1374.** [Dauphine] Soient  $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{K}$  et la matrice  $A = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & a_1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & a_{n-1} \\ a_1 & \cdots & a_{n-1} & a_n \end{pmatrix}$ .

On suppose  $a_1$  et  $a_n$  non nuls.

- Pour  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ , montrer que  $A$  est diagonalisable et trouver ses valeurs propres.
- Pour  $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ , justifier que  $A$  n'est pas toujours diagonalisable avec un contre-exemple pour  $n = 2$ .

**1375.** [CCINP] Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  la matrice d'un projecteur de rang  $p \in \llbracket 1, n \rrbracket$ .

On pose  $B = \begin{pmatrix} A & 0 \\ A & -A \end{pmatrix}$

- La matrice  $B$  est-elle diagonalisable? *Ind.* On pourra calculer  $B^3$ .
- Calculer les sous-espaces propres éventuels de  $B$  et donner leur dimension en fonction de  $n$  et  $p$

**1376.** [Navale] On munit l'espace vectoriel  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  du produit scalaire canonique. Calculer la distance de la matrice  $M = (1)_{1 \leq i, j \leq n}$  à l'espace  $F$  des matrices de trace nulle.

**1377.** [Navale] On munit  $\mathcal{C}^0([0, 1], \mathbb{R})$  du produit scalaire  $\langle f, g \rangle = \int_0^1 f(t)g(t)dt$ . On pose  $e_1 : t \mapsto 1$ ,  $e_2 : t \mapsto t$  et  $F = \text{Vect}(e_1, e_2)$ . Calculer la distance de  $\Phi : t \mapsto t^2$  à l'espace  $F$ .

**1378.** [IMT] Soient  $p, q \in \mathbb{N}^*$  et  $M \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{R})$ .

- Montrer que, pour tout  $\lambda \neq 0$ ,  $\lambda \in \text{Sp}(MM^T) \iff \lambda \in \text{Sp}(M^T M)$ .
- Montrer que, pour  $\lambda \neq 0$ , les dimensions des espaces propres de  $MM^T$  et  $M^T M$  sont les mêmes.
- Relier les polynômes caractéristiques de  $MM^T$  et de  $M^T M$ .

**1379.** [CCINP] On munit  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  de son produit scalaire canonique.

- Montrer que  $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$  et  $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$  sont supplémentaires orthogonaux

**b)** Déterminer la distance de  $M = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$  à  $\mathcal{S}_3(\mathbb{R})$ .

**1380.** [CCINP] On munit  $\mathbb{R}^n$  de son produit scalaire canonique, et on fixe  $v \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ .

- On pose  $H_v = I_n - 2 \frac{v^T v}{\|v\|^2}$ . Montrer que  $H_v \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ .
- Quelle est la nature de l'endomorphisme de  $\mathbb{R}^n$  canoniquement associé à  $H_v$ ?
- Soient  $x, y \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$  tels que  $\|x\| = \|y\|$ .
  - Montrer que les vecteurs  $x - y$  et  $x + y$  sont orthogonaux.
  - Montrer qu'il existe  $V \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$  telle que  $Vx = y$ .

**1381.** [IMT] Soit  $E$  l'espace des fonctions continues et  $2\pi$ -périodiques de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$ .

**a)** Montrer que l'application qui à  $(f, g) \in E^2$  associe  $\langle f, g \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} fg$  définit un produit scalaire sur  $E$ .

**b)** Déterminer le projeté orthogonal de  $x \mapsto \sin^2(x)$  sur  $\text{Vect}(x \mapsto \cos(x), x \mapsto \cos(2x))$ .

**1382.** [CCINP] On munit  $E = \mathbb{R}^n$  du produit scalaire canonique  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ . Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ . On note  $u$  l'endomorphisme de  $\mathbb{R}^n$  canoniquement associé à  $A$  et  $w$  celui associé à  $A^T$ .

**a)** Montrer que :  $\forall x, y \in E, \langle u(x), y \rangle = \langle x, w(y) \rangle$ .

**b)** Montrer que, si un sous-espace  $F$  est stable par  $u$ , alors  $F^\perp$  est stable par  $w$ .

**c)** On choisit ici  $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ .

**i)** Calculer  $\chi_A$ . Les matrices  $A^T$  et  $A$  sont-elles diagonalisables dans  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  ?

**ii)** Déterminer les sous-espaces stables par  $u$ .

**1383.** [Navale] Soit  $n \geq 2$ . Soit  $F : (A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})^2 \mapsto \text{tr}(A) \text{tr}(B) - \text{tr}(AB)$ .

