

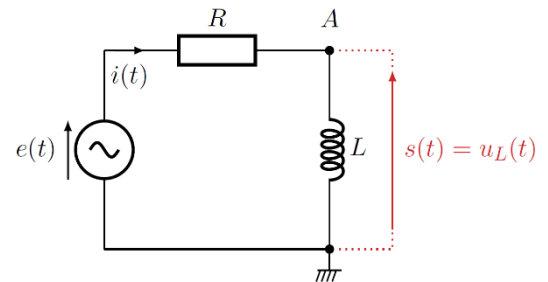
NOM :

INTERROGATION DE COURS N°2 MPI – 2026-2027

Note :

A - On considère le circuit ci-contre, alimenté par une source idéale de tension délivrant

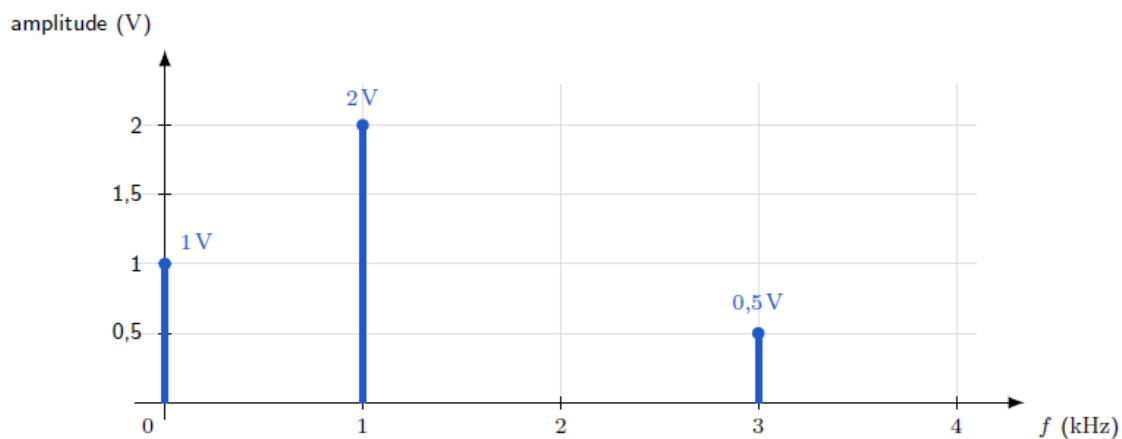
$$e(t) = E_m \cos(\omega t).$$



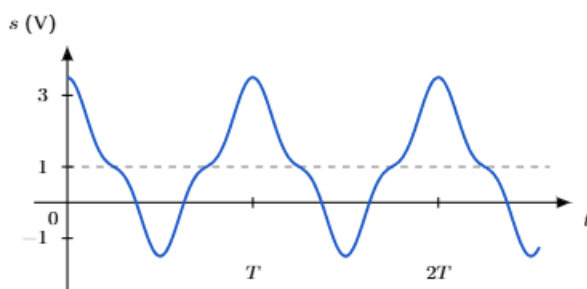
1. Analyser qualitativement le comportement du circuit aux basses et aux hautes fréquences. En déduire la nature du filtre ainsi réalisé.
2. Établir la fonction de transfert $\underline{H}(j\omega) = \underline{s}/\underline{e}$ de ce filtre.
3. Mettre cette fonction de transfert sous la forme canonique suivante $\underline{H}(j\omega) = \frac{jx}{1+jx}$ en donnant les expressions des grandeurs caractéristiques du filtre en fonction de R , L et ω .
4. Établir les fonctions de transfert équivalentes à basse et à haute fréquence, et retrouver la nature du filtre.
5. Tracer le diagramme de Bode asymptotique en gain et en phase.

B – spectres

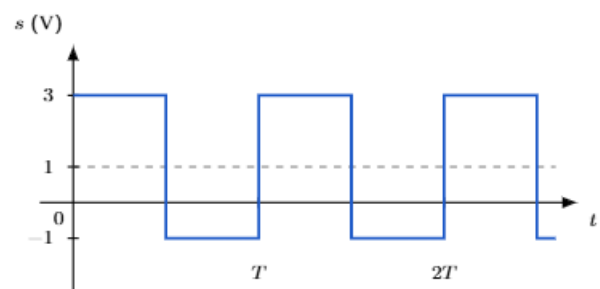
6. Donner les valeurs moyennes suivantes : $\langle \sin \rangle = ?$ $\langle \cos \rangle = ?$; $\langle \sin^2 \rangle = ?$ $\langle \cos^2 \rangle = ?$
7. Donner la valeur moyenne du signal dont le spectre est fourni ci-dessous. S'agit-il d'un signal de forme sinusoïdale ?



