

Colle N°1 : 14 au 18 Septembre 2026■ **Au programme des exercices**

Révisions d'électricité de MP2I, Chapitre ELEC1 : rappels et compléments – systèmes linéaires et signaux périodiques, application au filtrage.

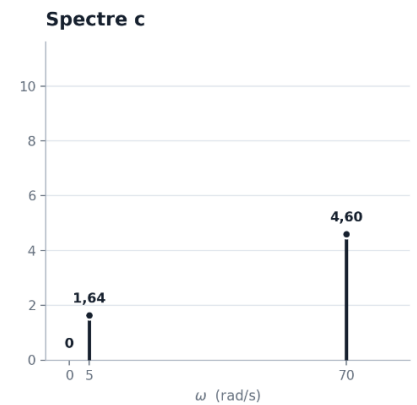
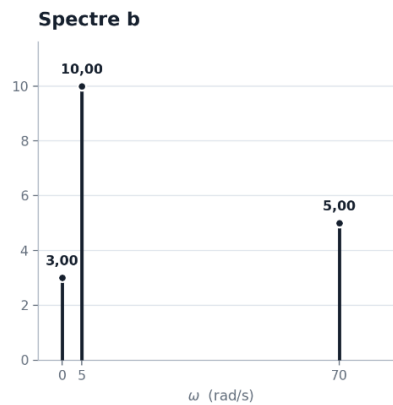
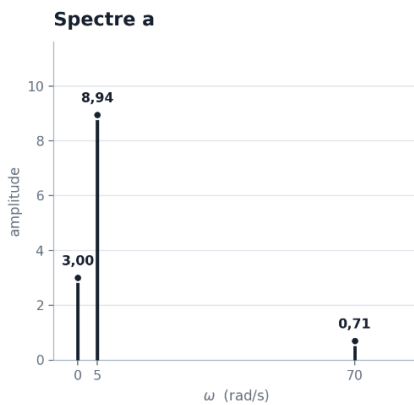
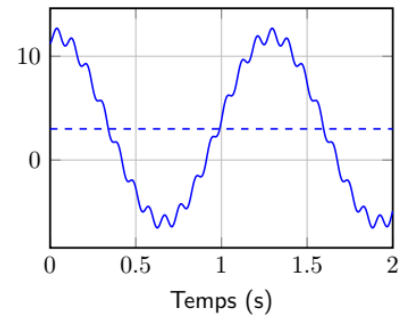
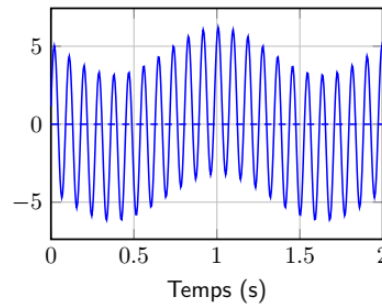
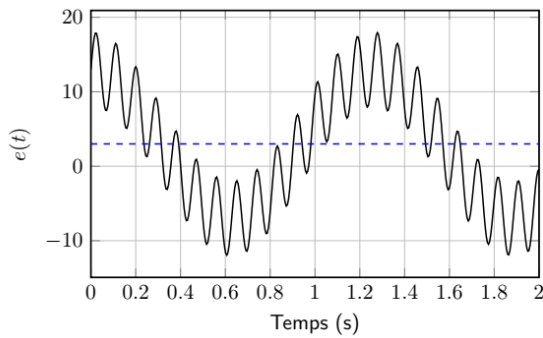
Attention ! pas encore de filtrage numérique ! Pas d'exercice avec des ALI en régime saturé, et seulement des cas très simples pour les ALI en régime linéaire (hors programme, à réserver aux étoiles)