On note  $E_{i,j}$ , pour  $1 \leq i, j \leq n$ , les matrices élémentaires de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ .

**a)** Calculer  $\text{tr}(E_{i,j}A)$  pour toute  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  et tout  $(i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$ .

**b)** Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ . On suppose que  $\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), F(A, M) = 0$ . Montrer que  $A = 0$ .

**c)** Soit  $u$  un endomorphisme de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ . Montrer que, si  $v : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  est telle que :  $\forall A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), F(u(A), B) = F(A, v(B))$ , alors  $v$  est linéaire.

**d)** L'application  $F$  définit-elle un produit scalaire ?

**1384.** [IMT] Soit  $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$  telle que  $A^2 = A^T$  avec  $A \neq 0$ .

**a)** Trouver un polynôme annulateur non nul de  $A$ .

**b)** Lorsque  $0 \in \text{Sp}(A)$ , trouver  $\text{Sp}(A)$  et montrer que  $A$  est orthogonalement semblable à la matrice  $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ .

**1385.** [CCINP] Soient  $E$  un espace euclidien de dimension  $n \geq 2$  et  $f \in \mathcal{S}(E)$ . On note  $a$  (resp.  $b$ ) la plus petite (resp. la plus grande) valeur propre de  $f$ .

**a)** Montrer que  $a \|x\|^2 \leq \langle f(x), x \rangle \leq b \|x\|^2$  pour tout  $x \in E$ .

**b)** Soit  $r \in \mathbb{R}^+$  tel que, pour tout  $x \in E, \langle f(x), x \rangle \leq r \|x\|^2$ . Montrer que  $b \leq r$ .

**c)** Soit  $k \in \mathbb{R}$ . On note  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  la matrice définie par  $a_{i,i} = k, a_{i,j} = 1$  si  $i = j \pm 1, a_{i,j} = 0$  sinon. Montrer que la plus grande valeur propre de  $A$  est inférieure ou égale à  $k + 2$ .

**1386.** [IMT] Soient  $E$  un espace euclidien et  $a, b \in E$  unitaires et non colinéaires. On considère  $\varphi : x \mapsto \langle a, x \rangle a + \langle b, x \rangle b$ . Montrer que  $\varphi$  est un endomorphisme autoadjoint et donner ses éléments propres.

**1387.** [IMT] Soient  $E$  un espace euclidien de dimension  $n \geq 3$  et deux vecteurs  $a, b$  de  $E$  non colinéaires. On considère l'endomorphisme  $f : x \in E \mapsto \langle a, x \rangle a + \langle b, x \rangle b$ . Déterminer  $\text{Ker}(f)$  et  $\text{Im}(f)$  puis montrer que  $f$  est autoadjoint.

**1388.** [IMT] Soient  $M, N \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ . Montrer que :  $0 \leq \text{tr}(MN) \leq (\text{tr } M)(\text{tr } N)$ .

**1389.** [IMT] On munit  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  du produit scalaire usuel. Soit  $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ , de polynôme caractéristique noté  $\chi_A$ . Montrer qu'il existe  $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$  tels que  $\chi_A = \prod_{k=1}^n (X - \lambda_k)$  et

$$\text{que } \|A\|^2 = \sum_{k=1}^n \lambda_k^2.$$

**1390.** [IMT] Soient  $E$  un espace euclidien de dimension  $n$  et  $F$  un sous-espace de dimension  $r \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$ . Soit  $p$  le projecteur orthogonal sur  $F$ . On note  $\mathcal{C} = \{f \in \mathcal{S}(E), p \circ f = f \circ p\}$ .

a) Soit  $f \in \mathcal{S}(E)$ . Montrer que  $f \in \mathcal{C}$  si et seulement si  $f(F) \subset F$ .

b) Soit  $f \in \mathcal{S}^+(E)$ . Montrer que  $f^2 = p$  si et seulement si  $f = p$ .

### Analyse

**1391.** [CCINP] On note  $E = \mathbb{C}[X]$  et, pour  $P = \sum_{k \geq 0} a_k X^k$ ,  $\|P\| = \sup_{k \geq 0} |a_k|$ .

a) Montrer que  $\|\cdot\|$  est une norme de  $E$ .

b) Soit  $b \in \mathbb{C}$ . On souhaite étudier la continuité de l'application  $f : P \in E \mapsto P(b) \in \mathbb{C}$ .

i) Montrer que, si  $|b| < 1$ , alors  $f$  est continue.

ii) Étudier la continuité de  $f$  lorsque  $|b| = 1$  à l'aide des polynômes  $P_n = \sum_{k=0}^n \bar{b}^k X^k$ .

iii) Montrer que, si  $|b| > 1$ , alors  $f$  n'est pas continue.

