

TD CHAPITRE MK.1 : LOIS DE COULOMB DU FROTTEMENT

■ CONSEILS A SUIVRE ; ERREURS A NE PAS COMMETTRE

1. Lors d'un déplacement avec glissement, la relation entre les réactions normale et tangentielle est une relation scalaire et non vectorielle !! les directions sont orthogonales l'une à l'autre et connues.
2. Afin de déterminer la norme des réactions normales, il faut exploiter la 2^{nde} loi de Newton.



Désigne un exercice classique, qu'il est nécessaire de savoir refaire de façon rapide et rigoureuse



Difficulté des techniques et outils mathématiques nécessaires



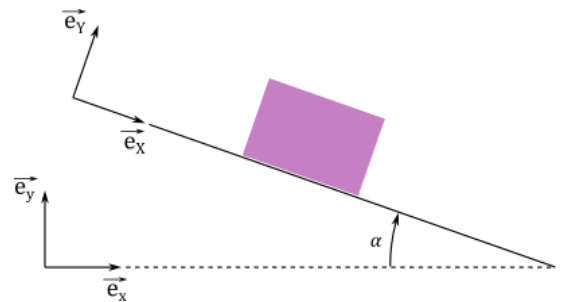
Difficulté d'analyse, de compréhension, prise d'initiatives

■ APPLICATIONS DE COURS

Exercice 1. Glissement sur un plan incliné



On étudie un solide de masse m sur un plan incliné d'angle α . On note f_s le coefficient de frottement statique et f_d le coefficient de frottement dynamique. On se place dans le référentiel terrestre supposé galiléen.



- 1) On suppose dans un premier temps que l'angle α est tel que le solide est immobile et ne glisse pas. Déterminer alors les expressions de T et N en fonction de m , g et α .
- 2) A partir de cette position d'équilibre, on augmente lentement l'angle α . Déterminer l'angle limite α_{lim} à partir duquel le solide va commencer à glisser.

On suppose dans la suite que $f_d = f_s = f$

- 3) On choisit désormais un angle $\alpha > \alpha_{lim}$. On lâche le solide depuis la position d'origine $X(t = 0) = 0$ sans vitesse initiale. Établir l'équation horaire du mouvement $X(t)$. Vérifier qu'il s'agit bien d'une glissade moins accélérée qu'en l'absence de frottements.
- 4) Calculer le travail $W(t)$ des forces de frottements sur le solide lors de sa descente sur une longueur L . Commenter l'expression obtenue. son signe ainsi que son évolution avec f .
- 5) Pour cette question, on se place à un angle $\alpha < \alpha_{lim}$. On lance à présent le solide depuis la position d'origine $X(t = 0) = 0$ avec une vitesse initiale orientée vers le bas $\vec{v}(t = 0) = \dot{X}(0)\vec{e}_X = v_0\vec{e}_X$. Établir l'équation horaire de la vitesse $\dot{X}(t)$ du mouvement $X(t)$. En déduire la distance d'arrêt du solide. Pourquoi est-ce nécessairement une position d'arrêt ?
- 6) On étudie toujours le même système mais en supposant cette fois qu'on lance le mobile depuis le bas du plan incliné, avec une vitesse à $t = 0$ de v_0 . On suppose de plus que l'angle α est quelconque. Déterminer la hauteur h_1 à laquelle il est capable de remonter. Que se passe-t-il une fois le solide arrivé à ce point le plus haut ?

Exercice 2. Freinage d'une voiture



Soit un véhicule supposé ponctuel de masse m qui se déplace à la vitesse v_0 . Ce véhicule freine "brusquement", ce qui bloque les roues. On suppose alors qu'il glisse sur la route avec un coefficient de frottement f entre les roues et la route.

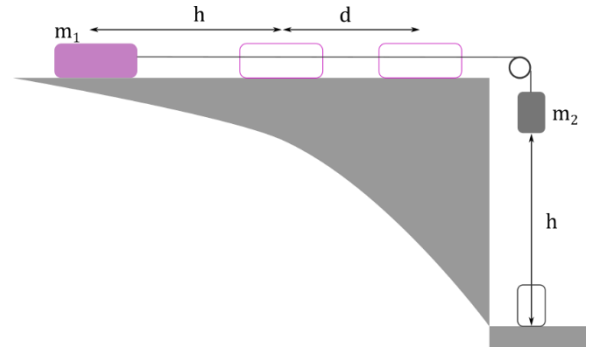
Calculer la distance parcourue avant arrêt. Commenter le résultat obtenu.

Exercice 3. Détermination expérimentale d'un coefficient de frottement



On place un pavé de masse m_1 sur un support horizontal. Il est relié, via un fil inextensible et une poulie parfaite, à une masse m_2 suffisamment grande pour le mettre en mouvement.

La masse m_2 parcourt la hauteur h avant de se poser au sol ; le pavé parcourt alors une distance supplémentaire d avant de s'arrêter en raison de frottements solides de coefficient f .



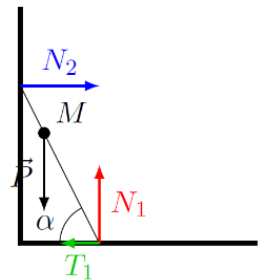
- 1) Etablir la condition pour que la masse m_2 permette de faire glisser la masse m_1
- 2) Montrer que la mesure de la distance de freinage d du pavé permet une mesure du coefficient de frottement f entre le pavé et le support.

Exercice 4. Comment monter sur une échelle sans glisser



Soit un opérateur de masse m considéré comme ponctuel qui monte sur une échelle de longueur L dont on négligera la masse. On considère que seul le contact avec le sol donne lieu à un frottement qui obéit aux lois de Coulomb avec un coefficient de frottement f .

À quelle condition sur l'angle α entre le sol et l'échelle la montée est-elle sécurisée ?



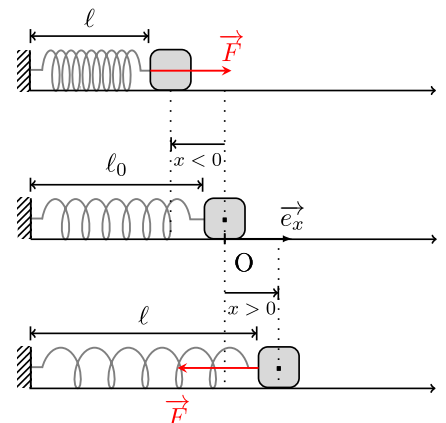
Exercice 5. Oscillateur à frottement solide



Un solide M , assimilé à un point matériel de masse m , est mobile sur un plan selon un axe horizontal (Ox) et relié à un ressort de constante de raideur k et de longueur à vide ℓ_0 , dont l'autre extrémité est attachée à un point fixe. On choisit comme origine O de l'axe la position du solide lorsque le ressort est à sa longueur à vide ℓ_0 (voir schéma ci-contre). Des frottements solides de coefficient de frottement f existent entre le mobile et le plan.

À l'instant initial, M est abandonné avec une vitesse nulle à l'abscisse x_0 .

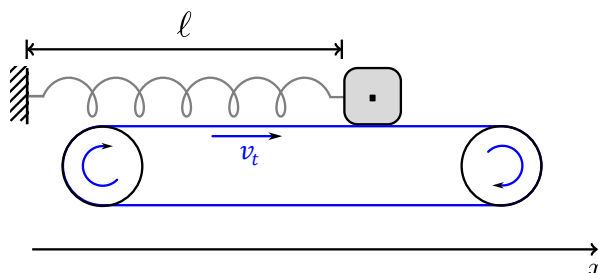
- 1) Écrire les équations du mouvement général, sans tenir compte pour le moment du glissement ou non de M .
- 2) Etablir la condition sur x_0 pour que M se mette initialement en mouvement que l'on exprimera en fonction de f, m, g et k .
- 3) On suppose cette condition de mise en mouvement vérifiée, avec $x_0 > 0$. Etablir l'expression de la position $x_1(t)$, valeur de $x(t)$ pendant cette première phase du mouvement.
- 4) Quelle est l'abscisse x_{1m} de M à l'instant où sa vitesse s'annule pour la première fois ? À quelle condition M repart-il ?



- 5) On suppose que le mouvement continue. Etablir l'expression de la pseudo-période du mouvement. Déterminer la diminution l'amplitude du mouvement au bout d'une pseudo-période.
- 6) Quelle est la différence, au niveau de l'enveloppe de $x(t)$, pour un oscillateur amorti par frottements solides avec un oscillateur amorti par frottements visqueux (loi de frottement proportionnelle à la vitesse) ?
- 7) Quelles sont les différentes étapes de la résolution numérique de ce problème ?

Exercice 6. Stick-slip   **2 ou 3** |  **1 ou 2**

Considérons un solide de masse m posé sur un tapis roulant de vitesse \vec{v}_t fixe régulée par un moteur. Des frottements solides, de coefficients de frottement statique f_s et dynamique f_d , existent entre le mobile et le tapis.



- 1) Partant d'un montage où les différents éléments sont au repos, le ressort étant à sa longueur à vide, on démarre le moteur qui met instantanément le tapis en translation à la vitesse $\vec{v}_t = \overrightarrow{cte}$. Proposer une analyse qualitative de ce qu'il va se passer.

On pose l'axe Ox de sorte que l'origine de cet axe coïncide avec la position du point M lorsque le ressort est à sa longueur à vide. Pour simplifier, on supposera $f_d = 0$.

- 2) Initialement, le ressort est à sa longueur à vide ($x(0) = 0$) et la masse ne glisse pas. Déterminer l'allongement maximal x_{max} du ressort pour lequel la masse cesse d'être entraînée par le tapis.
- 3) Donner l'équation différentielle vérifiée par la masse une fois que la phase d'entraînement est finie (à partir de l'instant où la masse a une vitesse de glissement non nulle par rapport au tapis).
- 4) Quelle est la condition nécessaire sur la vitesse de la masse pour que la phase de glissement s'arrête ? Quelle condition sur la position de la masse permet de maintenir la condition d'arrêt des lois de Coulomb ? Justifier que la situation est alors périodique.
- 5) Indiquer les différentes étapes de la résolution numérique

EXERCICES INCONTOURNABLES

Exercice 7. Equilibre sur un plateau tournant   **1** |  **2**

On considère un plateau horizontal tournant autour d'un axe fixe vertical à la vitesse angulaire constante ω . On dépose un petit solide à la distance d de l'axe de rotation sans vitesse initiale par rapport au plateau. A quelle condition le solide reste-t-il à l'endroit où on l'a posé ? Introduire la ou les grandeurs physiques nécessaire(s).

