COLLES DE PHYSIQUE - MPI – 2024-2025

Colle N°4 : 07 au 11 Octobre 2024

Au programme des exercices

→ **Révisions de mécanique** de MP2I : Cinématique, dynamique, équilibre d'un système, Théorème du moment cinétique, mécanique du solide (tout sauf Forces centrales, particules chargées dans ($\vec{E}$,$\vec{B}$) et oscillateurs harmoniques (en particulier forcés)

→ **Chapitre MK.**1 : Lois de Coulomb du frottement solide

Liste des questions de cours sans corrigés

1. ❤️ Donner sans démonstration les expressions des vecteurs position, déplacement élémentaire, vitesse et accélération dans une base cylindrique. Cas particuliers des mouvements circulaires puis circulaires uniformes.

2. On considère un projectile lancé avec une vitesse initiale v_0 suffisamment faible pour que l'on puisse négliger la force de frottement fluide de l'air. On note θ l'angle de la vitesse $\vec{v}$ avec le plan horizontal et θ_0 sa valeur à l'instant initial (**figure 1 ci-contre).** On prend un repère dont l'origine O est la position de la particule à l'instant initial.

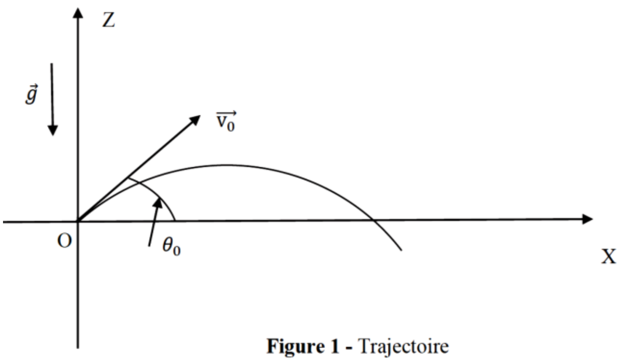
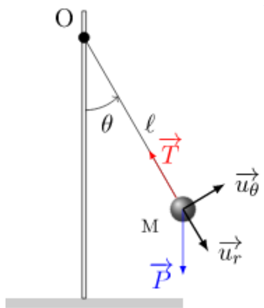


Figure 1 - Trajectoire

a) ❤️ Etablir l'équation du mouvement sur la base cartésienne.

b) Établir les équations paramétriques de la vitesse et de la position en fonction du temps.

3. Un point matériel M de masse m est suspendu à un fil supposé inextensible de longueur L. On suppose que le fil reste toujours tendu. A $t = 0$, le point M est lâché depuis un angle α par rapport à la verticale, avec une vitesse initiale v_0.



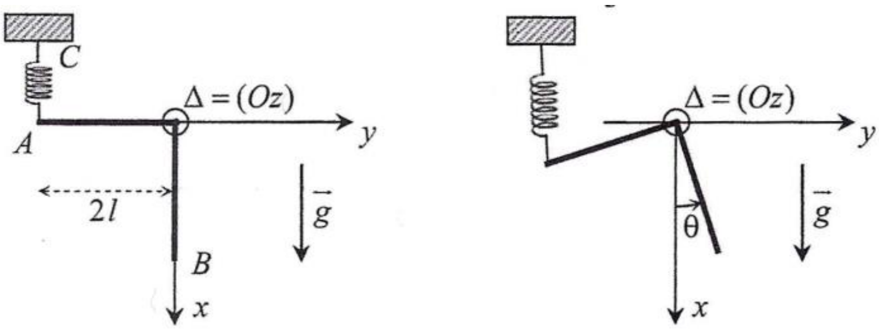
a) ❤️ Etablir l'équation différentielle du mouvement du pendule en exploitant, au choix de l'examinateur, la seconde loi de Newton ou le théorème de la puissance mécanique.

b) Etablir l'expression de la tension T du fil. A quelle condition le fil reste-t-il tendu ?

4. ❤️ Un parachutiste de masse m saute d'un hélicoptère en vol stationnaire. Au début du saut, il n'est soumis qu'à son poids, puis il ouvre son parachute après avoir atteint une vitesse v_0 à un instant qui sera pris comme instant initial. Il est alors également soumis à une force de frottement exercée par l'air de la forme $\vec{F} = -\lambda\vec{v}$. Etablir l'équation différentielle régissant l'évolution de la vitesse lorsque le parachute est ouvert. Résoudre cette équation en exprimant la vitesse limite v_{lim} atteinte par le parachutiste.

5. ❤️ Un étudiant glisse sur une piste de ski depuis une altitude $h = 15\ m$. Sa vitesse initiale est nulle. On note $\alpha = 30°$ l'angle entre la piste et l'horizontale. On tient compte d'une force de frottement constante F. Déterminer l'expression de la vitesse du skieur en bas de la pente en fonction de la force F.

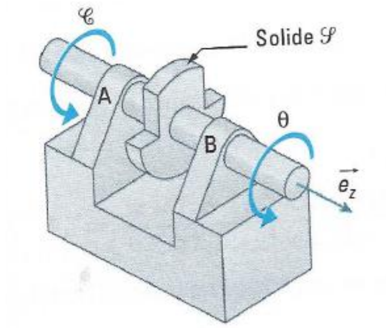
6. Un solide $\mathcal{S}$ est constitué de 2 tiges AO et OB homogènes rigidement liées l'une à l'autre et faisant entre elles un angle droit constant. Chaque tige a pour masse m et pour longueur 2ℓ. $\mathcal{S}$ peut tourner autour d'un axe horizontal (Δ) passant par O (axe (Oz)), la liaison en O étant une liaison pivot parfaite. Un ressort de masse négligeable, de constante de raideur k, est accroché à l'un de ses extrémités en A et l'autre extrémité C est maintenue fixe. Lorsque l'ensemble est en équilibre dans le champ de pesanteur, AO est horizontale et OB verticale. On suppose que la force exercée par le ressort sur le solide reste toujours verticale durant le mouvement.



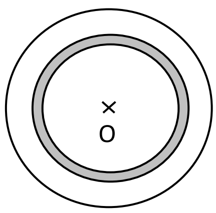
Faire un bilan des actions exercées sur le solide et déterminer leur moment respectif par rapport à O (on pourra projeter sur l'axe de rotation) en fonction notamment de θ.