**1392.** [IMT] On munit  $E = \mathcal{C}^0([0, 1], \mathbb{R})$  la norme  $\|\cdot\|_\infty$ .

Si  $f \in E$ , on pose  $u(f) : x \in [0, 1] \mapsto \int_0^1 \inf(x, t) f(t) dt$ . Montrer que  $u$  est un endomorphisme continu et calculer sa norme subordonnée.

**1393.** [IMT] Soient  $(u_n)_{n \geq 0}$ ,  $(v_n)_{n \geq 0}$ ,  $(w_n)_{n \geq 0}$  trois suites complexes.

On suppose que, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , 
$$\begin{cases} u_{n+1} = 2u_n + v_n + w_n \\ v_{n+1} = u_n - v_n + w_n \\ w_{n+1} = u_n + v_n - w_n \end{cases} .$$

Donner une condition nécessaire et suffisante sur  $(u_0, v_0, w_0)$  pour que les trois suites convergent.

**1394.** [IMT] Soient  $a, b, c \in \mathbb{R}$ . Pour  $n \in \mathbb{N}^*$ , on pose  $u_n = a \ln(n) + b \ln(n+1) + c \ln(n+2)$ .

À quelles conditions sur  $a, b, c$  la série  $\sum u_n$  converge-t-elle ?

**1395.** [IMT] On pose, pour  $n \geq 3$ ,  $u_n = \ln \left( \frac{n^4 - 2n^3 + 2n - 1}{n^4 - 2n^3} \right)$ . Étudier la nature de la série de terme général  $u_n$  et calculer sa somme en cas de convergence.

**1396.** [IMT] Soit  $\sigma : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  telle que  $\sigma(3n) = 4n$ ,  $\sigma(3n+1) = 4n+2$  et  $\sigma(3n+2) = 2n+1$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ .

a) Montrer que  $\sigma$  est bijective.

**b)** On pose  $u_n = \frac{(-1)^n}{n}$  et  $v_n = u_{\sigma(n)}$  pour tout  $n \geq 1$ . Montrer que les séries  $\sum u_n$  et  $\sum v_n$  sont convergentes, et calculer leurs sommes.

**1397.** [IMT] **a)** Décomposer en éléments simples la fraction rationnelle  $\frac{1}{X^2(X+1)}$ .

**b)** Pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , on pose :  $u_n = \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{k^2}$ .

*i)* Déterminer la nature de la série de terme général  $u_n$ .

*ii)* Déterminer la nature de la série de terme général  $u_n - \frac{1}{n}$ .

*iii)* Déterminer la nature de la série de terme général  $(n u_n - 1)$ .

**1398.** [CCINP] On considère la suite  $(u_n)_{n \geq 0}$  définie par  $u_0 \in ]0, \pi/2[$  et, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $u_{n+1} = \sin(u_n)$ .

**a)** Montrer que la suite  $(u_n)$  converge et donner sa limite.

**b)** Étudier la nature de la série  $\sum (u_{n+1} - u_n)$ . En déduire la nature de la série  $\sum u_n^3$ .

**c)** Étudier la nature de la série  $\sum \ln\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right)$ . En déduire la nature de la série  $\sum u_n^2$ .

**1399.** [CCINP] On se donne deux réels  $\alpha$  et  $\beta$  vérifiant  $0 < \beta \leq 1 < \alpha$ .

On pose, pour  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha}$ ,  $S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^\beta}$  et  $\mu_n = \frac{R_n}{S_n}$ .

**a)** Montrer que  $R_n$  est définie.

**b)** Donner un équivalent de  $R_n$  puis de  $S_n$ . Étudier la nature des séries  $\sum \mu_n$  et  $\sum (-1)^n \mu_n$ .

**1400.** [IMT] Soient  $\alpha \geq 0$  et, pour  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $u_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{(n+k)^\alpha}$ .

**a)** Étudier la convergence de  $(u_n)$  en fonction de  $\alpha$ .

**b)** Étudier la convergence de  $\sum u_n$  en fonction de  $\alpha$ .

**1401.** [IMT] Soit  $f \in \mathcal{C}^0([0, 1], \mathbb{R})$  telle que, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $\int_0^1 f(t) t^n dt = 0$ . Rappeler le théorème de Weierstrass. Prouver que  $f$  est nulle.