Exercice 8. Curling (Oral MT PC2023)   **1** |  **1**

On considère une pierre de curling de masse $m = 20$ kg lancée avec une vitesse v_0 en direction d'une cible située à une distance $D = 5$ m. On suppose que lors de sa course, la pierre subie une force constante $F = 2$ N opposée

à son mouvement. La pierre s'arrête ainsi au bout d'un temps noté t_a .

1. On suppose que la pierre s'arrête dans la cible, en déduire une expression de v_0 en fonction de m, f et t_a .
2. En déduire une expression du temps t_a mis pour s'arrêter dans la cible, en fonction de m, f et D uniquement.

Exercice 9. Déménageur 2 | 1

Un déménageur cherche à déplacer un carton de masse M en exerçant sur celui-ci une force $\vec{F} = F e_x$, pour maintenir le carton à une vitesse de translation constante.

On note f_s le coefficient de frottement statique du carton sur le sol et f_d le coefficient de frottement dynamique.

- 1) Exprimer la condition sur la force de poussée assurant la mise en mouvement du carton. Commenter.

Le bloc glisse sans pivoter sur le sol.

- 2.a) Exprimer la puissance des actions de contact entre le carton et le sol.

- 2.b) Un opérateur fournit un travail musculaire W_{op} pendant un temps Δt pour amener le bloc en translation d'une vitesse initiale nulle à une vitesse V_0 . Montrer que, pour un temps Δt donné, le travail à fournir par l'opérateur est d'autant plus élevé que le bloc est lourd, que le coefficient de frottement dynamique f_d est élevé et que V_0 est grand.

Exercice 10. Un traîneau sur la glace (Mines Pont MP 2019) 2 | 2

Un traîneau à chiens est un dispositif de masse totale M (le pilote, ou musher, est compris dans cette masse) qui peut glisser sur la surface de la glace avec des coefficients de glissement statique μ_s (avant le démarrage) et dynamique μ_d (en mouvement).

Les chiens exercent sur le traîneau une force de traction F .

- 1 - Le trajet se fait soit à l'horizontale, soit sur une faible pente ascendante caractérisée par l'angle α avec l'horizontale. Montrer que, dans ce dernier cas, tout se passe comme dans un mouvement horizontal sous réserve de remplacer μ_d par μ_d' , que l'on exprimera.

L'intensité de la force de traction totale F exercée par l'ensemble des chiens dépend de leur vitesse v et on adoptera le modèle $F = F_0 - \beta v$ où F_0 et β sont des constantes positives. On prendra les valeurs $M = 5,0 \times 10^2$ kg, $\alpha = 0$, $\mu_d = 5,0 \times 10^{-2}$ et $\mu_s = 8,0 \times 10^{-2}$.

- 2 - Déterminer la valeur minimale de F_0 permettant le démarrage du traîneau.
- 3 - La vitesse du traîneau en régime stationnaire est $v_0 = 3$ m.s⁻¹, atteinte à 5% près au bout d'un temps $t_1 = 5$ s. Exprimer d'une part β en fonction de M et t_1 et d'autre part F_0 en fonction de β , v_0 , μ_d , M et g . Calculer leurs valeurs respectives.

Toujours à vitesse constante v_0 , le traîneau aborde une courbe à plat qu'on assimilera à un cercle de centre O et de rayon R (cf. fig. 4). Les chiens (modélisés ici en un seul point C) doivent donc tirer vers l'intérieur du cercle, et exercent alors une force \vec{T} par le biais de la tension de la corde les reliant au traîneau (Cf. fig. 4 ci-contre)

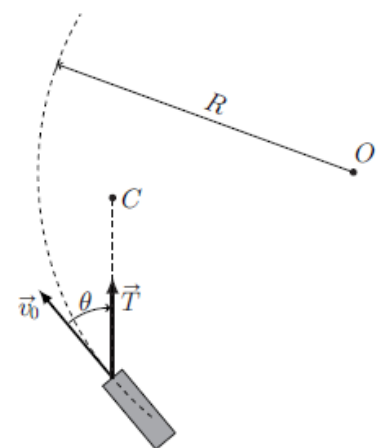
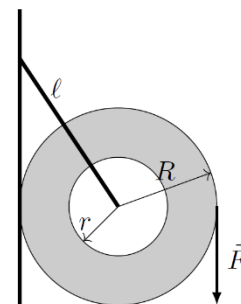


FIGURE 4 – Trajectoire circulaire du traîneau

- 4 - Déterminer en fonction des données la tension de la corde T et l'angle θ entre la force de traction et la trajectoire.

Exercice 11. Rouleau de papier toilette *d'après Centrale* 2 ou 3 | 2

On considère le rouleau de papier toilette de la figure ci-contre. On appelle ℓ la longueur des tiges supposées sans masse attachées sur l'axe du tube de rayon $R_{tube} = r$ et de masse $m_{tube} = M$ sur lequel est enroulé le papier de masse $m_{papier} = m$. Le rouleau a un rayon total $R_{papier} = R$. On notera f le coefficient de frottement entre le mur et le papier.



- 1) Déterminer la condition sur la force F exercée sur la feuille à l'extrémité du rouleau (voir schéma ci-contre pour la direction et le sens) pour que le rouleau ne tourne pas.
- 2) Déterminer la condition sur ℓ pour que la feuille se détache sans faire rouler le rouleau sachant que la feuille se détache pour $F \geq 2,0 N$.
- 3) Cette condition reste-t-elle valable pour toute l'utilisation du rouleau?

Données : $R = 6 \text{ cm}$; $r = 2,5 \text{ cm}$; $f = 0,5$; $g = 10 \text{ m.s}^{-2}$; $m + M = 100 \text{ g}$.

■ EXERCICES COMPLEMENTAIRES

Exercice 12. Glisser ou basculer 2 ou 3 | 2

Une caisse homogène de forme parallélépipédique rectangle (hauteur H , longueur L , largeur l) repose sur un plan incliné, la longueur restant parallèle à la ligne de plus forte pente. Le coefficient de frottement de la caisse sur le plan vaut f . Un opérateur peut augmenter progressivement l'angle α que fait le plan avec l'horizontale.

- 1) En supposant que la caisse ne bascule pas, à partir de quelle valeur de α se met-elle à glisser ?
- 2) En supposant que la caisse ne glisse pas, à partir de quel angle bascule-t-elle ? Discuter le résultat.
- 3) A quelle dimension sur ses dimensions la caisse va-t-elle glisser avant de basculer ? Que dire d'un cube ?

Exercice 13. Colis sur un tapis roulant 2 ou 3 | 2

On considère un colis de 5 kg déposé par un livreur sans vitesse initiale à l'extrémité d'un tapis roulant horizontal de longueur $L = 10 \text{ m}$ défilant à la vitesse $V_0 = 3 \text{ m.s}^{-1}$. Le coefficient de frottement entre le colis et le tapis vaut $f = 0,4$.

- 1) Définir la vitesse de glissement du colis par rapport au tapis.
- 2) Pendant combien de temps le colis glisse-t-il sur le tapis ? Quelle distance dans le référentiel terrestre aura-t-il effectué pendant cette phase ? Quand le colis arrive-t-il au bout du tapis roulant ?
- 3) Déterminer l'énergie fournie par le moteur entraînant le tapis pour emmener le colis d'un bout à l'autre de ce tapis.
- 4) Quel intérêt y a-t-il à augmenter le coefficient de frottement f ?

Exercice 14. Assiette sur guéridon 2 ou 3 | 2

Sur le guéridon de la figure ci-dessous, recouvert d'une nappe sans ourlet, on place une assiette bien remplie.

D'un geste brusque, on tire la nappe. L'assiette reste en place sur le guéridon et l'assistance applaudit !

La masse de l'assiette est $M = 400 \text{ g}$, celle de la nappe est $m = 50 \text{ g}$. Le guéridon est modélisé par un disque de centre O et de rayon $R = 25 \text{ cm}$. Il est recouvert d'une nappe de même dimension et d'épaisseur négligeable.

L'assiette circulaire, de rayon $r = 5$ cm, est placée au centre de la nappe. On admet que le support de la force \vec{F} développée par l'expérimentateur pendant qu'il tire sur la nappe passe par O et que cette force s'écrit, en

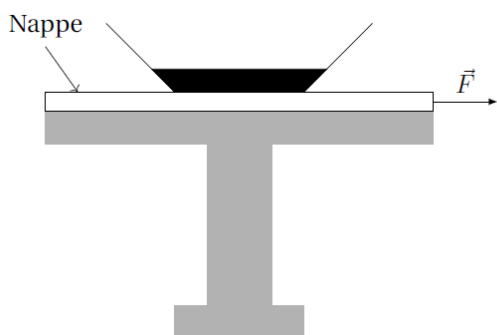


FIGURE 1 – Guéridon, nappe et assiette

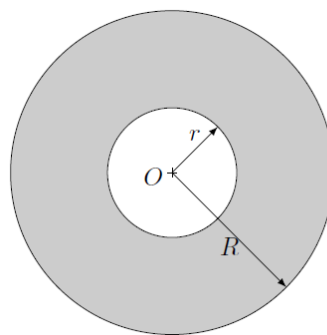


FIGURE 2 – Nappe et assiette vues du dessus

fonction du temps $\vec{F} = m\alpha t \vec{u}_x$, où \vec{u}_x est le vecteur unitaire de l'axe (Ox) , et α une constante positive.

Le frottement entre la nappe et le guéridon est négligeable. Le coefficient de frottement entre la nappe et l'assiette est noté f et vaut $f = 0,2$. Le repère d'espace $\mathcal{R}_g(O; \vec{u}_x)$ est supposé galiléen. On note g l'accélération de la pesanteur.

Une première modélisation

- 1) On suppose que, tout le long de l'expérience, l'assiette glisse sur la nappe. Quel est, à l'instant $t = 0^+$, le sens de la vitesse de glissement de l'assiette par rapport à la nappe?
- 2) Montrer que l'accélération de l'assiette est constante dans \mathcal{R}_g et déterminer l'équation horaire du mouvement de son centre C_a : $x_a(t)$
- 3) Déterminer l'équation horaire du mouvement du centre C_n de la nappe $x_n(t)$.
- 4) On observe que le déplacement de l'assiette est négligeable et que la nappe cesse d'être au contact de l'assiette après une durée $\tau = 0,1$ s; calculer la valeur de α . Le déplacement de l'assiette est-il effectivement négligeable? L'expérience peut-elle être conduite avec succès par un enfant ?

Une modélisation plus réaliste

En réalité, la dynamique de l'assiette comprend deux phases; dans la première phase, de durée t_1 , l'intensité de la force de frottement est inférieure à la valeur fMg donnée par la loi de Coulomb, l'assiette ne glisse pas sur la nappe et donc $x_a = x_n$.