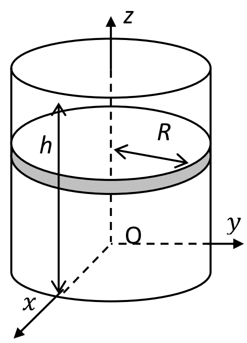
7. ❤️ Un solide $\mathcal{S}$ pouvant être en rotation autour d'un axe de rotation (Δ) a un moment d'inertie J_Δ par rapport à l'axe. Il est soumis à un moment global des forces extérieures par rapport à l'axe (Δ) $\sum_i \mathcal{M}_\Delta(\vec{F_i}) = +mg\ell(\cos\theta - \sin\theta)$. Déterminer à l'aide du théorème du moment cinétique l'équation différentielle vérifiée par $\theta(t)$.

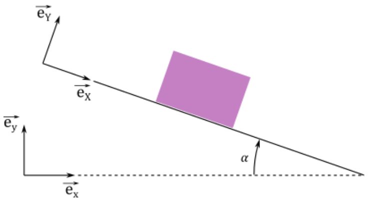
8. Une machine de test est constituée d'un arbre cylindrique homogène d'axe $\Delta = (A\,;\overrightarrow{e_z})$ lié à 2 liaisons pivot idéales en A et en B ; elle permet de tester le solide $\mathcal{S}$ qui est solidaire de l'arbre. On supposera que le moment d'inertie de l'arbre par rapport à Δ est négligeable, et que le centre d'inertie du solide appartient à cet axe Δ. Un couple moteur constant $\Gamma = 1{,}5$ Nm est appliqué à l'arbre et permet d'atteindre une vitesse de 1200 tr/min après 18 tours (en partant de l'arrêt). Déterminer le moment d'inertie J_Δ du solide $\mathcal{S}$ par rapport à l'axe $\Delta = (A\,;\overrightarrow{e_z})$ à l'aide d'un théorème énergétique.



9. ❤️ Donner en coordonnées cylindriques et sphériques l'expression du volume élémentaire, ainsi que dans le cas des coordonnées cylindriques l'expression des surfaces mésoscopiques correspondant à une couronne dans le plan $z = cte$ et d'une couronne à $r = cte$. Vous vous appuierez sur des schémas.

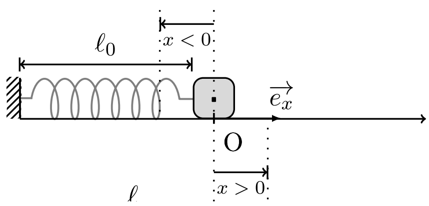






10. ❤️ On pose sans vitesse initiale un solide de masse m sur un plan incliné d'angle α, sur lequel il peut glisser avec un coefficient de frottement solide f. Etablir si le solide se met à glisser ou pas en fonction de la valeur de l'angle α.

11. ❤️ Un solide M, assimilé à un point matériel de masse m, est mobile sur un plan selon un axe horizontal (Ox) et relié à un ressort de constante de raideur k et de longueur à vide ℓ_0, dont l'autre extrémité est attachée à un point fixe. On choisit comme origine O de l'axe la position du solide lorsque le ressort est à sa longueur à vide ℓ_0 (voir schéma ci-contre). Des frottements solides de coefficient de frottement f existent entre le mobile et le plan. À l'instant initial, M est abandonné avec une



vitesse nulle à l'abscisse x_0. Vous répondrez **au choix de l'examinateur à l'une des questions suivantes.** On suppose que la condition sur x_0 pour que M se mette initialement en mouvement : $x_0 > x_s = \frac{fmg}{k}$, est vérifiée, avec $x_0 > 0$. Etablir l'équation différentielle du mouvement lors de la première phase du mouvement, et indiquer de quelle manière elle sera modifiée si le système fait demi-tour après que sa vitesse se soit annulée pour la première fois.

12. Donner la définition et l'interprétation du gradient, ses principales caractéristiques ainsi que son expression en coordonnées cartésiennes.

13. ❤️ Considérons un signal créneau de fréquence $f_0 = 2$ kHz, décrit par ses premiers harmoniques :

$$s(t) = A sin(2\pi f_0 t) + \frac{A}{3} sin(2\pi\, 3 f_0 t) + \frac{A}{5} sin(2\pi\, 5 f_0 t) + \frac{A}{7} sin(2\pi\, 7 f_0 t)\,.$$

Ce signal est échantillonné à $f_e = 15$ kHz. Représenter le spectre du signal échantillonné entre 0 et 15 kHz. A-t-on repliement spectral ? quelle fréquence minimale d'échantillonnage faut-il choisir ? Comment s'appelle le critère utilisé ?

Questions de cours avec éléments de réponses

1. ❤️ Donner sans démonstration les expressions des vecteurs position, déplacement élémentaire, vitesse et accélération dans une base cylindrique. Cas particuliers des mouvements circulaires puis circulaires uniformes.

Coordonnées	Vecteur position $\overrightarrow{OM}$	Vitesse $\overrightarrow{v_R}$	Déplacement élémentaire $d\overrightarrow{OM}$	Accélération $\overrightarrow{a_R}$
cylindriques	$r\,\overrightarrow{u_r}(\theta) + z.\overrightarrow{u_z}$	$\dot{r}\,\overrightarrow{u_r} + r\,\dot{\theta}\,\overrightarrow{u_\theta} + \dot{z}\,\overrightarrow{u_z}$	$dr\,\overrightarrow{u_r} + r\,d\theta\,\overrightarrow{u_\theta} + dz\,\overrightarrow{u_z}$	$(\ddot{r} - r\,\dot{\theta}^2)\overrightarrow{u_r} + (2\dot{r}\dot{\theta} + r\,\ddot{\theta})\,\overrightarrow{u_\theta} + \ddot{z}\,\overrightarrow{u_z}$