**1402.** [Dauphine] Soit  $f : [0, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction continue.

Montrer que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^\pi f(t) |\sin(nt)| dt = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi f(t) dt$ .

**1403.** [IMT] Soient  $f, g \in C^0([0, 1], \mathbb{R})$ . Pour  $n \in \mathbb{N}^*$ , on pose  $S_n = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right) g\left(\frac{k}{n}\right)$

et  $T_n = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right) g\left(\frac{k+1}{n}\right)$ . Déterminer les limites de  $(S_n)$  et  $(T_n)$ .

**1404.** [Navale] Justifier la convergence de  $\int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{\sqrt{t+x}} dt$  pour  $x \geq 0$ .

**1405.** [CCINP] On pose  $I = \int_0^{+\infty} \frac{t \sin(t)}{t^2 + 1} dt$ .

a) Justifier l'existence de  $I$ . On pose, pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,  $J(x) = \int_0^x \frac{t |\sin(t)|}{t^2 + 1} dt$ .

b) Montrer que, pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $J(n\pi) = \sum_{k=0}^{n-1} \int_0^\pi \frac{(u + k\pi) \sin(u)}{(u + k\pi)^2 + 1} du$ .

c) L'intégrale  $I$  est-elle absolument convergente ?

**1406.** [CCINP] Soit  $f \in C^1(]0, 1[, \mathbb{R})$  telle que  $|f'(t)| \underset{t \rightarrow 0^+}{\sim} \frac{1}{t^{3/2}}$ .

a) Déterminer un équivalent en  $0^+$  de  $F : x \mapsto \int_x^1 |f'(t)| dt$ .

b) En déduire que  $x f(x) \underset{x \rightarrow 0^+}{\rightarrow} 0$ .

c) Montrer que  $\int_0^1 f(t) dt$  converge.

**1407.** [CCINP] Soit  $f : x \in [0, 1] \mapsto 2x(1-x)$ . Pour  $n \in \mathbb{N}^*$ , soit  $f_n = f \circ \dots \circ f$  ( $n$  fois).

a) Montrer que  $(f_n)$  converge simplement sur  $[0, 1]$  vers une fonction  $g$  que l'on précisera. La convergence est-elle uniforme ?

b) Soit  $a \in ]0, 1/2[$ . Montrer que  $(f_n)$  converge uniformément sur  $[a, 1-a]$ .

**1408.** [IMT] On pose, pour  $x \in \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin(nx)}{n} \cos^n(x)$ .

a) Montrer que  $f$  est définie sur  $\mathbb{R}$ .

b) Montrer que  $f$  est de classe  $C^1$  sur  $]0, \pi[$  puis calculer  $f'$ .

**1409.** [IMT] Soit  $f : x \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\operatorname{sh}(nx)}$ . Domaine de définition de  $f$  ? Équivalent en  $0^+$  ?

**1410.** [CCINP] On pose  $f : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} e^{-x\sqrt{n}}$ .

a) Déterminer les domaines de définition et de continuité de  $f$ .

b) Déterminer la limite de  $f$  en  $+\infty$ .

c) Déterminer un équivalent de  $f(x)$  quand  $x \rightarrow 0^+$ .

**1411.** [CCINP] Soit  $f : x \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{n-1}}{2n-1}$ . Déterminer le rayon de convergence de  $f$ .

Calculer  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{t^{2n-1}}{2n-1}$  et en déduire  $f(x)$ .

**1412.** [IMT] Soit  $f : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(n!)^2}{(2n+1)!} x^n$ .

a) Déterminer le rayon de convergence  $R$  de  $f$ .

b) Donner une expression de  $f(x)$  pour  $x \in ]-R, R[$ .

Ind. Utiliser  $I(p, q) = \int_0^1 t^p (1-t)^q dt$ .

**1413.** [IMT] On pose  $a_n = \int_0^{\pi/4} \tan^n(t) dt$  pour tout  $n \geq 0$ .

a) Étudier la convergence de la suite  $(a_n)_{n \geq 0}$ .

b) Calculer  $a_n + a_{n+2}$  pour tout  $n \geq 2$ .

c) Déterminer le rayon de convergence de la série entière  $\sum a_n x^n$ . On note  $f$  sa somme.

d) La fonction  $f$  admet-elle une limite en  $1^-$  ?

e) Expliciter  $f$ .

**1414.** [IMT] Pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , on pose :  $H_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$ . Déterminer le rayon de convergence

de  $f : x \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} H_n x^n$  et donner une expression de  $f(x)$ .