- 5) Pour $0 \leq t \leq t_1$, intégrer l'équation fondamentale de la dynamique appliquée au système {nappe + assiette}. En appliquant l'équation fondamentale de la dynamique à l'assiette seule, déterminer la composante tangentielle de la nappe sur l'assiette. En déduire que la durée de la phase sans glissement est $t_1 = \frac{f(M+m)g}{\alpha m}$.
- 6) Exprimer $x_a(t_1)$, $x_n(t_1)$, $\left(\frac{dx_a}{dt}\right)_{t=t_1}$ et $\left(\frac{dx_n}{dt}\right)_{t=t_1}$.
- 7) Déterminer, pour $t = t_1$, et sous la forme de polynômes de la variable $(t - t_1)$, les équations horaires du mouvement de C_a : $x_a = \varphi(t - t_1)$, et de celui de C_n : $x_n = \eta(t - t_1)$.
- 8) On observe que le contact nappe-assiette dure $t_c - t_1 = 0,1$ s. Calculer la valeur de α , ainsi que celles de t_1, x_1 et v_1 . Conclure.

Exercice 15. Ne pas glisser dans les virages (Céline)

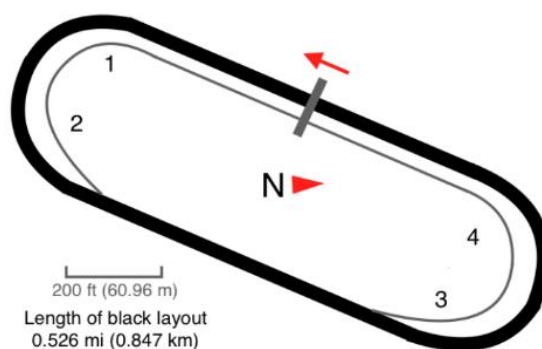
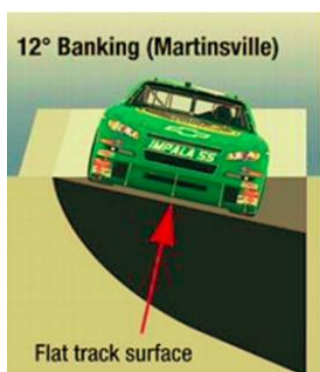
Les « circuits ovales » sont des temples de la vitesse : de forme ovale ces circuits fermés permettent aux bolides de la NASCAR d'atteindre des vitesses extrêmement élevées. Un ovale n'est pas plat : afin que les voitures conservent un maximum de vitesse

et d'élan dans les virages - permettant ces vitesses moyennes très élevées - les virages sont inclinés. On parle parfois de « banking ».



1 - Martinsville Speedway fut le premier « speedway » à voir le jour en NASCAR. La combinaison de ses virages faiblement relevés et de ses courtes lignes droites en font un circuit particulier, où s'enchaînent forts freinages et courtes accélérations.

On donne le coefficient de frottement entre les pneus et la piste. On a lorsque la piste est sèche $f_s = 0,6$ et lorsqu'elle est mouillée par la pluie $f_m = 0,4$. Pour chacune des questions posées, on envisagera les deux cas (piste sèche et piste mouillée).



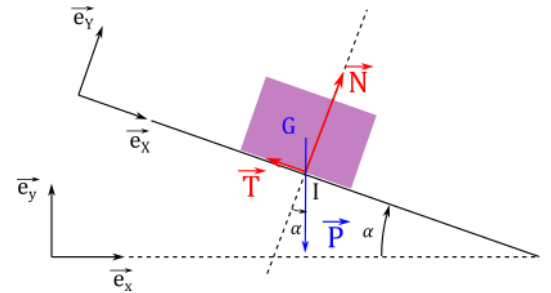
- 2 - Montrer que sur la partie extérieure du virage relevé, une voiture peut rester à l'arrêt.
- 3 - Déterminer la vitesse de la voiture en $\text{km}\cdot\text{h}^{-1}$ lui permettant de parcourir la partie extérieure à vitesse constante.

TD CHAPITRE MK.1 – LOIS DE COULOMB DU FROTTEMENT - CORRIGES

■ APPLICATIONS DE COURS

Exercice 1. Plan incliné

- 1) **Système** : solide de masse m étudié dans le référentiel du laboratoire supposé galiléen.
- 2) **Etude cinématique** : voir schéma. On a un potentiel mouvement rectiligne selon \vec{e}_x , ce choix de base de vecteurs est le plus efficace pour l'ensemble des cas de figures, la projection des vecteurs y étant plus simple.



$\vec{a} = \vec{0}$ à l'équilibre

BAME : dans la base $(\vec{e}_x; \vec{e}_y)$

Poids $\vec{P} = m\vec{g} = \begin{pmatrix} mg \sin(\alpha) \\ -mg \cos(\alpha) \end{pmatrix}$; réaction normale $\vec{R}_N = \begin{pmatrix} 0 \\ R_N \end{pmatrix}$; réaction tangentielle $\vec{R}_T = \begin{pmatrix} -R_T \\ 0 \end{pmatrix}$

La réaction tangentielle permet d'assurer l'équilibre, elle s'oppose au mouvement qui aurait lieu en son absence, elle est donc orientée selon $-\vec{e}_x$. On peut également considérer qu'elle doit compenser la composante tangentielle du poids, qui est dirigée selon $+\vec{e}_x$.

PFD : $m\vec{a} = \vec{P} + \vec{R}_N + \vec{R}_T$

Projection sur \vec{e}_x : $mg \sin(\alpha) + 0 - R_T = 0 \Leftrightarrow \boxed{R_T = mg \sin(\alpha)}$

Projection sur \vec{e}_y : $-mg \cos(\alpha) + R_N + 0 = 0 \Leftrightarrow \boxed{R_N = mg \cos(\alpha)}$

Remarque : dans les problèmes avec frottements solides, les modules R_T et R_N sont a priori des inconnues.

D'après les lois de Coulomb, $R_T \leq f_s R_N \Leftrightarrow \frac{R_T}{R_N} \leq f_s \Leftrightarrow \frac{R_T}{R_N} = \tan(\alpha) \leq f_s = \tan(\alpha_{lim})$

Le solide reste immobile par rapport au support tant que la réaction reste dans le cône de frottement d'angle φ , avec par définition

$$\varphi = \alpha_{lim}$$

- 3) Avec $\alpha > \alpha_{lim}$, la condition d'équilibre est rompue, il va y avoir mouvement du solide sur le plan.

Etude cinématique : le solide restant sur le plan, avec un mouvement de translation :

Position : $\vec{OM} = X\vec{e}_x$, vitesse $\vec{v} = \dot{X}\vec{e}_x$, accélération $\vec{a} = \ddot{X}\vec{e}_x$

BAME : dans la base $(\vec{e}_x; \vec{e}_y)$

Poids $\vec{P} = m\vec{g} = \begin{pmatrix} mg \sin(\alpha) \\ -mg \cos(\alpha) \end{pmatrix}$; réaction normale $\vec{R}_N = \begin{pmatrix} 0 \\ R_N \end{pmatrix}$; réaction tangentielle $\vec{R}_T = \begin{pmatrix} -R_T \\ 0 \end{pmatrix}$

PFD : $m\vec{a} = \vec{P} + \vec{R}_N + \vec{R}_T$

Projection sur \vec{e}_x : $mg \sin(\alpha) + 0 - R_T = m\ddot{X} \Leftrightarrow R_T = mg \sin(\alpha) - m\ddot{X}$

Projection sur \vec{e}_y : $-mg \cos(\alpha) + R_N + 0 = 0 \Leftrightarrow R_N = mg \cos(\alpha)$

Loi du frottement de Coulomb en présence de glissement : $R_T = f R_N = f mg \cos(\alpha) = mg \sin(\alpha) - m\ddot{X} \Leftrightarrow$

$$\ddot{X} = g(\sin(\alpha) - f \cos(\alpha)) = g \cos(\alpha) (\tan \alpha - f)$$

$$\boxed{\ddot{X} = g \cos(\alpha) (\tan \alpha - \tan \alpha_{lim})}$$

Comme $\alpha > \alpha_{lim}$, l'accélération est positive, la masse se met à glisser vers le bas : mouvement rectiligne uniformément accéléré (MRUA).

En intégrant deux fois par rapport au temps avec les conditions initiales : $X(t = 0) = 0$ sans vitesse initiale : $\dot{X}(t = 0) = 0$:

$$X = \frac{1}{2} g (\sin(\alpha) - f \cos(\alpha)) t^2$$

En l'absence de frottements, $f = 0$: $X = \frac{1}{2} g \sin(\alpha) t^2$: les frottements ralentissent le mouvement en diminuant l'accélération, mais cela reste un MRUA.

$$4) \mathcal{P}(\vec{R}) = \vec{R} \cdot \vec{v} = (\vec{R}_N + \vec{R}_T) \cdot \vec{v} \stackrel{\vec{R}_N \perp \vec{v}}{=} \vec{R}_T \cdot \vec{v}$$

$$\mathcal{P}(\vec{R}) = -fmg \cos \alpha \cdot \underbrace{g(\sin \alpha - f \cos \alpha)}_{>0} t < 0$$

La force de frottement est dissipative d'énergie par le biais de la réaction tangentielle, la réaction normale n'intervenant pas (puissance toujours nulle).

$$W(\vec{R}) = \int_0^L \vec{R} \cdot d\vec{OM} = \int_0^L (\vec{R}_N + \vec{R}_T) \cdot d\vec{OM} = \int_0^L \vec{R}_T \cdot d\vec{OM} = \int_0^L -fmg \cos \alpha \cdot dX = -fmg \cos \alpha L$$

5) On étudie le même problème que précédemment, avec mouvement vers le bas puisqu'il y a une vitesse initiale (hypothèse dynamique) ; mais cette fois, comme $\alpha < \alpha_{lim}$, le mouvement est décéléré :

$$\ddot{X} = g \cos \alpha (\tan \alpha - \tan \alpha_{lim}) < 0$$

En intégrant par rapport à t , avec la condition initiale $\vec{v}(t = 0) = \dot{X}(0)\vec{e}_X = v_0\vec{e}_X$:

$$\dot{X} = v_0 - g \cos \alpha (\tan \alpha_{lim} - \tan \alpha) \cdot t$$

$$X = v_0 t - \frac{1}{2} g \cos \alpha (\tan \alpha_{lim} - \tan \alpha) \cdot t^2$$

L'instant d'arrêt vérifie $\dot{X}(t = t_a) = 0$

$$t_a = \frac{v_0}{g \cos \alpha (\tan \alpha_{lim} - \tan \alpha)}$$

Et la distance d'arrêt

$$X(t = t_a) = d_a = \frac{v_0^2}{2g \cos \alpha (\tan \alpha_{lim} - \tan \alpha)} = \frac{v_0^2}{2g(f \cos \alpha - \sin \alpha)}$$

À cet instant précis, le glissement cesse puisque la vitesse est nulle. Comme $\alpha < \alpha_{lim}$, la réaction est incluse au cône de frottement, la condition de non glissement est vérifiée, et le glissement ne peut reprendre.