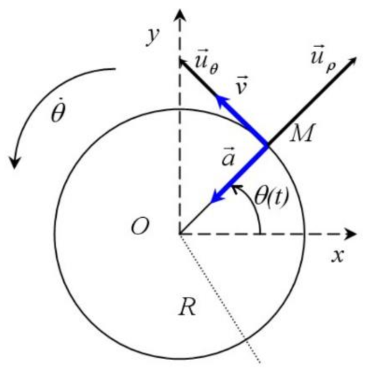
MC (mouvement circulaire) :

$$\overrightarrow{v_R} = R\dot{\theta}\,\overrightarrow{u_\theta} = R\omega\,\overrightarrow{u_\theta}$$

$$\overrightarrow{a_R} = -R\,\dot{\theta}^2\,\overrightarrow{u_r} + R\ddot{\theta}\,\overrightarrow{u_\theta} = \underbrace{-\frac{v^2}{R}\overrightarrow{u_r}}_{\vec{a}_N} + \underbrace{R\ddot{\theta}\,\overrightarrow{u_\theta}}_{\vec{a}_T} = -\frac{v^2}{R}\overrightarrow{u_r} + R\frac{d\omega}{dt}\overrightarrow{u_\theta}$$

MCU (mouvement circulaire uniforme) : $v = R\omega = cte\,;\ \dot{\theta} = \omega = cte$

$$\overrightarrow{v_R} = R\dot{\theta}\,\overrightarrow{u_\theta} = R\omega\,\overrightarrow{u_\theta} \qquad \overrightarrow{a_R} = -R\,\dot{\theta}^2\,\overrightarrow{u_r} = \underbrace{-\frac{v^2}{R}\overrightarrow{u_r}}_{\vec{a}_N}$$



2. On considère un projectile lancé avec une vitesse initiale v_0 suffisamment faible pour que l'on puisse négliger la force de frottement fluide de l'air. On note θ l'angle de la vitesse $\vec{v}$ avec le plan horizontal et θ_0 sa valeur à l'instant initial (**figure 1 ci-contre).** On prend un repère dont l'origine O est la position de la particule à l'instant initial.

c) ❤️ Etablir l'équation du mouvement sur la base cartésienne.

d) Établir les équations paramétriques de la vitesse et de la position en fonction du temps.

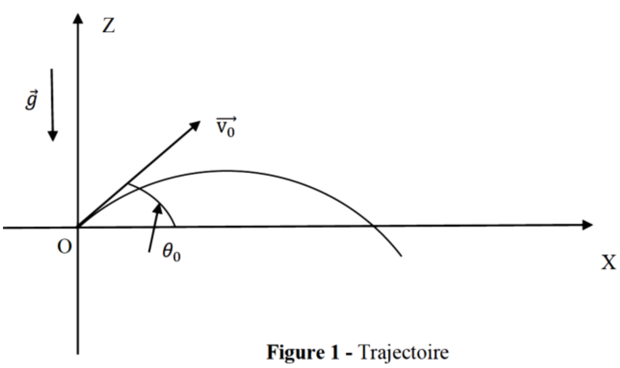


Figure 1 - Trajectoire

Eléments de réponse :

1) Système : point M de masse m étudié dans le référentiel terrestre supposé galiléen.

Bilan des actions mécaniques extérieures (BAME) : poids $\vec{P} = m\vec{g}$ (chute libre)

Principe Fondamental de la Dynamique (PDF) : $m\vec{g} = m\vec{a}_G = m\frac{d\vec{v}}{dt}$

Etude cinématique : coordonnées cartésiennes, en choisissant un axe (Oz) vertical ascendant et un axe (Ox) horizontal vers la droite. La vitesse initiale étant dans le plan (Oxz) ainsi que la résultante des forces, mouvement plan. On a donc $\vec{v} = \dot{x}\,\overrightarrow{u_x} + \dot{z}\,\overrightarrow{u_z}$

Projection du PDF sur $\overrightarrow{u_x}$ et $\overrightarrow{u_z}$: $\boxed{\begin{cases} m\ddot{x} = 0 \\ m\ddot{z} = -mg \end{cases}}$

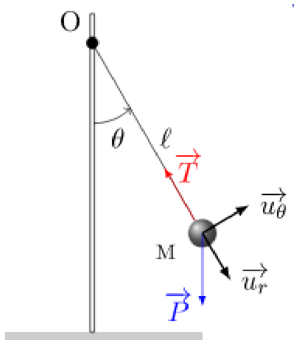
2) On intègre les équations précédentes une première fois par rapport au temps, en exploitant la vitesse initiale afin de déterminer les constantes d'intégration :

$$\dot{x} = v_0 cos(\alpha_0) \qquad (1)$$
$$\dot{z} = -gt + v_0 sin(\alpha_0) \qquad (2)$$

Puis une seconde fois, la position initiale correspondant à l'origine du repère :

$$\boxed{\begin{cases} x(t) = v_0 cos(\theta_0)t & (3) \\ z(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0 sin(\theta_0)t & (4) \end{cases}}$$

3. Un point matériel M de masse m est suspendu à un fil supposé inextensible de longueur L. On suppose que le fil reste toujours tendu. A $t = 0$, le point M est lâché depuis un angle α par rapport à la verticale, avec une vitesse initiale v_0.



c) ❤ Etablir l'équation différentielle du mouvement du pendule en exploitant, au choix de l'examinateur, la seconde loi de Newton ou le théorème de la puissance mécanique.

d) Etablir l'expression de la tension T du fil. A quelle condition le fil reste-t-il tendu ?

Eléments de réponse :

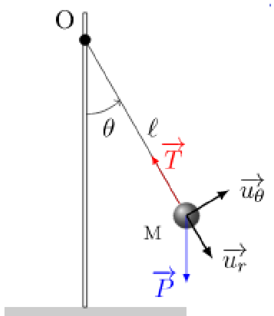
a) Système : point M de masse m, étudié dans le référentiel terrestre supposé galiléen.

