1354. [IMT] Soient a et n deux entiers supérieurs ou égaux à 2 . Montrer que si $a^n - 1$ est premier, alors $a = 2$ et n est un nombre premier.

1355. [IMT] Résoudre l'équation $x^2 + x + \overline{1} = \overline{0}$ dans $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$ et dans $\mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$.

1356. [IMT] ($\star$) Soit $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telle que $A^2 = 0$ et $A \neq 0$.

Montrer que A est semblable à $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

1357. [IMT]
a) Soient $n \in \mathbb{N}^*, u, v \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ nilpotents et non nuls tels que $u \circ v = v \circ u$. Montrer que $\operatorname{rg}(u \circ v) < \operatorname{rg}(v)$.
b) Soient $u_1, \ldots, u_n \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ nilpotents et commutant deux à deux.
Montrer que $u_1 \circ \cdots \circ u_n = 0$.

1358. [CCINP] Soit $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ telle que $M^2 + M = J$ où $J = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.
a) Déterminer les valeurs propres de J. En déduire les valeurs propres éventuelles de M.
b) Trouver un polynôme annulateur de M. Montrer que M est diagonalisable.
c) Déterminer les matrices M solutions.

1359. [IMT]
Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur $(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4$ pour que la matrice $\begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 2 & c \\ 0 & 0 & d \end{pmatrix}$ soit diagonalisable.

1361. [IMT] Soient $a > 0$ et $A = \begin{pmatrix} 0 & -a & a^2 \\ 1 & 0 & -a \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $u = \begin{pmatrix} a \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.
a) Calculer Au. Que peut-on en déduire ?
b) Calculer $\det(A)$. La matrice A est-elle inversible?
c) Déterminer le spectre réel de A.
d) Trouver une condition nécessaire et suffisante pour que A soit diagonalisable.

1367. [IMT] ($\star$) Soient E un espace vectoriel de dimension finie et $\alpha \neq 0$.
Soient $f, g \in \mathcal{L}(E)$ telles que $f \circ g - g \circ f = \alpha f$.
a) Donner une expression simple de $f^n \circ g - g \circ f^n$.
b) En s'intéressant à $h \mapsto h \circ g - g \circ h$, montrer que f est nilpotente.

1370. [CCINP] Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{C}^n)$.
a) On suppose que f^2 est inversible et diagonalisable. À l'aide d'un polynôme annulateur de f, montrer que f est diagonalisable.
b) On suppose que f^2 n'est plus inversible, que f^2 est diagonalisable et que $\operatorname{Ker} f = \operatorname{Ker} f^2$. Montrer que f est diagonalisable.

1371. [IMT] ($\star$) Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ de rang 1 . Montrer que A est diagonalisable si et seulement si $\operatorname{tr}(A) \neq 0$.

1373. [IMT] Donner toutes les matrices M de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ vérifiant $M^5 = M^2$ et $\operatorname{Tr}(M) = n$.

1379. [CCINP] On munit $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de son produit scalaire canonique.
a) Montrer que $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ sont supplémentaires orthogonaux
b) Déterminer la distance de $M = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ à $\mathcal{S}_3(\mathbb{R})$.

1380. [CCINP] ($\star$) On munit $\mathbb{R}^n$ de son produit scalaire canonique, et on fixe $v \in \mathbb{R}^n \backslash \{0\}$.
a) On pose $H_v = I_n - 2\dfrac{v^T v}{\|v\|^2}$. Montrer que $H_v \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$.
b) Quelle est la nature de l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ canoniquement associé à H_v ?
c) Soient $x, y \in \mathbb{R}^n \backslash \{0\}$ tels que $\|x\| = \|y\|$.
i) Montrer que les vecteurs $x - y$ et $x + y$ sont orthogonaux.
ii) Montrer qu'il existe $V \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ telle que $Vx = y$.

1385. [CCINP] Soient E un espace euclidien de dimension $n \geqslant 2$ et $f \in \mathcal{S}(E)$. On note a (resp. b) la plus petite (resp. la plus grande) valeur propre de f.
a) Montrer que $a\|x\|^2 \leqslant \langle f(x), x\rangle \leqslant b\|x\|^2$ pour tout $x \in E$.
b) Soit $r \in \mathbb{R}^+$tel que, pour tout $x \in E, \langle f(x), x\rangle \leqslant r\|x\|^2$. Montrer que $b \leqslant r$.
c) Soit $k \in \mathbb{R}$. On note $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ la matrice définie par $a_{i,i} = k, a_{i,j} = 1$ si $i = j \pm 1$, $a_{i,j} = 0$ sinon. Montrer que la plus grande valeur propre de A est inférieure ou égale à $k + 2$.

1386. [CCINP] ($\star$) Soient E un espace euclidien et $a, b \in E$ unitaires et non colinéaires. On considère $\varphi : x \mapsto \langle a, x\rangle a + \langle b, x\rangle b$. Montrer que φ est un endomorphisme autoadjoint et donner ses éléments propres.