6) On choisit un nouveau paramétrage du système, avec un axe (OX) d'origine le point de départ du solide. Comme il y a une vitesse initiale vers le haut, le solide commence par glisser vers le haut, avec $\vec{v}(t = 0) = \dot{X}(0)\vec{e}_X = -v_0\vec{e}_X$ ($v_g < 0$).

BAME : dans la base $(\vec{e}_X; \vec{e}_Y)$

$$\text{Poids } \vec{P} = m\vec{g} = \begin{pmatrix} mg \sin(\alpha) \\ -mg \cos(\alpha) \end{pmatrix} ;$$

$$\text{réaction normale } \vec{R}_N = \begin{pmatrix} 0 \\ R_N \end{pmatrix} ; \quad \text{réaction tangentielle } \vec{R}_T = \begin{pmatrix} R_T \\ 0 \end{pmatrix}$$

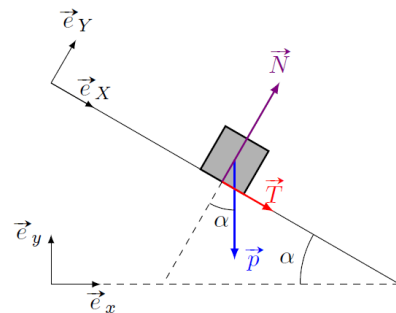
Avec R_T algébrique. En présence de mouvement, $\vec{R}_T \cdot \vec{v} = R_T \dot{X} < 0$, avec $\dot{X} < 0$, soit $R_T > 0$

$$\text{PFD : } m\vec{a} = \vec{P} + \vec{R}_N + \vec{R}_T$$

$$\text{Projection sur } \vec{e}_X : mg \sin(\alpha) + 0 + R_T = m\ddot{X} \Leftrightarrow R_T = m\ddot{X} - mg \sin(\alpha)$$

$$\text{Projection sur } \vec{e}_Y : -mg \cos(\alpha) + R_N + 0 = 0 \Leftrightarrow R_N = mg \cos(\alpha)$$

Phase 1 : le pavé monte puis s'immobilise.



Phase 2 : le pavé reste immobile OU le pavé redescend.

Loi du frottement de Coulomb en présence de glissement : $|R_T| = f|R_N|$ soit ici $R_T = fR_N$

$$= fmg \cos(\alpha) = m\ddot{X} - mg \sin(\alpha) \Leftrightarrow$$

$$\ddot{X} = g(\sin(\alpha) + f \cos(\alpha))$$

$$\boxed{\ddot{X} = g \cos(\alpha) (\tan \alpha + \tan \alpha_{lim})}$$

En intégrant par rapport à t , avec la condition initiale $\vec{v}(t=0) = \dot{X}(0)\vec{e}_X = -v_0\vec{e}_X$:

$$\dot{X} = g(\sin(\alpha) + f \cos(\alpha)) \cdot t - v_0$$

$$X = \frac{1}{2}g(\sin(\alpha) + f \cos(\alpha)) \cdot t^2 - v_0t$$

L'instant d'arrêt vérifie $\dot{X}(t = t_a) = 0$

$$\text{On obtient alors que la vitesse s'annule pour } \dot{X}(t_a) = g(\sin(\alpha) + f \cos(\alpha))t_a - v_0 = 0 \Rightarrow t_a = \frac{v_0}{g(\sin(\alpha) + f \cos(\alpha))}$$

À cet instant précis, le solide ne glisse pas par rapport au support.

Faisons l'hypothèse qu'il reste immobile ultérieurement.

Le solide reste immobile ssi $R_T \leq f_s R_N$, avec $R_N = mg \cos \alpha$ et $R_T = mg \sin \alpha$, soit ssi $\tan \alpha < f_s = \tan \alpha_{lim}$.

Si $\alpha < \alpha_{lim}$, le résultat est cohérent avec le cadre de l'étude, l'hypothèse statique est donc validée, le mouvement ne reprend pas et le solide reste à l'endroit en haut de la pente atteint.

En revanche, dans le cas où $\alpha > \alpha_{lim}$, le résultat est incohérent, l'hypothèse statique est donc fautive, et il y a glissement. Le solide repart donc dans l'autre sens, et l'étude correspond alors à celle de la question précédente.

Exercice 2. Freinage d'une voiture

Système : Voiture de masse m étudiée dans le référentiel terrestre supposé galiléen.

BAME : Poids $\vec{P} = m\vec{g}$, réaction \vec{R} du support (la route) : $E_p = E_{pp} = mgz + cte$ où z verticale ascendante. En l'absence d'informations, on supposera le trajet horizontal.

TEM : théorème de l'énergie mécanique entre le point A de début de freinage et le point B d'arrêt de la voiture

$$\Delta E_m = W_{nc} = W(\vec{R}) = W(\vec{R}_N + \vec{R}_T) = W(\vec{R}_T)$$

$$\text{Or } \Delta E_m = \Delta E_c + \underbrace{\Delta E_p}_{=0: \text{trajet horizontal}} = 0 - \frac{1}{2}mv_0^2 + 0$$

Loi du frottement de Coulomb en présence de glissement : $R_T = fR_N$

PFd (en supposant le trajet horizontal) projeté sur la verticale : $R_N = mg$ d'où $R_T = fR_N = fmg$

on a donc $W(\vec{R}) = W(\vec{R}_N + \vec{R}_T) = W(\vec{R}_T) = -fmgd$ avec d la distance d'arrêt recherchée, soit

$$\Delta E_m = W_{nc} \Leftrightarrow -\frac{1}{2}mv_0^2 = -fmgd \Leftrightarrow \boxed{d = \frac{v_0^2}{2fg}}$$

Analyse :

— la formule est bien homogène

— plus f est élevé plus la distance de freinage est faible, ce qui est cohérent.

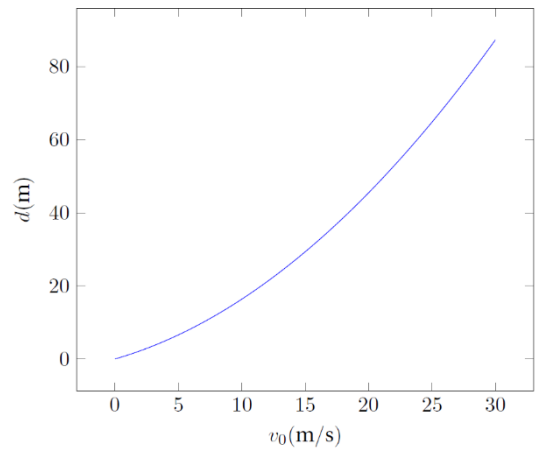
— la distance de freinage augmente avec le carré de la vitesse (quand on va deux fois plus vite, il faut une distance 4 fois plus élevée pour s'arrêter). Cela correspond bien aux informations lors de l'obtention du permis de conduire.

— en réalité il faut tenir compte du temps de réaction τ de l'automobiliste, si bien que la distance totale de freinage s'écrit plutôt

$$d_{réelle} = v_0 \tau + \frac{v_0^2}{2fg}$$

Résolution numérique avec $\tau \approx 1$ s (si on n'est pas trop fatigué et assez concentré) et $f \approx 0,8$:

La vitesse en deçà de laquelle le premier terme domine (en égalisant les termes) et de l'ordre de $v_{lim} = 2fg\tau \approx 15 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1} = 50 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$



Exercice 3. Détermination expérimentale d'un coefficient de frottement solide

Hypothèse : non glissement

BAME pour le système pavé de masse m_1 : poids $\vec{P}_1 = m_1 \vec{g}$; réaction du support solide $\vec{R}_{N1} + \vec{R}_{T1}$; tension \vec{T}_1 exercée par la corde sur le pavé.

BAME pour le système masse m_2 : poids $\vec{P}_2 = m_2 \vec{g}$; tension \vec{T}_2 exercée par la corde sur la masse m_2 .

La corde et la poulie étant idéales, on a $\|\vec{T}_1\| = \|\vec{T}_2\|$

On a par projection de la seconde loi de Newton en statique appliquée au système de masse m_2 : $m_2 g = T_2 = T_1$

seconde loi de Newton en statique appliquée au système de masse m_1 : $R_{N1} = m_1 g$ et $R_{T1} = T_1 = m_2 g$

Loi de Coulomb du non glissement : $R_{T1} \leq f R_{N1} \Leftrightarrow m_2 \leq f m_1$

Cette hypothèse n'est plus vérifiée et il y a glissement si $m_2 > f m_1$

On suppose cette condition vérifiée par la suite.

L'étude du mouvement se fait alors en deux étapes supplémentaires :

Première phase : étude de la chute de la masse m_2 , qui tombe jusqu'au sol de la hauteur h . La masse m_1 parcourt la même distance h que la masse m_2 et se déplace à la même vitesse, la corde restant tendue. Dans ce cas, on convertit l'énergie potentielle de pesanteur de m_2 en énergie cinétique pour les deux masses et en travail dissipé par frottement...

Comme il y a glissement, on a cette fois $R_{T1} = f R_{N1}$.

On peut alors appliquer le théorème de l'énergie mécanique au système $\{m_1; m_2\}$ entre le point A de début de mouvement et le point B où la masse m_2 touche le sol, avec une vitesse finale v_f :

$$\Delta E_m = W_{nc} = W(\vec{R}) = W(\vec{R}_{N1} + \vec{R}_{T1}) = W(\vec{R}_{T1}) = -f m_1 g h$$

$$\text{Or } \Delta E_m = \Delta E_c + \Delta E_p = \underbrace{\frac{1}{2}(m_1 + m_2)v_f^2}_{\substack{\text{vitesse finale atteinte} \\ \text{identique pour les deux masses}}} - \underbrace{0}_{\substack{\text{vitesse initiale} \\ \text{nulle}}} - \underbrace{m_2 g h}_{\substack{\text{seule l'altitude de} \\ m_2 \text{ varie}}}$$

d'où finalement la vitesse v_f à la fin de la première phase : $v_f^2 = \frac{2}{m_1 + m_2} (m_2 g h - f m_1 g h) = 2 \frac{(m_2 - f m_1)}{m_1 + m_2} g h$

Deuxième phase : l'énergie cinétique de la masse m_2 est dissipée par le sol au cours de l'impact et la masse m_1 va continuer à glisser sur le plan. La corde n'est alors plus tendue, et les seules forces s'exerçant sur la masse m_1 sont le poids et la réaction du support, contenant le frottement solide. Ce frottement va dissiper de l'énergie et ralentir le mouvement jusqu'à l'arrêt complet du pavé, après une nouvelle distance parcourue d .