8. Auquel des deux signaux ci-dessous correspond-il ?



(a)



(b)

Corrigé

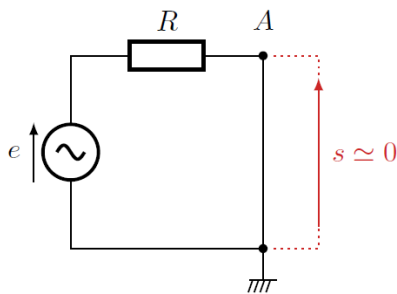
1. Analyse qualitative - nature du filtre

Basses fréquences ($\omega \rightarrow 0$). La bobine se comporte comme un fil : elle court-circuite la sortie. La tension à ses bornes tend vers zéro,

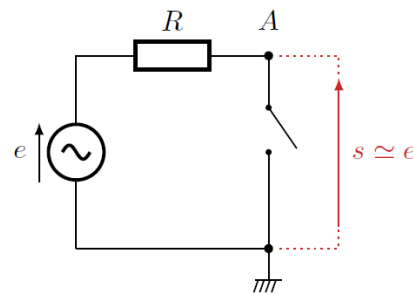
$$s(t) \xrightarrow{\omega \rightarrow 0} 0 : \text{le signal d'entrée est bloqué.}$$

Hautes fréquences ($\omega \rightarrow \infty$). La bobine se comporte comme un interrupteur ouvert. Le courant dans la maille tend vers zéro, donc la tension aux bornes de R également ($u_R = Ri \rightarrow 0$), et la loi des mailles donne

$$s(t) = e(t) - u_R(t) \xrightarrow{\omega \rightarrow \infty} e(t) : \text{le signal d'entrée est transmis intégralement.}$$



BF : $L \equiv \text{fil}$



HF : $L \equiv \text{interrupteur ouvert}$

Le circuit bloque les basses fréquences et laisse passer les hautes fréquences : il s'agit d'un filtre passe-haut. Comme il ne comporte qu'un seul composant réactif, son équation différentielle est du premier ordre : c'est un passe-haut du premier ordre.

2. Fonction de transfert

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{s}{e}$$

R et L sont en série et forment un diviseur de tension.

Ici $\underline{Z}_L = jL\omega$ et $\underline{Z}_R = R$, d'où

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{\underline{u}_L}{\underline{e}} = \frac{jL\omega}{R + jL\omega}$$

3. Forme canonique

$$\underline{H}(j\omega) = H_0 \frac{j \frac{\omega}{\omega_c}}{1 + j \frac{\omega}{\omega_c}} = H_0 \frac{jx}{1 + jx}, x = \frac{\omega}{\omega_c}$$

où H_0 est le gain (ou amplification) en haute fréquence, c'est-à-dire la valeur de $\underline{H}$ dans la bande passante, et ω_c la pulsation de coupure. La variable réduite $x = \omega/\omega_c$ est sans dimension.

On met la fonction de transfert obtenue sous cette forme en factorisant le dénominateur par son terme constant R :

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{jL\omega}{R + jL\omega} = \frac{jL\omega/R}{1 + jL\omega/R} = \frac{j \frac{\omega}{R/L}}{1 + j \frac{\omega}{R/L}}.$$

Par identification :

$$H_0 = 1, \quad \omega_c = \frac{R}{L}, \quad f_c = \frac{R}{2\pi L}$$

4. Fonctions de transfert équivalentes aux deux extrémités

On repart de $\underline{H} = \frac{jx}{1+jx}$ et l'on compare les deux termes du dénominateur.

Basse fréquence : $\omega \ll \omega_c$, c'est-à-dire $x \ll 1$ donc $1 + jx \approx 1$ soit

$$\underline{H}_{BF}(j\omega) \simeq jx = j \frac{\omega}{\omega_c} = \frac{jL\omega}{R} \Rightarrow G_{dB} \simeq 20 \log x, \varphi \simeq +\frac{\pi}{2}.$$

Haute fréquence : $\omega \gg \omega_c$, c'est-à-dire $x \gg 1$

Cette fois le dénominateur est dominé par le terme en x : $1 + jx \simeq jx$. Donc

$$\underline{H}_{HF}(j\omega) \simeq \frac{jx}{jx} = 1 = H_0 \Rightarrow G_{dB} \simeq 0 \text{ dB}, \varphi \simeq 0.$$

Le signal est transmis sans atténuation ni déphasage : $s(t) \simeq e(t)$. C'est la bande passante du filtre.