**1415.** [IMT] Pour tout  $n \geq 1$ , on pose  $a_n = \int_0^{+\infty} \frac{dt}{\operatorname{ch}(t)^n}$ .

a) Montrer que les  $a_n$  sont bien définis.

b) Étudier la convergence de la suite  $(a_n)_{n \geq 1}$ .

c) Quelle est la nature de la série  $\sum (-1)^n a_n$  ?

d) Déterminer le rayon de convergence de la série entière  $\sum a_n x^n$ .

**1416.** [CCINP] Soit  $F : x \mapsto \int_0^{+\infty} \cos(xt^2) e^{-t} dt$ .

a) Montrer que  $F$  est de classe  $\mathcal{C}^\infty$  sur  $\mathbb{R}$ . Calculer  $F^{(k)}(0)$ .

b) La fonction  $F$  est-elle développable en série entière en 0 ?

**1417.** [IMT] Soit, pour  $n \in \mathbb{N}$ ,  $I_n = \int_1^e (\ln t)^n dt$ .

a) Déterminer la limite de  $(I_n)$ .

b) Montrer que, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $I_{n+1} = e - (n+1)I_n$ . En déduire un équivalent de  $I_n$ .

c) Donner un développement asymptotique à deux termes de  $I_n$

**1418.** [CCINP] a) Montrer que l'intégrale  $I_n = \int_0^{+\infty} \frac{dt}{(1+t^4)^n}$  est convergente pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ .

b) Étudier la monotonie de la suite  $(I_n)$  et montrer qu'elle converge.

c) Montrer que, pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $I_{n+1} = \frac{4n-1}{4n} I_n$ .

d) Étudier la convergence de la série  $\sum \ln\left(\frac{4n-1}{4n}\right)$ . En déduire la limite de  $I_n$ .

e) On pose, pour  $n \in \mathbb{N}^*$  et  $x \geq 0$ ,  $f_n(x) = \frac{x}{(1+x^4)^n}$ .

Étudier la convergence simple de la suite  $(f_n)$  sur  $\mathbb{R}^+$ . Y a-t-il convergence uniforme?

f) Déterminer la limite de la suite  $(I_n)$  à l'aide du théorème de convergence dominée.

**1419.** [IMT] Soit  $\alpha > 1$ . Pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , on pose :  $I_n(\alpha) = \int_0^{+\infty} \frac{dt}{(1+t^\alpha)^n}$ .

a) Vérifier la convergence de l'intégrale  $I_n(\alpha)$ .

b) Montrer la suite  $(I_n(\alpha))_{n \geq 1}$  est convergente et préciser sa limite.

c) Montrer que la série  $\sum_{n \geq 1} (-1)^{n-1} I_n(\alpha)$  est une série convergente et exprimer sa somme sous forme intégrale.

**1420.** [IMT] Soit, pour  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $I_n = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin^2(nx)}{\sin^2(x)} dx$ .

Justifier l'existence de  $I_n$ . Montrer que  $I_n \sim n \int_0^{+\infty} \frac{\sin^2(u)}{u^2} du$ .

**1421.** [IMT] Soit, pour  $n \in \mathbb{N}$ ,  $I_n = \int_0^1 \frac{1}{1+t^n} dt$ . Déterminer la limite de  $(I_n)$ , puis un développement asymptotique à deux termes de  $I_n$ .

**1422.** [IMT] Montrer que  $\int_0^{+\infty} \frac{x}{e^{2x} - e^{-x}} dx = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(3n+2)^2}$ .

**1423.** [IMT] On admet que  $\int_{\mathbb{R}} e^{-t^2} dt = \sqrt{2\pi}$ .

a) Existence et calcul de l'intégrale  $\int_{\mathbb{R}} t^{2n} e^{-t^2} dt$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ .

b) Existence et calcul de l'intégrale  $\int_{\mathbb{R}} \cos(tz) e^{-t^2} dt$  pour tout  $z \in \mathbb{C}$ .

**1424.** [IMT] Pour  $x \in \mathbb{R}$ , on pose  $f_x : t \in \mathbb{R}^{+*} \mapsto \frac{\text{sh}(xt)}{\text{sh}(t)}$ .

a) Déterminer l'ensemble  $D$  des réels  $x$  pour lesquels l'intégrale  $\int_0^{+\infty} f_x(t) dt$  converge.

b) Montrer l'égalité  $\int_0^{+\infty} f_x(t) dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2x}{(2n+1)^2 - x^2}$  pour tout  $x \in D$ .

c) Trouver un équivalent de la somme quand  $x \rightarrow 1^-$ .