Méthode N°1 : PFD :

Etude cinématique *: mouvement circulaire, choix des coordonnées polaires*

en coordonnées polaires, $\overrightarrow{v(M)_R} = L\,\dot{\theta}\,\overrightarrow{u_\theta}$ et $\overrightarrow{a(M)_R} = \left(-L\,\dot{\theta}^2\right)\overrightarrow{u_r} + (L\,\ddot{\theta}\,)\,\overrightarrow{u_\theta}$

Bilan des actions mécaniques extérieures *: M subit*



- *Son poids, vertical descendant :* $\vec{P} = m\,\vec{g} = mgcos\theta\,\overrightarrow{u_r} - mgsin\theta\,\overrightarrow{u_\theta}$
- *La tension du fil dirigée selon le fil vers O et de norme T inconnue :* $\vec{T} = -T\,\overrightarrow{u_r}$

PFD *: Selon la 2^{nde} loi de Newton dans un référentiel galiléen :* $\vec{P} + \vec{T} = m\,\overrightarrow{a(M)_R}$

Projection sur	$\vec{P}$	+	$\vec{T}$	=	$m\,\overrightarrow{a(M)_R}$
$\overrightarrow{u_r}$	$mgcos\theta$	+	$-T$	=	$-mL\,\dot{\theta}^2$
$\overrightarrow{u_\theta}$	$-mgsin\theta$	+	0	=	$mL\,\ddot{\theta}$

Equation différentielle du mouvement : correspond à la projection sur $\overrightarrow{u_\theta}$:

$$mL\ddot{\theta} = -mgsin\theta \quad \Leftrightarrow \quad \boxed{L\ddot{\theta} + gsin\theta = 0}$$

Méthode N°2 : TPM

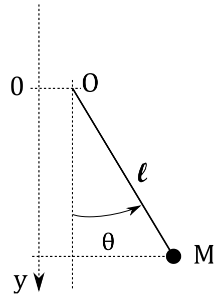
On introduit l'axe (Oy) vertical descendant

__Bilan des actions mécaniques extérieures__ s'exerçant sur le système :

Poids, associé à l'énergie potentielle de pesanteur $Ep_p = -mgy + cte$.

Tension du fil, qui ne travaille pas (toujours perpendiculaire au déplacement

Le système est donc conservatif.



$$y = +\ell\cos\theta$$

D'où : $E_p = -mg\ell\cos\theta + cte$

__Energie mécanique en un point quelconque__ caractérisé par l'angle θ : $Em = Ec + Ep$;

le point M décrivant une trajectoire circulaire de rayon l, sa vitesse est $v = l\dot{\theta}$, d'où: $Ec = \frac{1}{2}m\ell^2\dot{\theta}^2$

soit finalement $Em = \frac{1}{2}m\ell^2\dot{\theta}^2 - mgl\cos\theta + cte \underbrace{=}_{\text{système conservatif}} cte$

Théorème de la puissance mécanique :

$$\frac{dEm}{dt} \underbrace{=}_{\substack{\text{système}\\ \text{conservatif}}} 0 = m\ell^2\dot{\theta}\ddot{\theta} + mgl\dot{\theta}\sin\theta \Leftrightarrow \begin{cases} \dot{\theta} = 0 \\ \ell^2\ddot{\theta} + gl\sin\theta = 0 \end{cases}$$

La solution $\dot{\theta} = 0$ correspond à une vitesse toujours nulle, ce qui n'a pas d'intérêt pour l'étude du mouvement.

L'équation différentielle du mouvement est donc : $\ell^2\ddot{\theta} + gl\sin\theta = 0 \Leftrightarrow \boxed{\ddot{\theta} + \frac{g}{l}\sin\theta = 0}$

b) D'après la projection du PFD selon $\overrightarrow{u_r}$, on a $mg\cos\theta - T = -mL\,\dot{\theta}^2 = -m\frac{v^2}{L}$ *Soit* $\boxed{T = mg\cos\theta + \frac{mv^2}{L}}$

Fil tendu si $\forall t$, $T > 0$

4. ❤️ Un parachutiste de masse m saute d'un hélicoptère en vol stationnaire. Au début du saut, il n'est soumis qu'à son poids, puis il ouvre son parachute après avoir atteint une vitesse v_0 à un instant qui sera pris comme instant initial. Il est alors également soumis à une force de frottement exercée par l'air de la forme $\vec{F} = -\lambda\vec{v}$. Etablir l'équation différentielle régissant l'évolution de la vitesse lorsque le parachute est ouvert. Résoudre cette équation en exprimant la vitesse limite v_{lim} atteinte par le parachutiste.

Eléments de réponse :

Après ouverture du parachute :

Bilan des actions mécaniques extérieures :

$\vec{P} = m\vec{g} = mg\overrightarrow{u_z}$ *(et $E_p = -mgz + cte$)*

$\vec{F} = -\lambda v\,\overrightarrow{u_z}$ *(et $P = \vec{F}.\vec{v} = -\lambda v^2$)*

Principe fondamental de la dynamique projeté ou TPM après simplification :

$$m\frac{dv}{dt} = mg - \lambda v \implies \frac{dv}{dt} + \frac{\lambda}{m}v = g$$

$$\boxed{\frac{dv}{dt} + \frac{\lambda}{m}v = g}$$

Equation différentielle du premier ordre à coefficients constants positifs et second membre constant. Lorsque la vitesse limite est atteinte, on a $\frac{dv}{dt} = 0$, soit $\frac{\lambda}{m}v_{lim} = g$ ou $v_{lim} = \frac{mg}{\lambda}$

sous forme canonique avec $\tau = \frac{m}{\lambda}$ temps caractéristique :

$$\frac{dv}{dt}+\frac{v}{\tau}=\frac{v_{lim}}{\tau}$$

Solution Générale à l'équation Homogène : $v_H(t) = Ae^{-\frac{t}{\tau}}$

Solution Particulière à l'équation Complète : $v_p(t) = v_{lim}$

Solution Générale à l'équation Complète : $v(t) = Ae^{-\frac{t}{\tau}} + v_{lim}$

Constante d'intégration à l'aide des conditions initiales :

$$v(t=0) \underbrace{=}_{\substack{\text{équation}\\ \text{à } t=0}} A + v_{lim} \underbrace{=}_{C.I.} v_0$$

$$A = v_0 - v_{lim}$$

$$\boxed{v = (v_0 - v_{lim})e^{-\frac{t}{\tau}} + v_{lim}}$$

5. ❤️ Un étudiant glisse sur une piste de ski depuis une altitude $h = 15\ m$. Sa vitesse initiale est nulle. On note $\alpha = 30°$ l'angle entre la piste et l'horizontale. On tient compte d'une force de frottement constante F. Déterminer l'expression de la vitesse du skieur en bas de la pente en fonction de la force F.