TEM : Théorème de l'énergie mécanique entre le point B précédent et le point C d'arrêt du pavé :

$$\Delta E_m = W_{nc} = W(\vec{R}) = W(\vec{R}_{N1} + \vec{R}_{T1}) = W(\vec{R}_{T1}) = -f m_1 g d$$

$$\text{Or } \Delta E_m = \Delta E_c + \Delta E_p = \underbrace{0}_{\substack{\text{point C=} \\ \text{point d'arrêt}}} - \underbrace{\frac{m_1}{m_1+m_2}(m_2 - fm_1)gh}_{\substack{\text{vitesse en B} \\ =v_f}} - \underbrace{0}_{\substack{\text{mouvement} \\ \text{horizontal}}}$$

$$\frac{m_1}{m_1+m_2}(m_2 - fm_1)gh = fm_1gd \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{m_1+m_2}(m_2 - fm_1)h = fd \quad \Leftrightarrow \quad (m_2 - fm_1)h = fd(m_1+m_2)$$

Soit

$$f = \frac{m_2 h}{(m_1 + m_2)d + m_1 h}$$

Plus la distance d'arrêt d est faible, plus le coefficient de frottement est élevé : cohérent. Par ailleurs, plus $m_2 h$ est élevée, plus l'énergie potentielle initiale de m_2 est élevée, plus l'énergie cinétique conférée à m_1 au point B est élevée. Pour une distance d'arrêt donnée, plus $m_2 h$ est élevée, plus il y avait d'énergie cinétique à dissiper par frottements, plus f est élevé.

Exercice 4. Comment monter sur une échelle sans glisser

Pour que la montée soit sécurisée, il faut que l'échelle reste à l'équilibre tout au long de la montée de l'opérateur, donc quelle que soit sa position sur l'échelle. On la repèrera en considérant l'axe (Bx) de l'échelle d'origine B le point d'appui au sol.

Système : opérateur + échelle, étudié dans le référentiel terrestre considéré comme galiléen.

BAME : poids $\vec{P} = m\vec{g}$; réaction du sol sur l'échelle au point B : $\vec{R}_{N1} + \vec{R}_{T1}$; réaction du mur sur l'échelle au point H le plus haut : \vec{R}_{N2} (on néglige les frottements avec le mur).

Condition d'équilibre 1 : principe de la statique pour le système opérateur + échelle (dans le référentiel du laboratoire considéré comme galiléen) :

$$\sum \vec{F}_{ext} = \vec{0} = m\vec{g} + \vec{R}_{N1} + \vec{R}_{T1} + \vec{R}_{N2}$$

En projetant : $R_{N1} = mg$ et $R_{T1} = R_{N2}$

Condition d'équilibre 2 : Pour un solide qu'on ne suppose pas ponctuel, il faut également considérer dans la condition d'équilibre que la somme des moments des forces extérieures est nulle : $\sum \vec{\mathcal{M}}_{ext/0} = \vec{0}$. Ici, on considère le point O correspondant à l'arrête sol-mur et on projette la relation sur l'axe $\Delta = (Oz)$ passant par O et perpendiculaire au plan de la feuille.

$$\sum \vec{\mathcal{M}}_{ext/0} \cdot \vec{u}_z = 0 = (\vec{\mathcal{M}}_0(\vec{P}) + \vec{\mathcal{M}}_0(\vec{R}_{N1}) + \vec{\mathcal{M}}_0(\vec{R}_{T1}) + \vec{\mathcal{M}}_0(\vec{R}_{N2})) \cdot \vec{u}_z$$

En choisissant le sens positif de rotation dans le sens trigonométrique :

$$\vec{\mathcal{M}}_0(\vec{R}_{N1}) \cdot \vec{u}_z = OBR_{N1} = L \cos \alpha R_{N1} \quad \vec{\mathcal{M}}_0(\vec{R}_{N2}) \cdot \vec{u}_z = -OHR_{N2} = -L \sin \alpha R_{N2} \quad \vec{\mathcal{M}}_0(\vec{R}_{T1}) \cdot \vec{u}_z = 0$$

$$\vec{\mathcal{M}}_0(\vec{P}) \cdot \vec{u}_z = -mg(L-x) \cos \alpha \quad \text{soit avec } \sum \vec{\mathcal{M}}_{ext/0} \cdot \vec{u}_z = 0 \quad \text{et } R_{N1} = mg \quad \text{et } R_{T1} = R_{N2}$$

$$L \cos \alpha R_{N1} - L \sin \alpha R_{N2} - mg(L-x) \cos \alpha = 0 \quad \Leftrightarrow \quad mg L \cos \alpha - mg(L-x) \cos \alpha = L \sin \alpha R_{N2} = mgx \cos \alpha$$

$$\Leftrightarrow \quad R_{N2} = \frac{mgx}{L \tan(\alpha)} = R_{T1}$$

La **condition de non glissement** qui permet de monter à l'échelle s'écrit alors :

$$R_{T1} \leq f R_{N1} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{mgx}{L \tan(\alpha)} \leq fmg$$

Pour monter de x le long de l'échelle, il faut donc $\tan(\alpha) \geq \frac{x}{fL}$

Pour monter jusqu'en haut : $x = L$ soit $\tan(\alpha) \geq \frac{1}{f}$

Remarque : il était encore plus simple d'appliquer le TMC pour l'axe passant par le point B.

En choisissant le sens positif de rotation dans le sens trigonométrique :

$$\begin{aligned} \vec{\mathcal{M}}_B(\vec{R}_{N1}) \cdot \vec{u}_z &= 0 & \vec{\mathcal{M}}_B(\vec{R}_{N2}) \cdot \vec{u}_z &= -OBR_{N2} = -L \sin \alpha R_{N2} & \vec{\mathcal{M}}_B(\vec{R}_{T1}) \cdot \vec{u}_z &= 0 \\ \vec{\mathcal{M}}_B(\vec{P}) \cdot \vec{u}_z &= +mgx \cos \alpha & \text{soit avec } \sum \vec{\mathcal{M}}_{ext/0} \cdot \vec{u}_z &= 0 & \text{et } R_{N1} &= mg \text{ et } R_{T1} = R_{N2} \\ & & L \sin \alpha R_{N2} &= mgx \cos \alpha \\ & \Leftrightarrow R_{N2} &= \frac{mgx}{L \tan(\alpha)} = R_{T1} \end{aligned}$$

La condition de non glissement qui permet de monter à l'échelle s'écrit alors

$$R_{T1} \leq fR_{N1} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{mgx}{L \tan(\alpha)} \leq fmg$$

Pour monter de x le long de l'échelle, il faut donc $\tan(\alpha) \geq \frac{x}{fL}$

Pour monter jusqu'en haut : $x = L$ soit $\tan(\alpha) \geq \frac{1}{f}$

Exercice 5. Oscillateur à frottement solide

1) **Système** point M de masse m étudié dans le référentiel du laboratoire supposé galiléen.

Cinématique : $\vec{OM} = x \vec{e}_x$; $\vec{a} = \ddot{x} \vec{e}_x$

BAME : poids $\vec{P} = m\vec{g}$; réaction du sol: $\vec{R}_N + \vec{R}_T$; Force de rappel élastique exercée par le ressort : $\vec{F}_e = -kx\vec{e}_x$

Projections de la **seconde loi de Newton** (théorème de la résultante dynamique) :

$$\begin{aligned} R_N &= mg \\ m\ddot{x} &= R_T - kx \end{aligned}$$

Où $\vec{R}_T = R_T \vec{e}_x$ avec R_T algébrique.

2) Hypothèse : non glissement (M ne se met pas en mouvement).

On a alors $\ddot{x} = 0$ soit $R_N = mg$ et $R_T = kx_0$, avec $|R_T| \leq fR_N \quad \Leftrightarrow \quad k|x_0| \leq fmg \quad \Leftrightarrow \quad |x_0| \leq \frac{fmg}{k} = x_s$.

Par contraposée, il y a mouvement pour $|x_0| > \frac{fmg}{k} = x_s$.

3) **Première phase** : On a $x_0 > \frac{fmg}{k} = x_s > 0$, il y a donc à $t = 0$ mouvement, soit d'après la loi de Coulomb :

$|R_T| = fR_N = fmg$ et $R_T \dot{x} < 0$ (réaction tangentielle opposée à la vitesse de glissement).

A $t = 0$, avec $x_0 > 0$, le ressort est étiré, on a donc $\dot{x}(t=0) < 0$, soit $R_T > 0$, donc $R_T = fmg$. Or $m\ddot{x} = R_T - kx$, d'où :

$$m\ddot{x} + kx = fmg$$

$$\boxed{\ddot{x} + \omega_0^2 x = fg \quad \text{où} \quad \omega_0^2 = \frac{k}{m}}$$

Oscillateur harmonique non amorti : $x_1(t) = \underbrace{A \cos(\omega_0 t) + B \sin(\omega_0 t)}_{SGEH} + \underbrace{\frac{fg}{\omega_0^2}}_{SPEC}$ où $\frac{fg}{\omega_0^2} = \frac{fmg}{k} = x_s$

C.I.C.I. (constantes d'intégration à l'aide des conditions initiales) : on a $x_1(t=0) = x_0$ et $\dot{x}_1(t=0) = 0$

$x_1(t=0) = x_0 = A + x_s$ soit $A = x_0 - x_s$

$$\dot{x}_1(t) = -A\omega_0 \sin(\omega_0 t) + B\omega_0 \cos(\omega_0 t)$$

$\dot{x}_1(t=0) = 0 = 0 + B\omega_0$ soit $B = 0$.

Finalement : $x_1(t) = (x_0 - x_s) \cos(\omega_0 t) + x_s$ et $\dot{x}_1(t) = -(x_0 - x_s)\omega_0 \sin(\omega_0 t)$

Il s'agit d'un mouvement sinusoïdal centré sur x_s , d'amplitude $x_0 - x_s$

Remarque : Lors de cette première phase, dans les premiers instants, on a $\sin(\omega_0 t) > 0$ soit $\dot{x} = -\underbrace{(x_0 - x_s)}_{>0} \underbrace{\omega_0}_{>0} \sin(\omega_0 t) <$

0 : l'hypothèse du début de la mise en équation est bien validée.