**1425.** [IMT] On pose, pour  $x \in \mathbb{R}$ ,  $f(x) = e^{\frac{x^2}{2}} \int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt$ .

a) Montrer que  $f$  est de classe  $C^\infty$  et trouver une équation différentielle vérifiée par  $f$ .

b) Montrer que  $f$  est développable en série entière et donner son développement.

**1426.** [CCINP] a) Soit  $x \in \mathbb{R}$ . Montrer que  $t \mapsto e^{-t^2} \operatorname{ch}(xt)$  est intégrable sur  $[0, +\infty[$ .

b) La fonction  $F : x \mapsto \int_0^{+\infty} e^{-t^2} \operatorname{ch}(xt) dt$  est-elle de classe  $C^1$  ?

c) On admettra que  $\int_{\mathbb{R}} e^{-t^2/2} dt = \sqrt{2\pi}$ . Établir une équation différentielle vérifiée par  $F$ . Donner une expression simple de  $F$ .

**1427.** [IMT] On admettra que  $\int_{\mathbb{R}} e^{-t^2/2} dt = \sqrt{2\pi}$ . Soit  $f : x \mapsto \int_0^{+\infty} e^{-t^2} \cos(tx) dt$ . Préciser le domaine de définition de  $f$  et exprimer  $f$  à l'aide d'une équation différentielle.

**1428.** [IMT] Soit  $\eta : x \in ]-1, +\infty[ \mapsto \int_0^1 (1-t^2)^x dt$ . Montrer que  $\eta$  est bien définie et de classe  $C^1$ .

**1429.** [IMT] Soit  $F : x \mapsto \int_0^{+\infty} e^{-t} \frac{\sin(xt)}{t} dt$ . Montrer que  $F$  est de classe  $C^1$  sur  $\mathbb{R}$  et l'exprimer à l'aide des fonctions usuelles.

**1430.** [IMT] Soient  $E = C^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ ,  $\mathcal{P}$  (resp.  $\mathcal{I}$ ) le sous-espace des fonctions paires (resp. impaires) de  $E$ .

a) Montrer que  $E = \mathcal{P} \oplus \mathcal{I}$ .

b) Déterminer les  $f \in E$  telles que  $\forall x \in \mathbb{R}, f''(x) + f(-x) = x + \cos(x)$ .

**1431.** [IMT] On considère l'équation différentielle  $xy' + y = \frac{e^{-1/x^2}}{x^3}$ .

a) Résoudre cette équation sur  $\mathbb{R}^*$  puis sur  $\mathbb{R}$ .

b) Donner un développement limité d'une solution de l'équation différentielle à l'ordre 3 au voisinage de 0.

**1432.** [CCINP] a) Soit  $f$  une fonction de  $\mathbb{R}^2$  vers  $\mathbb{R}$ .

i) Donner, en utilisant des quantificateurs, la définition de la continuité de  $f$  en  $(0, 0)$ .

ii) Donner la définition de «  $f$  différentiable en  $(0, 0)$  ».

b) On considère  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  définie par  $f(x, y) = \begin{cases} xy \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$

i) Montrer que  $f$  est continue sur  $\mathbb{R}^2$ .

ii) Montrer que  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $\mathbb{R}^2$ .

**1433.** [IMT] Soit  $f : [a, b] \rightarrow E$  où  $E$  est un espace euclidien et  $a, b \in \mathbb{R}$  vérifient  $a < b$ . On suppose  $f$  continue sur  $[a, b]$  et dérivable sur  $]a, b[$ .

Montrer qu'il existe  $c \in ]a, b[$  tel que  $\|f(b) - f(a)\| \leq \|f'(c)\|(b - a)$ .

*Ind.* On pourra introduire  $\varphi : t \mapsto \langle f(t), f(b) - f(a) \rangle$ .

**1434.** [IMT] Soient  $K = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x, y \geq 0 \text{ et } 0 \leq x + y \leq 1\}$  et  $f : (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto xy(1 - x - y)$ . Montrer que  $f$  atteint un maximum et un minimum sur  $K$  et les déterminer.

**1435.** [CCINP] On munit  $\mathbb{R}^n$  de sa structure euclidienne canonique. Soient  $u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$  et  $f, g$  définies sur  $\mathbb{R}^n$  par  $\forall x \in \mathbb{R}^n, f(x) = \langle u(x), x \rangle$  et  $g(x) = \|x\|^2 - 1$ .

a) On pose  $K = g^{-1}\{0\}$ . Montrer que  $K$  est compact.

b) Montrer que  $f|_K$  admet un maximum en  $a \in K$ .

c) Montrer que  $g$  est différentiable et calculer sa différentielle et son gradient en tout point.

d) Montrer que  $f$  est différentiable et calculer sa différentielle et son gradient en tout point.

e) Montrer que  $a$  est un vecteur propre de  $u$ .