Eléments de réponse :

Travail de la force de frottement du point A en haut de la piste au point B au bas de la piste : on introduit un axe (Ox) le long de la pente, d'origine le point A, avec $x_B = x_f = \frac{h}{\sin\alpha}$.

$$W(\vec{F}) = \int_A^B -F\overrightarrow{u_x}.d\overrightarrow{OM} = \int_A^B -Fdx = -Fx_f = -F\frac{h}{\sin\alpha}$$

Système *: étudiant supposé ponctuel étudié dans le référentiel terrestre supposé galiléen*

Bilan des actions mécaniques extérieures :

- *poids* $\vec{P}$ *(dérivant de l'énergie potentielle de pesanteur* $E_{pp} = +mgz + cte$*, avec z altitude)*
- *réaction normale du support* $\overrightarrow{R_N}$
- *Force de frottement solide* $\vec{F} = -F\overrightarrow{u_x}$*, non conservative*

Étude énergétique :

Théorème de l'énergie mécanique *entre le point A : position initiale du skieur en haut de la piste et le point B : skieur en bas de la piste :*

$$E_m(B) - E_m(A) = W(\vec{F}_{non\ conservative}) = \int_A^B -F\overrightarrow{u_x}.d\overrightarrow{OM} = -F\frac{h}{\sin\alpha}$$

Avec $E_m(A) = \frac{1}{2}m{v_A}^2 + mgz_A + cte \underbrace{=}_{\substack{\text{vitesse}\\ \text{initiale}\\ \text{nulle}}} mgz_A + cte$ *et*

$E_m(B) = \frac{1}{2}m{v_B}^2 + mgz_B + cte = \frac{1}{2}m{v_f}^2 + mgz_B + cte$

En l'exploitant le Théorème de l'énergie mécanique entre les points A et B :

$E_m(B) - E_m(A) = -F\frac{h}{\sin\alpha}$ *avec* $z_A - z_B = h$: $\frac{1}{2}m{v_f}^2 - mgh = -F\frac{h}{\sin\alpha}$

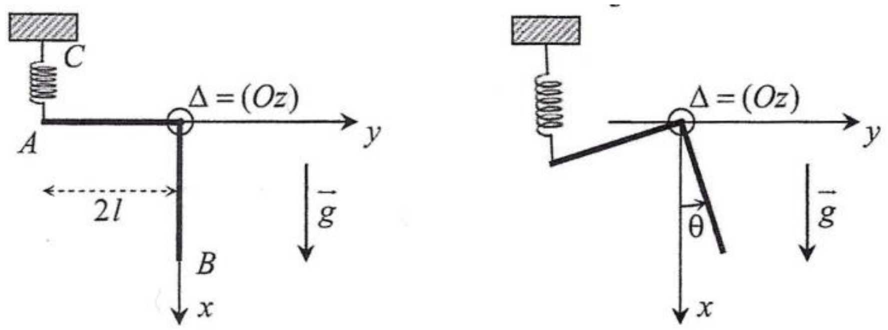
soit

$$\frac{1}{2}m{v_f}^2 = mgh - F\frac{h}{\sin\alpha} = h\left(mg - \frac{F}{\sin\alpha}\right)$$

D'où

$$\boxed{v_f = \sqrt{2h\left(g - \frac{F}{msin(\alpha)}\right)}}$$

6. Un solide $\mathcal{S}$ est constitué de 2 tiges AO et OB homogènes rigidement liées l'une à l'autre et faisant entre elles un angle droit constant. Chaque tige a pour masse m et pour longueur 2ℓ. $\mathcal{S}$ peut tourner autour d'un axe horizontal (Δ) passant par O (axe (Oz)), la liaison en O étant une liaison pivot parfaite. Un ressort de masse négligeable, de constante de raideur k, est accroché à l'un de ses extrémités en A et l'autre extrémité C est maintenue fixe. Lorsque l'ensemble est en équilibre dans le champ de pesanteur, AO est horizontale et OB verticale. On suppose que la force exercée par le ressort sur le solide reste toujours verticale durant le mouvement.



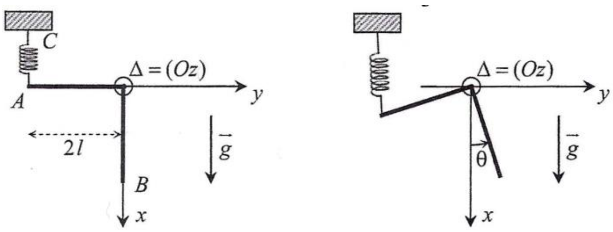
Faire un bilan des actions exercées sur le solide et déterminer leur moment respectif par rapport à l'axe de rotation, en fonction notamment de θ.

Eléments de réponse

Système Etudié : *l'ensemble solide $\mathcal{S}$ constitué des deux tiges, de moment d'inertie total $J_\Delta = \frac{8mL^2}{3}$ par rapport à l'axe $\Delta = (O\,;\,\overrightarrow{e_z})$.*

Référentiel d'étude : *Référentiel terrestre $\mathcal{R}_g(O\,;\overrightarrow{e_x}\,;\,\overrightarrow{e_y}\,;\overrightarrow{e_z}\,)$ supposé galiléen.*

Bilan des actions mécaniques extérieures :



Poids $\vec{P} = m\vec{g}$ du système ;

Force de liaison en O

Force de rappel élastique $\vec{F}_{eA}$ exercée par le ressort en A :

$$\vec{F}_{eA} = -k(AC - \ell_0)\overrightarrow{e_x}$$

Or $AC = \underbrace{\ell_{éq}}_{\substack{longueur\ lorsque \\ la\ tige\ AO\ est\ horizontale}} + 2l\sin\theta$

$$\vec{F}_{eA} = -k\big(\ell_{éq} + 2l\sin\theta\ - \ell_0\big)\overrightarrow{e_x}$$

La liaisons pivot en O étant idéale, $\mathcal{M}_\Delta\big(\vec{F}_{liaison}\big) = 0$

Le système étant composé de deux tiges OA et OB, on a $\mathcal{M}_\Delta(\vec{P}) = \mathcal{M}_\Delta(\vec{P}_{OA}) + \mathcal{M}_\Delta(\vec{P}_{OB})$.