- 4) Instant t_{1m} où la vitesse s'annule pour la première fois à partir de $t = 0$: premier instant où $\sin(\omega_0 t) = 0$ à partir de $t = 0$ soit $\omega_0 t_{1m} = \pi$, on a alors

$$x_{1m} = x_1(t_{1m}) = (x_0 - x_s) \cos(\omega_0 t_{1m}) + x_s = (x_0 - x_s) \cos(\pi) + x_s = 2x_s - x_0 = x_{1m}$$

Le mouvement continue si cette nouvelle position vérifie la condition de glissement établie précédemment, soit

$$|x_0| > \frac{fmg}{k} = x_s \text{ qui devient ici}$$

$$|2x_s - x_0| > \frac{fmg}{k} = x_s \Leftrightarrow \begin{cases} 2x_s - x_0 > x_s \\ \text{ou} \\ x_0 - 2x_s > x_s \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_s > x_0 : \text{impossible, incohérent avec la condition de mouvement initial} \\ \text{ou} \\ x_0 > 3x_s \end{cases}$$

Ainsi, si $x_0 > 3x_s$, M repart et le mouvement se poursuit ; si $x_s < x_0 < 3x_s$, seule la 1^{ère} étape a lieu ; enfin, si $x_s > x_0$, aucun mouvement.

- 5) On suppose que le mouvement continue, on est donc dans le cas de figure $x_0 > 3x_s$. On a $\omega_0 t_{1m} = \pi$, soit $t_{1m} = \frac{T}{2}$.

A $\frac{T}{2}$, la vitesse s'est annulée en $x_{1m} = 2x_s - x_0 < 0$, position dans laquelle le ressort est comprimé. Le mouvement va donc a priori reprendre en sens inverse avec $\dot{x}(\frac{T}{2}) < 0$. La nouvelle situation ressemble en tous points à celle de la question précédente, hormis le sens d'évolution de x donc le signe de R_T .

le ressort est comprimé, on a donc $\dot{x}(T/2) > 0$, soit $R_T < 0$, donc $R_T = -fmg$, or $m\ddot{x} = R_T - kx$, d'où :

$$m\ddot{x} + kx = -fmg$$

$$\boxed{\ddot{x} + \omega_0^2 x = -fg \quad \text{où} \quad \omega_0^2 = \frac{k}{m}}$$

Seul le second membre est modifié, donc la solution particulière :

$$\text{Oscillateur harmonique non amorti : } x_1(t) = \underbrace{A_1 \cos(\omega_0 t) + B_1 \sin(\omega_0 t)}_{SGEH} - \underbrace{\frac{fg}{\omega_0^2}}_{SPEC} \quad \text{où} \quad \frac{-fg}{\omega_0^2} = -\frac{fmg}{k} = -x_s$$

C.I.C.I. (constantes d'intégration à l'aide des conditions initiales) : on a $x_1(\frac{T}{2}) = 2x_s - x_0$ et $\dot{x}_1(\frac{T}{2}) = 0$

$$x_1(\frac{T}{2}) = 2x_s - x_0 = -A_1 - x_s \quad \text{soit} \quad A_1 = x_0 - 3x_s$$

$$\dot{x}_1(t) = -A_1 \omega_0 \sin(\omega_0 t) + B_1 \omega_0 \cos(\omega_0 t)$$

$$\dot{x}_1(\frac{T}{2}) = 0 = 0 + B_1 \omega_0 \quad \text{soit} \quad B_1 = 0.$$

$$\text{Finalement : } \boxed{x_1(t) = (x_0 - 3x_s) \cos(\omega_0 t) - x_s} \quad \text{et} \quad \dot{x}_1(t) = -(x_0 - 3x_s) \omega_0 \sin(\omega_0 t)$$

Il s'agit d'un mouvement sinusoïdal centré sur $-x_s$, d'amplitude $x_0 - 3x_s$.

Il s'arrête à l'instant t_{2m} où la vitesse s'annule pour la première fois à partir de $t = t_{1m} = \frac{T}{2}$, soit le premier instant où $\sin(\omega_0 t) = 0$ à partir de $t_{1m} = \frac{T}{2}$ ou encore à partir de $\omega_0 t_{1m} = \pi$: il s'agit de l'instant t_{2m} tel $\omega_0 t_{2m} = 2\pi$, soit de l'instant $t_{2m} = T$.

$$\text{On a alors } x_{2m} = x_1(t_{2m}) = (x_0 - 3x_s) \cos(\omega_0 t_{2m}) - x_s = (x_0 - 3x_s) \cos(2\pi) - x_s = x_0 - 4x_s = x_{2m}$$

Le mouvement continue si cette nouvelle position vérifie la condition de glissement établie précédemment, soit ici

$$|x_0 - 4x_s| > \frac{fmg}{k} = x_s \Leftrightarrow \begin{cases} 4x_s - x_0 > x_s \\ \text{ou} \\ x_0 - 4x_s > x_s \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3x_s > x_0 : \text{impossible, incohérent avec la condition de mouvement initial} \\ \text{ou} \\ x_0 > 5x_s \end{cases}$$

Ces résultats se généralisent avec une équation différentielle de la forme $\ddot{x} + \omega_0^2 x = \varepsilon fg$ où $\omega_0^2 = \frac{k}{m}$ et ε du signe opposé à la vitesse \dot{x} . Tous les $\frac{T}{2}$, l'équation différentielle vérifiée varie, avec des oscillations autour d'une valeur moyenne εx_s .

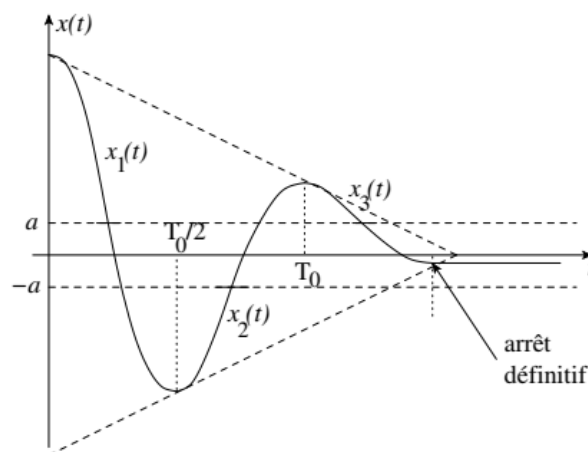
Les élongations *maximales* (x_{im} pour i pair) sont : $x_{0m} = x_0$; $x_{2m} = x_0 - 4x_s$; $x_{4m} = x_0 - 8x_s$; etc.

Les élongations *minimales* (x_{im} pour i impair) sont : $x_{1m} = x_0 - 2x_s$; $x_{3m} = x_0 - 6x_s$; etc.

L'évolution en progression arithmétique des positions extrêmes fait que l'enveloppe de la courbe est constituée de deux droites.

La variation entre deux sommets est de $4x_s$, jusqu'à ce que l'énergie ne soit plus suffisante pour vaincre les frottements et permettre une nouvelle oscillation.

Le mouvement s'arrête lorsque le système atteint une position $|x_{im}| < x_s$ soit $x_{im} \in]-x_s; x_s[$, qui correspond alors à une plage de potentielles positions d'équilibre atteintes selon les conditions initiales appliquées, et qui ne coïncide généralement pas avec la position d'équilibre à frottement nul (ou à frottement visqueux).



Observations :

- il existe une plage de positions d'équilibre (et non pas une position d'équilibre unique comme pour l'oscillateur à frottement fluide), dépendant des conditions initiales : $x_{\text{éq}} = x_{im} \in]-x_s; x_s[$
- le pavé effectue un nombre fini d'oscillations et s'arrête au bout d'un temps fini (et non pas au bout d'un temps infini comme pour l'oscillateur à frottement fluide)
- l'enveloppe du graphe de $x(t)$ est constituée de deux droites (et non pas de deux exponentielles comme pour l'oscillateur à frottement fluide)

6) script python : Il permet notamment de modifier les paramètres du montage expérimental et de voir en quoi la réponse pseudo-oscillante est modifiée.

```
### oscillateur avec frottement solide
import matplotlib.pyplot as plt
import numpy as np
```

```

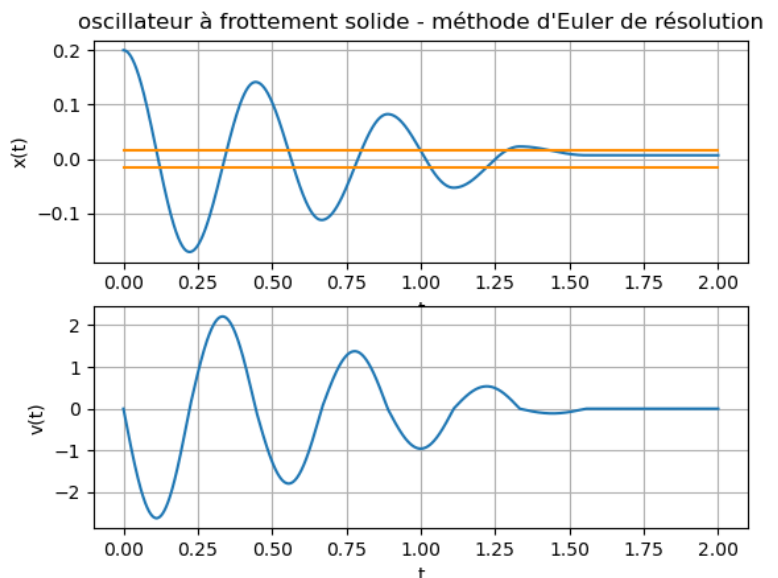
#constantes : alpha = fg et omega=sqrt(k/m)
f = 0.3
m = 0.5
k = 100
g = 10
alpha = f*g
omega = np.sqrt(k/m)
a = f*m*g/k
print('a =',a,'m')
t0 = 0
tf = 2 # seconde
N=10000
x0 = 0.15 # Condition initiale
y0 = 0

t = np.linspace(t0, tf, N) # Création des instants de calculs
Te=tf/(N-1)
x,y=[x0],[y0]

#méthode d'Euler explicite sur une équation d'ordre 2
for n in range(1,N):
    pos=x[n-1]
    vitesse=y[n-1]
    x.append(pos+Te*vitesse)
    if vitesse<0 :
        y.append(vitesse-omega**2*Te*pos+alpha*Te)
    else:
        y.append(vitesse-omega**2*Te*pos-alpha*Te)

plt.subplot(2,1,1)
plt.xlabel("t")
plt.ylabel("x(t)")
#plt.xlim(0,5.5)
plt.plot(t,x)
plt.plot((t0,tf),(a,a),color='darkorange')
plt.plot((t0,tf),(-a,-a),color='darkorange')
plt.title("oscillateur à frottement solide - méthode d'Euler de résolution")
plt.grid()
plt.subplot(2,1,2)
plt.xlabel("t")
plt.ylabel("v(t)")
plt.plot(t,y)
plt.grid()
plt.show()

```



Exercice 6. Stick-slip

- 1) La masse est initialement entraînée par le tapis, la force de rappel du ressort étant initialement nulle (vitesse de glissement nulle). La force de rappel va augmenter au fur et à mesure que la masse est entraînée par le tapis (et donc que la longueur du ressort augmente), de même que la composante tangentielle de la réaction du tapis sur la masse. Pour un certain allongement du ressort, la force de rappel exercée par le ressort sera suffisante pour que le critère de non glissement ne soit plus vérifié (la réaction du support sort du cône de frottement), et que la masse se mette en mouvement et glisse pour revenir en arrière puis en avant (oscillations) jusqu'à se retrouver en vitesse relative nulle par rapport au tapis (la vitesse de glissement devient nulle). Se pose alors la question de savoir si le mobile reste en contact non glissant avec le tapis, ou si ce cycle reprend.
- 2) Hypothèse de travail : vitesse de glissement du point M par rapport au tapis nulle.