### Probabilités

**1436.** [IMT] Est-il possible de truquer deux dés à six faces de sorte que la somme obtenue pour un double lancer suive une loi uniforme ?

**1437.** [IMT] Une urne contient  $a$  boules blanches et  $b$  boules noires. On tire simultanément  $n$  boules et on note  $X$  le nombre de boules blanches obtenues. Donner la loi de  $X$ . Calculer son espérance.

**1438.** [CCINP] Lors d'une compétition de saut en hauteur, un participant saute à plusieurs reprises et, à l'instant  $n$ , a une chance sur  $n$  de réussir son saut. S'il chute, la compétition s'arrête pour lui. On note  $X$  le nombre de sauts réussis. Quelle est la loi de  $X$  ? Existence et valeur de  $\mathbf{E}(X)$  et de  $\mathbf{V}(X)$  ?

**1439.** [IMT] On considère une pièce ayant une probabilité  $p \in ]0, 1[$  d'obtenir pile et un dé équilibré à 6 faces. On note  $N$  le nombre de lancers nécessaires pour obtenir pile, puis on lance  $N$  fois le dé. Quelle est la probabilité d'obtenir un unique 6 parmi les  $N$  lancers ?

**1440.** [IMT] Soit  $S$  la somme de  $N$  dés équilibrés à 6 faces, où  $N$  suit la loi uniforme sur  $[1, 52]$ . Déterminer la probabilité des événements  $(S = 1)$ ,  $(S = 2)$ ,  $(S = 3)$ . Calculer l'espérance de  $S$ .

**1441.** [IMT] On joue des parties indépendantes d'un jeu où la probabilité de gagner est de  $\frac{2}{3}$ . Soit  $A_n$  l'événement « les parties  $n$  et  $n + 1$  sont gagnées, mais ce sont les premières à être gagnées consécutivement ». On note  $p_n = \mathbf{P}(A_n)$ .

a) Calculer  $p_1$  et  $p_2$ .

b) Montrer que, pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $p_{n+2} = \frac{1}{3}p_{n+1} + \frac{2}{9}p_n$ .

c) Exprimer  $p_n$ .

**1442.** [IMT] On dispose de  $N$  coffres. Avec probabilité  $p$ , on place dans l'un des coffres un trésor (le choix du coffre est effectué sous loi uniforme). Quelle est la probabilité que le  $N$ -ième coffre contienne un trésor sachant que les  $N - 1$  autres coffres sont vides ?

**1443.** [IMT] Soient  $n, N \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$ . On considère  $N$  clients et  $n$  fournisseurs. Chaque client peut choisir individuellement un fournisseur. On note  $X_i$  le nombre de clients ayant choisi le fournisseur numéro  $i$ .

a) Pour tout  $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ , déterminer la loi, l'espérance et la variance de  $X_i$ .

b) On pose  $Y = \left( \sum_{i=1}^n X_i \right)^2$ . Exprimer  $\mathbf{E}(Y)$  de deux manières.

c) Calculer  $\mathbf{E}(X_i X_j)$  et  $\text{Cov}(X_i, X_j)$  pour  $(i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$ .

**1444.** [IMT] Soient  $X$  et  $Y$  indépendantes de loi géométrique de paramètre  $p \in ]0, 1[$ . Calculer la loi de  $S = X + Y$ . Déterminer la loi de  $X$  sachant  $(S = n)$ .

**1445.** [Navale] Soit  $(X_i)_{1 \leq i \leq n}$  une famille de variables aléatoires i.i.d. de loi géométrique de paramètre  $p \in ]0, 1[$ . On pose  $X = \min(X_1, \dots, X_n)$ . Calculer  $\mathbf{P}(X \geq k)$ , en déduire la loi de  $X$ .

**1446.** [IMT] Soit  $(X, Y)$  un couple de variables aléatoires à valeurs dans  $\mathbb{N}^2$ , dont la loi est donnée par  $\mathbf{P}((X, Y) = (j, k)) = \frac{j+k}{e^{2j+k} j! k!}$  pour tout  $(j, k) \in \mathbb{N}^2$ . Calculer  $\mathbf{E}(2^{X+Y})$ .