De plus, le centre de gravité de chaque tige, supposée homogène et de longueur $2l$, se trouve au milieu de la tige, donc à la distance l du point O. En choisissant un sens positif de rotation dans le sens trigonométrique, on a :

$\mathcal{M}_\Delta(\vec{P}) = \mathcal{M}_\Delta(\vec{P}_{OA}) + \mathcal{M}_\Delta(\vec{P}_{OB}) = +mg\ell\cos\theta - mg\ell\sin\theta.$

$$\mathcal{M}_\Delta\big(\vec{F}_{eA}\big) = -k\big(\ell_{éq} + 2l\sin\theta\ - \ell_0\big)(2\ell\cos\theta)$$

$$\sum_i \mathcal{M}_\Delta\big(\vec{F}_i\big) = +mg\ell\cos\theta - mg\ell\sin\theta - k(2\ell\sin\theta + AC - \ell_0)(2\ell\cos\theta)$$

7. ❤️ Un solide $\mathcal{S}$ pouvant être en rotation autour d'un axe de rotation (Δ) a un moment d'inertie J_Δ par rapport à l'axe. Il est soumis à un moment global des forces extérieures par rapport à l'axe (Δ) $\sum_i \mathcal{M}_\Delta(\vec{F}_i) = +mg\ell(\cos\theta - \sin\theta)$. Déterminer à l'aide du théorème du moment cinétique l'équation différentielle vérifiée par $\theta(t)$.

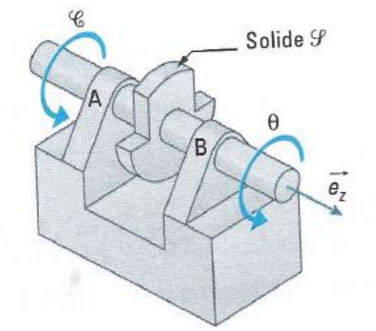
> ***Eléments de réponse :***
>
> *Théorème du moment cinétique scalaire au solide dans $\mathcal{R}_g$*

$$\frac{dL_\Delta}{dt} = \sum_i \mathcal{M}_\Delta(\vec{F}_i)$$

> *Le solide étant en rotation autour d'un axe fixe Δ, $L_\Delta = J_\Delta\omega = J_\Delta\dot{\theta}$, soit $\frac{dL_\Delta}{dt} = J_\Delta\ddot{\theta}$*

$$J_\Delta\ddot{\theta} = mg\ell(\cos\theta - \sin\theta)$$

8. Une machine de test est constituée d'un arbre cylindrique homogène d'axe $\Delta = (A\,;\vec{e_z})$ lié à 2 liaisons pivot idéales en A et en B ; elle permet de tester le solide $\mathcal{S}$ qui est solidaire de l'arbre. On supposera que le moment d'inertie de l'arbre par rapport à Δ est négligeable, et que le centre d'inertie du solide appartient à cet axe Δ. Un couple moteur constant $\Gamma = 1{,}5$ Nm est appliqué à l'arbre et permet d'atteindre une vitesse de 1200 tr/min après 18 tours (en partant de l'arrêt). Déterminer le moment d'inertie J_Δ du solide $\mathcal{S}$ par rapport à l'axe $\Delta = (A\,;\vec{e_z})$ à l'aide d'un théorème énergétique.

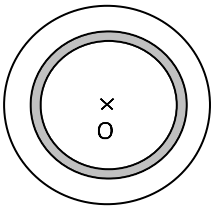


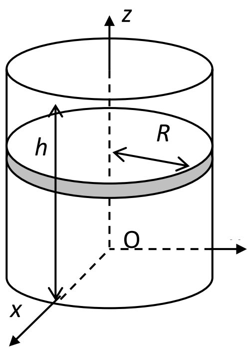
> ***Eléments de réponse :***
>
> ***Utilisation du Théorème de l'énergie cinétique au solide dans** $\mathcal{R}_g$ entre le point correspondant à la position initiale et le point correspond à l'instant t_1 (18 tours parcourus).*
>
> $\boldsymbol{\Delta Ec} = W(\vec{P}) + W(\vec{F}_{liaison}) + W(\vec{F}_{couple})$
>
> *Le solide étant en rotation autour d'un axe fixe Δ, $Ec = \frac{1}{2}J_\Delta\omega^2$;*
>
> *Le centre d'inertie G appartenant à Δ, il ne se déplace pas : $W(\vec{P}) = 0$.*
>
> *De même, le point d'application des forces de liaison ne se déplace pas : $W(\vec{F}_{liaison}) = 0$;*
>
> *Le solide étant en rotation autour d'un axe fixe Δ,*

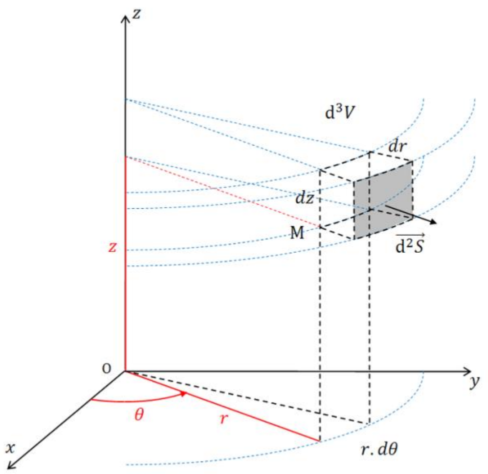
$$W(\vec{F}_{couple}) = \int \Gamma\, d\theta$$

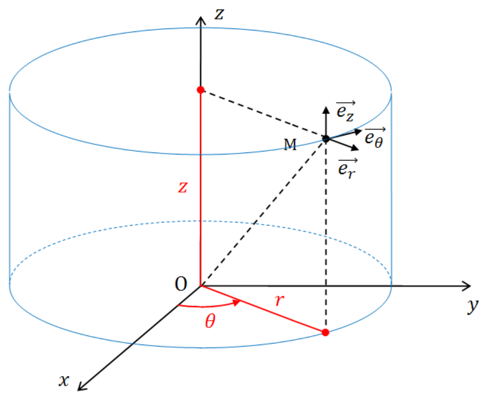
> *Finalement,* $\boxed{\boldsymbol{\Delta Ec} = \frac{1}{2}J_\Delta\Delta(\omega^2) = \Gamma\Delta\theta}$
>
> *Soit ici entre $t = 0$ et t_1 :* $\boxed{\frac{1}{2}J_\Delta\omega_1^2 = \Gamma\theta_1}$ *d'où* $\boxed{J_\Delta = 2\frac{\Gamma\theta_1}{\omega_1^2}}$

9. ❤️ Donner en coordonnées cylindriques et sphériques l'expression du volume élémentaire, ainsi que dans le cas des coordonnées cylindriques l'expression des surfaces mésoscopiques correspondant à une couronne dans le plan $z = cte$ et d'une couronne à $r = cte$. Vous vous appuierez sur des schémas.