Système : point M de masse m étudié dans le référentiel du laboratoire supposé galiléen.

Cinématique : $\overrightarrow{OM} = x \vec{e}_x$; $\vec{v} = \dot{x} \vec{e}_x$; $\vec{a} = \ddot{x} \vec{e}_x$. Dans le cadre de l'hypothèse de non glissement par rapport au tapis, le point M est entraîné à la vitesse du tapis ; on a donc $\vec{v} = \dot{x} \vec{e}_x = \vec{v}_t = \overrightarrow{ct\vec{e}}$ soit $\dot{x} = 0$, et $x = v_t t$.

BAME : poids $\vec{P} = m\vec{g}$; réaction du tapis : $\vec{R}_N + \vec{R}_T$; Force de rappel élastique exercée par le ressort : $\vec{F}_e = -kx\vec{e}_x$

Projections de la seconde loi de Newton (théorème de la résultante dynamique) :

$$R_N = mg$$

$$m\ddot{x} = R_T - kx \quad \underbrace{=}_{\text{pas de glissement}} \quad 0$$

On a donc $R_N = mg$ et $R_T = kx$, avec $|R_T| \leq f_s R_N$

. La masse ne glisse pas tant que $|R_T| \leq f_s R_N$ reste vérifiée, soit $kx \leq f_s mg \Leftrightarrow x \leq \frac{f_s mg}{k} = x_{max}$

- 3) Lorsque x atteint x_{max} , la masse commence à glisser, la projection de la seconde loi de Newton devient

$$R_N = mg$$

$$m\ddot{x} = R_T - kx$$

Loi de Coulomb dynamique : $R_T = f_d R_N$: $m\ddot{x} = f_d mg - kx$

Puis avec la condition de nullité sur le coefficient de frottement :

$$\boxed{\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0 \quad \text{où} \quad \omega_0^2 = \frac{k}{m}}$$

- 4) Pour que cette phase de glissement cesse (hypothèse de non glissement) :

Condition nécessaire : la vitesse relative au tapis (vitesse de glissement) doit être nulle ; il faut donc $\vec{v} = \dot{x} \vec{e}_x = \vec{v}_t$ (lorsque la vitesse de la masse devient à nouveau égale à v_t).

À cet instant, le glissement ne peut s'interrompre que si la condition statique est vérifiée, soit $|R_T| = k|x| \leq f_s R_N = f_s mg$, i.e. que $|x| < x_{max}$.

Cette nouvelle phase d'arrêt (d'accroche sur le tapis) n'est donc possible que si ces deux conditions sont vérifiées.

Une fois que la masse est accrochée par le tapis, la distance va progressivement augmenter jusqu'à x_{max} pour à nouveau décrocher

- 5)

```
import matplotlib.pyplot as plt
```

```
import numpy as np
```

```
#Constantes physiques
```

```
k = 3 # N/m
```

```

m = 1 # kg
f = 0.5 # sans unité
vt = 0.5 # m/s
g = 10 # m/s^2
pas = 0.001 # pas de résolution temporelle
N = 100000 # nombre d'instants de résolution
x_0 = 0 # position initiale
v_0 = 1 # vitesse initiale

xmax = f * m * g / k #m - distance maximale
print ("x_max =",xmax)

#fonction euler prenant en entrée le pas temporel de résolution dt, le nombre de
point, les conditions initiales
#fonction renvoyant en sortie trois tableaux ; position, vitesse et temps

def euler(dt,N,xi,vi,eps) :
    x = np.zeros(N) + xi
    v = np.zeros(N) + vi
    t = np.zeros(N)

    for i in range(1,N) :
        if abs(v[i-1] - vt) < eps and abs(x[i-1]) < xmax + eps :
            # on est en condition de glissement
            # On a rajouté une variable eps permettant de mettre une condition de comparaison
            entre la vitesse et celle de référence
                v[i] = vt
                x[i] = x[i-1] + vt * dt
                t[i] = t[i-1] + dt
            else :
                a = - k / m * x[i-1]
                v[i] = v[i-1] + a * dt
                x[i] = x[i-1] + v[i-1] * dt
                t[i] = t[i-1] + dt
    return (x,v,t)

# On trace les courbes de positions et vitesse en fonction du temps
# On trace position en fonction de la vitesse (il s'agit d'un portrait de phase)

x,v,t = euler(pas,N,x_0,v_0,0.1)

```

```

plt.figure(1)
plt.plot(v,x)
plt.ylabel('Position')
plt.xlabel('Vitesse')
plt.title('portrait de phase du Collé Glissé')
plt.savefig('portrait.png')
plt.show()

```

```

# plt.figure(2)
# plt.plot(t,x,label="position")
# plt.plot(t,v,label="vitesse")
# plt.xlabel('temps')
# plt.legend()
# plt.show()

```

```

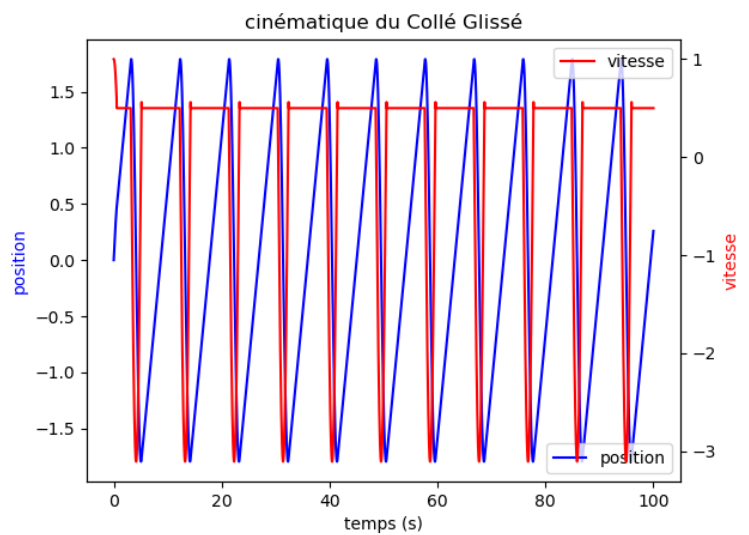
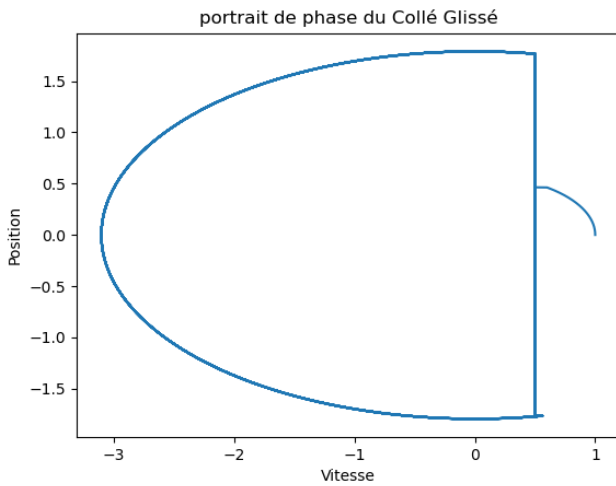
fig, ax1 = plt.subplots()
ax1.plot(t, x, 'b-',label = 'position')
ax1.set_xlabel('temps (s)')
ax1.set_ylabel('position',color='b')
plt.legend()
ax2 = ax1.twinx()
ax2.plot(t, v, 'r-',label='vitesse')
ax2.set_ylabel('vitesse',color='r')
plt.legend()
plt.title('cinématique du Collé Glissé')
plt.savefig('cinématique.png')
plt.show()

```

```

# plt.figure(3)
# plt.plot(t,1/2*k*x**2,label='Ep_ressort')
# plt.xlabel('temps')
# plt.legend()
# plt.show()

```



EXERCICES INCONTOURNABLES

Exercice 7. Equilibre sur un plateau tournant

Système : solide de masse m , étudié dans le référentiel du laboratoire supposé galiléen.

BAME : poids $\vec{P} = m\vec{g}$; réaction du sol : $\vec{R}_N + \vec{R}_T$;

Hypothèse : non glissement, le solide reste immobile par rapport au plateau, à la distance d de l'axe de rotation.

Cinématique : mouvement de rotation dans le plan du plateau, à la vitesse du plateau dans le cadre de l'hypothèse de non glissement :

coordonnées cylindriques : $\vec{OM} = r\vec{u}_r$; $\vec{v} = r\omega \vec{u}_\theta$; $\vec{a} = -r\dot{\theta}^2\vec{u}_r = -r\omega^2\vec{u}_r$

Projections de la **seconde loi de Newton** (théorème de la résultante dynamique) : $R_N = mg$ et $R_T = -md\omega^2$

Condition de validité de l'hypothèse : La masse ne glisse pas tant que $|R_T| \leq f_s R_N$ reste vérifiée, soit :

$md\omega^2 \leq f_s mg \Leftrightarrow d \leq \frac{f_s mg}{\omega^2} = r_{max}$: il ne faut pas déposer le solide trop loin de l'axe ! et ce d'autant plus que la vitesse de rotation est élevée.

Exercice 8. Curling

Système : pierre, étudié dans le référentiel terrestre supposé galiléen.

Bilan des actions mécaniques extérieures : poids \vec{P} , réaction normale du support $\vec{R} = \vec{R}_N$, force de frottement \vec{f} .