**1447.** [IMT] Soient  $X$  et  $Y$  deux variables indépendantes suivant la loi géométrique de paramètre  $p \in ]0, 1[$ . On pose  $D = X - Y$  et  $I = \min(X, Y)$ .

a) Rappeler l'espérance et la variance de  $X$ .

b) Déterminer la loi conjointe de  $(D, I)$ .

c) Préciser les lois de  $D$  et  $I$ . Sont-elles indépendantes ?

**1448.** [IMT] Soit  $(X_k)_{k \in \mathbb{N}}$  une suite de variables aléatoires indépendantes de lois données par  $\mathbf{P}(X_k = -k^\lambda) = \mathbf{P}(X_k = k^\lambda) = \frac{1}{2}$ , où  $\lambda \in ]0, 1/2[$ .

Pour  $n \in \mathbb{N}^*$ , on définit  $S_n = \sum_{k=1}^n X_k$  et  $Y_n = \frac{S_n - \mathbf{E}(S_n)}{n}$ .

a) Déterminer  $\mathbf{E}(S_n)$  et  $\mathbf{V}(S_n)$ .

b) Donner un équivalent de  $u_n = \sum_{k=1}^n k^\alpha$ , où  $\alpha > 0$ .

c) Énoncer l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev et déterminer  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbf{P}(|Y_n| > \alpha)$ .

**1449.** [ISUP] Soit  $X$  une variable aléatoire réelle d'espérance nulle et d'écart-type  $\sigma$ . Montrer que, pour tous  $\lambda, \mu > 0$ ,  $\mathbf{P}(X \geq \lambda) \leq \frac{\sigma^2 + \mu^2}{(\lambda + \mu)^2}$  et  $\mathbf{P}(X \geq \lambda) \leq \frac{\sigma^2}{\lambda^2 + \sigma^2}$ .

### Autres Écoles – PSI

#### Algèbre

**1450.** [IMT] Soit le polynôme  $P(X) = X^4 + \alpha X^3 + \beta X - 16$ , avec  $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ . Déterminer les valeurs de  $\alpha$  et  $\beta$  pour lesquelles le polynôme  $P$  admet une racine triple.

**1451.** [Navale] Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ . Soit  $D_A = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), M^T + M = \text{Tr}(M)A\}$ . Caractériser le sous-espace  $D_A$  et déterminer sa dimension.

**1452.** [IMT] Soient  $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  telles que  $A^2 = B^2 = I_n$  et  $AB = -BA$ .

a) Montrer que  $A$  et  $B$  sont inversibles et diagonalisables.

b) Montrer que  $n$  est pair, puis que  $A$  et  $B$  sont semblables.

**1453.** [CCINP] Soit  $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ .

Pour  $x \in \mathbb{R}$ , on pose  $A(x) = (a_{i,j} + x)_{1 \leq i,j \leq n}$ . On note  $D(x) = \det(A(x))$ .

a) On donne  $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$ . Calculer  $D(x)$ .

b) Montrer que  $D(x)$  est un polynôme en  $x$  de degré au plus 1.

c) Dans le cas où  $a_{i,i} = a$ ,  $a_{i,j} = b$  pour  $i > j$  et  $c$  pour  $i < j$ , calculer  $\det(A)$ .

**1454.** [ENSEA] On souhaite déterminer les suites  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ,  $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$  et  $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$  vérifiant la

relation de récurrence suivante : 
$$\begin{cases} a_{n+1} = 3a_n + b_n \\ b_{n+1} = 3b_n + c_n \\ c_{n+1} = 3c_n \end{cases}$$

a) Écrire le système sous la forme  $X_{n+1} = AX_n$ . En déduire  $X_n$  en fonction de  $A$  et de  $X_0$ .

b) Calculer, pour tout  $n$ ,  $A^n$ .

c) Conclure.

**1455.** [IMT] Soient  $a \in \mathbb{C}$  et  $U \in \mathbb{C}[X]$  non nul. On pose  $f : P \mapsto P + P(a)U$ .

a) Montrer que  $f$  est un endomorphisme de  $\mathbb{C}[X]$ .

b) Montrer que  $\text{Ker}(f) \subset \text{Vect}(U)$ .

c) Montrer qu'il y a égalité si et seulement si  $U(a) = -1$ . Que vaut le noyau de  $f$  sinon ?

**1456.** [CCINP] a) Énoncer le théorème du rang.

b) On considère l'énoncé suivant :

« Soient  $E$  et  $F$  deux espaces et  $u \in \mathcal{L}(E, F)$ . Alors  $u$  injective  $\Leftrightarrow u$  surjective. »

Quelles hypothèses suffit-il de rajouter pour que cet énoncé soit vrai ? Donner des contre-exemples pour illustrer l'importance de ces hypothèses.