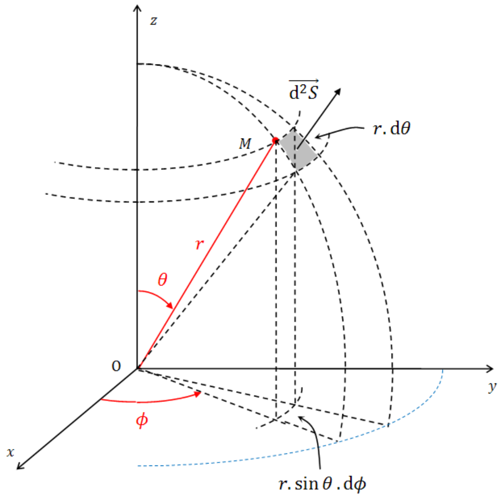


coordonnées cylindriques :

Volume élémentaire : $d\tau = rd\theta drdz$

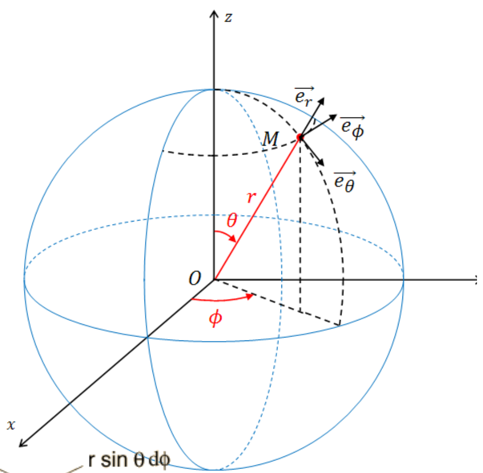
Couronne à $z = cte$ *:* $dS = 2\pi rdr$ *(surface élémentaire* $d^2S = rd\theta dr$ *intégrée sur* θ *variant de 0 à* 2π*)*

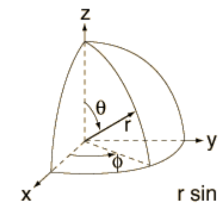
Couronne à $r = cte$ *:* $dS = 2\pi Rdz$ *(surface élémentaire* $d^2S = Rd\theta dz$ *intégrée sur* θ *variant de 0 à* 2π*)*

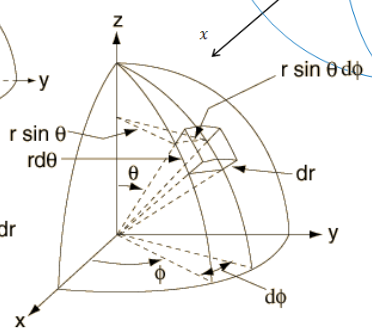


Coordonnées sphériques :

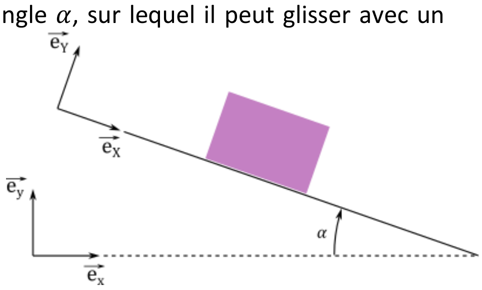
$d\tau = r^2 sin\theta d\theta d\phi dr$







10. ❤️ On pose sans vitesse initiale un solide de masse m sur un plan incliné d'angle α, sur lequel il peut glisser avec un coefficient de frottement solide f. Etablir si le solide se met à glisser ou pas en fonction de la valeur de l'angle α.



On recherche les conditions de non glissement.

Système : solide de masse m étudié dans le référentiel du laboratoire supposé galiléen.

Etude cinématique : voir schéma. base $(\vec{e}_X;\ \vec{e}_Y)$; $\vec{a} = \vec{0}$ *à l'équilibre*

BAME : dans la base $(\vec{e}_X;\ \vec{e}_Y)$

Poids $\vec{P} = m\vec{g} = \begin{vmatrix} mg\sin(\alpha) \\ -mg\cos(\alpha) \end{vmatrix}$; *réaction normale* $\vec{R}_N = \begin{vmatrix} 0 \\ \|\overrightarrow{R_N}\| \end{vmatrix}$; *réaction tangentielle* $\vec{R}_T = \begin{vmatrix} -\|\overrightarrow{R_T}\| \\ 0 \end{vmatrix}$

La réaction tangentielle permet d'assurer l'équilibre en compensant la composante tangentielle du poids qui est dirigée selon + $\vec{e}_X$ *; elle est donc orientée selon* $-\vec{e}_X$.

PFD : $m\vec{a} = \vec{P} + \vec{R}_N + \vec{R}_T$

Projection sur $\vec{e}_X$ *:* $mg\sin(\alpha) + 0 - \|\overrightarrow{R_T}\| = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \boxed{\|\overrightarrow{R_T}\| = mg\sin(\alpha)}$

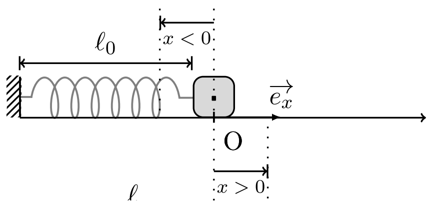
Projection sur $\vec{e}_Y$ *:* $-mg\cos(\alpha) + \|\overrightarrow{R_N}\| + 0 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \boxed{\|\overrightarrow{R_N}\| = mg\cos(\alpha)}$

D'après les lois de Coulomb, $\|\overrightarrow{R_T}\| \leq f_s\|\overrightarrow{R_N}\| \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\|\overrightarrow{R_T}\|}{\|\overrightarrow{R_N}\|} \leq f_s \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\|\overrightarrow{R_T}\|}{\|\overrightarrow{R_N}\|} = \tan(\alpha) \leq f_s = \tan(\alpha_{lim})$

Le solide reste immobile par rapport au support tant que la réaction reste dans le cône de frottement d'angle α_{lim}*, tel que* $\tan(\alpha_{lim}) = f_s$

Si $\alpha > \alpha_{lim}$*, la condition d'équilibre est rompue, il va y avoir mouvement du solide sur le plan.*

11. Un solide M, assimilé à un point matériel de masse m, est mobile sur un plan selon un axe horizontal (Ox) et relié à un ressort de constante de raideur k et de longueur à vide ℓ_0, dont l'autre extrémité est attachée à un point fixe. On choisit comme origine O de l'axe la position du solide lorsque le ressort est à sa longueur à vide ℓ_0 (voir schéma ci-contre). Des frottements solides de coefficient de frottement f existent entre le mobile et le plan. À l'instant initial, M est abandonné avec une vitesse nulle à l'abscisse x_0. On suppose que la condition sur x_0 pour que M se mette initialement en mouvement : $x_0 > x_s = \frac{fmg}{k}$, est vérifiée, avec $x_0 > 0$. Etablir l'équation différentielle du mouvement lors de la première phase du mouvement, et indiquer de quelle manière elle sera modifiée si le système fait demi-tour après que sa vitesse se soit annulée pour la première fois.