TEM entre la position initiale (vitesse v_0) et la position finale d'arrêt :

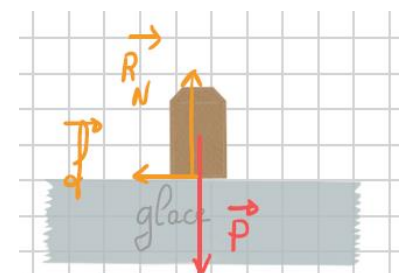
$$\Delta E_m = W_{nc} = W(\vec{f}) \underset{mvmt\ horizontal}{=} \Delta E_c \quad \text{soit} \quad 0 - \frac{1}{2}mv_0^2 = -fD$$

$$\frac{1}{2}mv_0^2 = fD$$

PFD projeté sur l'horizontale, en choisissant un axe (Ox) correspondant à la trajectoire de la pierre, d'origine O la position initiale de cette pierre :

$$m\ddot{x} = -f$$

En intégrant par rapport au temps, en exploitant les conditions initiales :



$$m\dot{x} = -ft + mv_0$$

A l'instant t_a de l'arrêt de la pierre, la vitesse étant nulle, on a donc

$$0 = -ft_a + mv_0 \quad v_0 = \frac{ft_a}{m}$$

Dans la relation issue du TEM :

$$\frac{1}{2}mv_0^2 = fD = \frac{1}{2}m\left(\frac{ft_a}{m}\right)^2 = \frac{1}{2}\frac{f^2t_a^2}{m}$$

Soit

$$t_a = \sqrt{\frac{2mD}{f}}$$

Exercice 9. Déménageur

- 1) Pour que le carton se mette en mouvement, il faut que la condition d'équilibre statique soit rompue. Il y a équilibre si

$$N = Mg \quad F + T = 0 \quad |T| \leq f_s N \Rightarrow F \leq f_s Mg$$

Donc il faut exercée une force supérieure à $f_s Mg$

- 2.a) Il y maintenant mouvement. La puissance vaut alors

$$P = -Fv = -f_d Mgv$$

Elle compense exactement la puissance fournie par le déménageur...

- 2.b) En appliquant le PFD au carton, on a :

$$Ma = F - f_d Mg \Rightarrow a = \frac{F}{M} - f_d g \Rightarrow v = \frac{F}{M}t - f_d gt \Rightarrow x = \left(\frac{F}{M} - f_d g\right)\frac{t^2}{2}$$

On a alors :

$$v(\Delta t) = V_0 = \left(\frac{F}{M} - f_d g\right)\Delta t \Rightarrow \Delta t = \frac{V_0}{\frac{F}{M} - f_d g}$$

et

$$x(\Delta t) = \left(\frac{F}{M} - f_d g\right)\frac{(\Delta t)^2}{2} = \frac{V_0^2}{2\left(\frac{F}{M} - f_d g\right)} = V_0 \Delta t / 2$$

Le travail fourni par l'opérateur vaut alors :

$$W_{op} = FL = FV_0 \frac{\Delta t}{2} = \left(M \frac{V_0}{\Delta t} + f_d Mg\right) \frac{\Delta t}{2} = \frac{MV_0^2}{2} + f_d Mg \frac{V_0 \Delta t}{2}$$

On retrouve bien les dépendances évoquées. La formule n'est pas très surprenante. Le premier terme est la variation d'énergie cinétique et le second le travail de frottement fourni ...

Exercice 10. Un traîneau sur la glace (Mines Pont MP 2019) 2 | ✂ 2

- 1) Soit $\vec{R} = \vec{N} + \vec{T}_a$ la force exercée par la glace sur le traîneau (\vec{N} composante normale et \vec{T}_a composante tangentielle).

Le traîneau ne décollant pas, la projection sur la normale à la glace du principe fondamental de la dynamique (loi de la quantité de mouvement) donne :

cas horizontal : $N = Mg$

cas de la pente : $N = Mg \cos \alpha$

En cas de glissement, la loi de Coulomb donne $T_a = \mu_d N$, soit:

cas horizontal : $T_a = \mu_d N = \mu_d Mg$

cas de la pente : $T_a = \mu_d N = \mu_d Mg \cos \alpha$

Dans ce cas de la pente, projection du PFD dans la direction du mouvement :

$$0 = T_a - Mg \sin(\alpha) = \mu_d Mg \cos \alpha - \underbrace{Mg \sin(\alpha)}_{\substack{\text{composante du poids} \\ \text{dans la direction de la pente}}} = Mg(\mu_d \cos \alpha - \sin(\alpha))$$

Pour pouvoir se ramener à une unique force au second membre du PFD, il faut poser $\mu'_d = \mu_d \cos \alpha + \sin \alpha$.

Pour α petit, on a alors $\mu'_d \approx \mu_d + \alpha$.

2) **Cas horizontal:** le traîneau reste immobile si $\vec{F} + \vec{T}_a = \vec{0}$ et $T_a < \mu_s N = \mu_s Mg$;

la valeur minimale de pour le démarrage est donc

$$F_{0,min} = \mu_s Mg \approx 4.10^2 \text{ N}$$

(Cas de la pente: le traîneau reste immobile si $F + T_a - Mg \sin(\alpha) = 0$ et $T_a < \mu_s N = \mu_s Mg \cos \alpha$; la valeur minimale de pour le démarrage est donc $F_{0,min} = \mu_s Mg \cos \alpha + Mg \sin(\alpha)$)

Pour la suite on prend $\alpha = 0$.

3) PFD (loi de la quantité de mouvement) projeté sur l'horizontale :

$$M \frac{dv}{dt} = -\mu_d Mg + F = -\mu_d Mg + F_0 - \beta v \quad \Leftrightarrow \quad \frac{dv}{dt} + \frac{\beta}{M} v = \frac{F_0}{M} - \mu_d g$$

Avec $v(t = 0) = 0$, on obtient donc

$$v(t) = v_{lim} \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}} \right) \quad v_{lim} = \frac{F_0 - \mu_d Mg}{\beta} \quad \tau = \frac{M}{\beta}$$

Date t_1 telle que $v(t_1) = 0,95v_0 \Rightarrow$

$$\beta = \frac{M \ln(20)}{t_1} = 3.10^2 \text{ kg} \cdot \text{s}^{-1} \quad \text{et} \quad F_0 = \beta v_0 + \mu_d Mg = 1,1.10^3 \text{ N}$$

4) Loi de quantité de mouvement

$$M\vec{a} = \vec{T} + \vec{T}_a + \vec{N} + \vec{P}$$

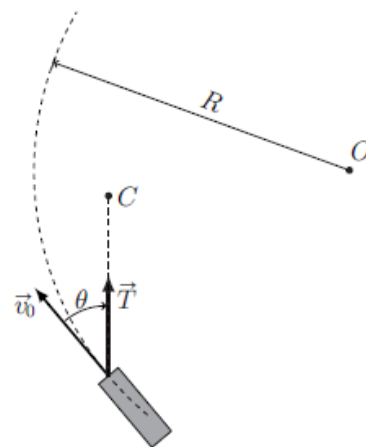
Mouvement circulaire uniforme : en introduisant les coordonnées cylindriques adaptées, on a

$$\vec{a} = -\frac{v_0^2}{R} \vec{u}_r \quad \vec{u}_r = \frac{\overrightarrow{OM}}{OM} = \frac{\overrightarrow{OM}}{R}$$

Projection de la loi de la quantité de mouvement sur la normale au plan de la trajectoire : $0 = N - Mg$ soit $N = Mg$

D'après les lois de Coulomb du frottement, en présence de glissement, \vec{T}_a est dirigée selon $-\vec{v}_0$ (soit selon $-\vec{u}_\theta$) avec $T_a = \mu_d N = \mu_d Mg$.

En projetant selon \vec{u}_r :



$$-M \frac{v_0^2}{R} = -T \sin \theta$$

En projetant selon \vec{u}_θ :

$$0 = T \cos \theta - T_a = T \cos \theta - \mu_d M g$$

Soit

$$T = \frac{\mu_d M g}{\cos \theta}$$

Or

$$M \frac{v_0^2}{R} = T \sin \theta = \frac{\mu_d M g}{\cos \theta} \sin \theta$$

Finalement :

$$\tan \theta = \frac{M \frac{v_0^2}{R}}{\mu_d M g} = \frac{v_0^2}{\mu_d R g}$$

En tenant de plus compte de la force de frottement fluide $-\beta \vec{v}_0$ on a :

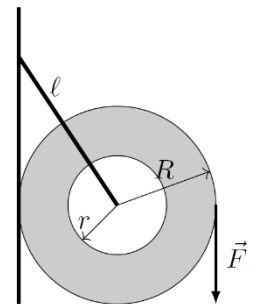
$$\tan \theta = \frac{M \frac{v_0^2}{R}}{\mu_d M g + \beta v_0} = \frac{M v_0^2}{R F_0}$$

Exercice 11. Rouleau de papier toilette *d'après Centrale* ! IMPORTANT | 2 | 2

1) **Système** : rouleau + tube étudié dans le référentiel du laboratoire supposé galiléen.

Bilan des actions mécaniques extérieures :

- la réaction du mur qui se décompose en ses composantes normale \vec{R}_N et tangentielle \vec{R}_T
- la force $\vec{F}_{b/t}$ qu'exerce la barre sur le tube. On suppose cette force colinéaire à la barre
- la force \vec{F}_{op} appliquée par l'opérateur



Soit θ l'angle que fait la barre avec la verticale.

Il y a équilibre ; d'après la relation de la statique appliqué au rouleau : $\sum \vec{F}_{ext/rouleau} = \vec{0}$

En projetant :

$$\text{Horizontalement : } R_N - F_{b/t} \sin \theta = 0$$

$$\text{verticalement : } R_T - F_{op} + F_{b/t} \cos \theta - (m + M)g = 0$$

L'équilibre du solide implique également, en exploitant les moments des forces par rapport à l'axe Δ de rotation du rouleau passant par le centre du tube :

$$\sum \mathcal{M}_{/\Delta}(\vec{F}_{ext,i}) = 0$$

Soit

$$-F_{op}R - R_T R = 0 \quad \Rightarrow \quad R_T = -F_{op}$$

$F_{b/t}$ étant inconnue, il faut l'éliminer des équations. On peut faire cela en isolant les termes en $F_{b/t}$ et en faisant le rapport (ou en projetant sur la direction perpendiculaire à la barre ...).

$$\tan \theta = \frac{N}{(m+M)g + 2F} \Rightarrow N = ((m+M)g + 2F) \tan \theta$$

Ca ne roule pas si

$$|T| \leq fN \Rightarrow F \leq f((m+M)g + 2F) \tan \theta \Rightarrow \boxed{F \left(\frac{1}{f \tan \theta - 2} \right) \leq (m+M)g = F_{max}}$$

2) On a $\sin \theta = \frac{R}{\ell}$ d'où (à la limite)

$$\tan \theta = \frac{F}{f((m+M)g + 2F)} \Rightarrow \frac{\ell^2}{R^2} = \frac{1}{\sin^2 \theta} = 1 + \frac{1}{\tan^2 \theta} = 1 + \frac{f^2((m+M)g + 2F)^2}{F^2}$$

soit finalement

$$\ell \leq R \sqrt{f^2 \left[2 + \frac{(m+M)g}{F_{feuille}} \right]^2 + 1} = 9,6 \text{ cm}$$

Pour que cette condition soit vérifiée pour tout le rouleau, il faut que cela fonction pour $R = r$. Il suffit de faire l'AN, on trouve $\ell < 4 \text{ cm}$. Cette condition ne peut pas être vérifiée car on a nécessairement $\ell > R$.