Bilan

Gain nul (donc atténuation infinie) en $\omega \rightarrow 0$, gain unité en $\omega \rightarrow \infty$, avec une transition à $\omega_c = R/L$: on retrouve bien un filtre passe-haut du premier ordre, en accord avec l'analyse qualitative de la question 1. La pente de +20 dB/décade hors bande passante est la signature de l'ordre 1 (un ordre n donnerait +20n dB/ décade).

5. Diagramme de Bode asymptotique

- la phase $\varphi = \arg \underline{H}$.

Diagramme en gain

Les deux asymptotes de la question 4 sont

$$\text{BF : } G_{dB} = 20 \log |\underline{H}| = 20 \log \frac{\omega}{\omega_c} \text{ (droite de pente } +20 \text{ dB/ décade passant par } (\omega_c, 0)), \quad \text{HF : } G_{dB} = 0.$$

Elles se coupent en $\omega = \omega_c$: la pulsation de coupure est le point de cassure du diagramme asymptotique.

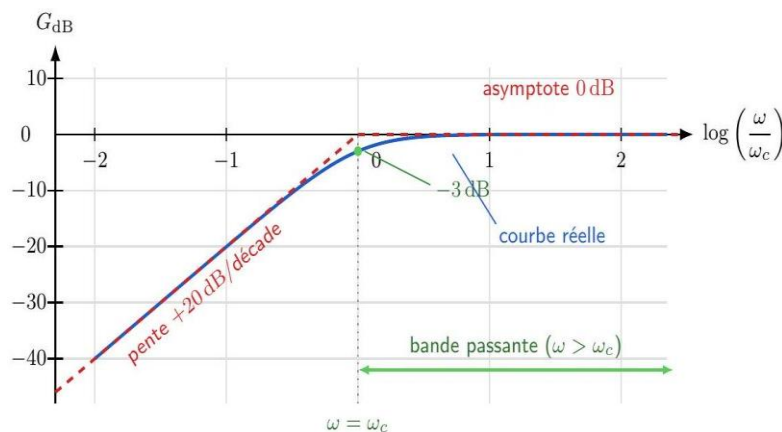


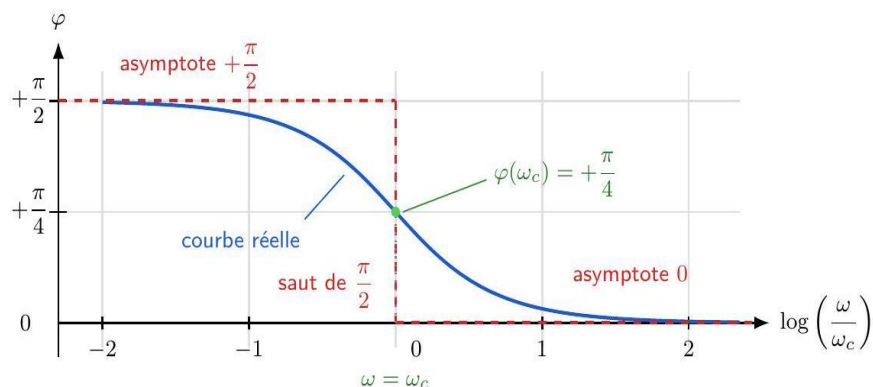
Diagramme en phase

Basses fréquences :

$$\varphi = \arg \underline{H} = \arg(jx) = +\pi/2$$

Hautes fréquences : $\varphi = \arg \underline{H} = \arg(1) = 0$

le diagramme asymptotique présente une discontinuité en ω_c (alors que la courbe réelle y passe continûment par $+\pi/4$)



$$6. \quad \langle \sin \rangle = \langle \cos \rangle = 0; \quad \langle \sin^2 \rangle = \langle \cos^2 \rangle = 1/2$$

7. La valeur moyenne correspond à la composante continue, soit à la composante de fréquence nulle. On lit sur le spectre une valeur moyenne d'1 V.

Il y a deux composantes à des fréquences non nulles : le signal n'est pas de forme sinusoïdale.

Il s'agit du signal (a), le signal b) rectangulaire étant très riche en harmoniques d'ordre élevé contrairement au spectre fourni.