Système *point M de masse m étudié dans le référentiel du laboratoire supposé galiléen.*

Cinématique *:* $\overrightarrow{OM} = x\,\vec{e}_x;\ \vec{a} = \ddot{x}\,\vec{e}_x$

BAME : *poids* $\vec{P} = m\vec{g}$ *; réaction du sol:* $\vec{R}_N + \vec{R}_T$ *; Force de rappel élastique exercée par le ressort :* $\vec{F}_e = -kx\vec{e}_x$

Projections de la ***seconde loi de Newton*** *(théorème de la résultante dynamique) sur* $\vec{e}_x$ *:*

$$\|\overrightarrow{R_N}\| = mg$$

$$m\ddot{x} = R_T - kx$$

Où $\vec{R}_T = R_T\vec{e}_x$ *avec* R_T *algébrique.*

Première phase *:* $x_0 > \frac{fmg}{k} = x_s > 0$*, à* $t = 0$ *mouvement, soit d'après la loi de Coulomb :*

$\|\overrightarrow{R_T}\| = f\|\overrightarrow{R_N}\| = fmg$ *et* $R_T\dot{x} < 0$ *(réaction tangentielle opposée à la vitesse de glissement).*

A $t = 0$, avec $x_0 > 0$, le ressort est étiré, on a donc $\dot{x}(t=0) < 0$, soit $R_T > 0$, donc $R_T = fmg$. Or $m\ddot{x} = R_T - kx$, d'où :

$$m\ddot{x} + kx = fmg$$

$$\boxed{\ddot{x} + \omega_0^2 x = fg \quad \text{où} \quad \omega_0^2 = \frac{k}{m}}$$

Après arrêt, le mouvement va reprendre en sens inverse avec $\dot{x}\left(\frac{T}{2}\right) < 0$. La nouvelle situation ressemble en tous points à celle de la question précédente, hormis le sens d'évolution de x donc le signe de R_T.

le ressort est comprimé, on a donc $\dot{x}(t) > 0$, soit $R_T < 0$, donc $R_T = -fmg$, or $m\ddot{x} = R_T - kx$, d'où :

$$m\ddot{x} + kx = -fmg$$

$$\boxed{\ddot{x} + \omega_0^2 x = -fg \quad \text{où} \quad \omega_0^2 = \frac{k}{m}}$$

12. Donner la définition et l'interprétation du gradient, ainsi que son expression en coordonnées cartésiennes et ses principales caractéristiques.

***Définition intrinsèque** : $\mathbf{d}f = \overrightarrow{\mathbf{grad}}(f) \cdot \mathbf{d}\overrightarrow{\mathbf{M}}$ et $\Delta f = \int_A^B \overrightarrow{\mathrm{grad}} f . \mathrm{d}\vec{M}$*

Le gradient exprime les variations dans l'espace d'un champ scalaire

*En **coordonnées cartésiennes :***

$$\overrightarrow{\mathbf{grad}}(f) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{y,z} \vec{e}_x + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_{z,x} \vec{e}_y + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)_{x,y} \vec{e}_z$$

Caractéristiques du gradient :

opérateur vectoriel linéaire de dimension $\left[\overrightarrow{\mathrm{grad}}(f)\right] = [f].L^{-1}$.

Un champ scalaire uniforme a un gradient nul et, réciproquement.

Direction : perpendiculaire aux courbes iso-f, et selon la direction privilégiée de variation de f (ligne qu'il faut suivre localement pour faire varier f le plus possible).

Sens : valeurs croissantes de f (des plus petites valeurs vers les plus grandes).

Norme : plus elle est élevée, plus la grandeur f varie de manière importante dans l'espace ($\left|\overrightarrow{\mathrm{grad}} f\right| \sim \frac{\Delta f}{\Delta x}$).

13. ❤️ Considérons un signal créneau de fréquence $f_0 = 2$ kHz, décrit par ses premiers harmoniques :

$$s(t) = A\sin(2\pi f_0 t) + \frac{A}{3}\sin(2\pi\, 3f_0 t) + \frac{A}{5}\sin(2\pi\, 5f_0 t) + \frac{A}{7}\sin(2\pi\, 7f_0 t)\,.$$

Ce signal est échantillonné à $f_e = 15$ kHz. Représenter le spectre du signal échantillonné entre 0 et 15 kHz. Commenter. Quelle fréquence minimale d'échantillonnage faudrait-il choisir ? Comment s'appelle le critère utilisé ?

***Composantes du signal : pics à** $f_0, 3f_0, 5f_0$ et $7f_0$ d'amplitudes respectives A, $\frac{A}{3}$, $\frac{A}{5}$ et $\frac{A}{7}$*

***Réplication du spectre :** entre 0 et 15 kHz, fréquences supplémentaires à $f_e - 7f_0 = 1$ kHz (amplitude $\frac{A}{7}$) $f_e - 5f_0 = 5$ kHz (amplitude $\frac{A}{5}$), $f_e - 3f_0 = 9$ kHz (amplitude $\frac{A}{3}$) , $f_e - f_0 = 14$ kHz (amplitude A) : **phénomène de recouvrement** entre les composantes du spectre du signal analogique et celles associées à ses répliques, menant dans la plage $f < f_N = f_e/2$ à la présence de « fausses fréquences » ou fréquences « fantômes » (repliement spectral).*

*Critère de Shannon : il faut au minimum $\boldsymbol{f_e > 2f_{max} = 2 \times 7f_0 = 28}$ **kHz***