■ **Questions de cours seules**

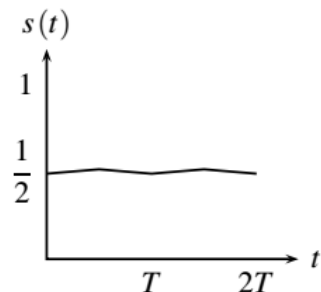
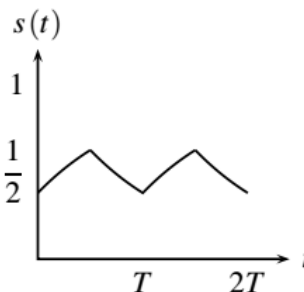
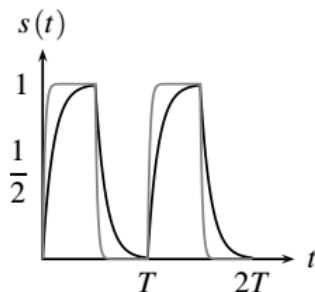
1. ❤️ Circuit RC série en régime sinusoïdal alimenté par une tension harmonique $e(t) = E \cos(\omega t)$: déterminer $u_C(t)$ sous la forme $u_C = U_{C,m} \cos(\omega t + \varphi)$.
2. ❤️ On considère un circuit RLC série en régime sinusoïdal forcé, alimenté par une tension sinusoïdale $e(t) = E \cos(\omega t)$.
 - a) Etablir la fonction de transfert en courant (tension aux bornes de R) : $\underline{H} = \underline{u_r}/\underline{E}$. . Rappeler sans démonstration l'expression de la pulsation de résonance ainsi que le lien entre la largeur de la résonance (largeur de la bande passante) et le facteur de qualité.
 - b) ☆ Etablir ces résultats (pulsation de résonance et largeur de bande passante)
3. ❤️ Citer les principales caractéristiques des résonances en tension et en intensité (ou en élongation et en vitesse)
4. ❤️ On étudie un circuit RC série alimenté par une source idéale de tension délivrant une tension sinusoïdale $e(t) = E \cos(\omega t)$, en considérant la tension de sortie $s(t)$ aux bornes du condensateur.
 - a) Faire une analyse qualitative de la nature du filtre puis établir la fonction de transfert.
 - b) Etablir les expressions des asymptotes du diagramme de Bode en gain et représenter leur allure.
 - c) Déterminer l'expression de la pulsation de coupure
5. ❤️ On considère un filtre RLC série alimenté par un générateur de tension sinusoïdale, et on étudie la tension de sortie aux bornes de la résistance.
 - a) Déterminer par une analyse qualitative la nature du filtre
 - b) Montrer que la fonction de transfert s'écrit :

$$\underline{H} = \frac{1}{1 + jQ \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right)}$$
 - c) Tracer en justifiant le diagramme de Bode asymptotique en gain.
 - d) ☆ Tracer l'allure du diagramme réel pour quelques valeurs du facteur de qualité.
6. On applique le signal $e(t) = 3 + 10\cos(5t) + 5\sin(70t)$ représenté ci-dessous à l'entrée d'un filtre passe-bas et d'un filtre passe-haut de fréquences de coupure assez proches.
 - a) Associer chaque spectre aux signaux représentés et identifier la sortie de chaque filtre.
 - b) Estimer le gain statique (ou gain à fréquence nulle) du filtre passe-bas.

c) Quel filtre faudrait-il utiliser pour obtenir la valeur moyenne du signal d'entrée ?



7. ♥ On applique un signal carré de période $T = 2$ ms en entrée de 4 filtres passe-bas du premier ordre caractérisés par leurs pulsations propres ω_i , telles que $\omega_1 = \pi \cdot 10^3 \text{ rad/s}$, $\omega_2 = \pi \cdot 10^4 \text{ rad/s}$, $\omega_3 = \pi \cdot 10^2 \text{ rad/s}$ et $\omega_4 = 20\pi \text{ rad/s}$. Associer aux signaux de sortie ci-dessous des filtres a, b, c et d les pulsations propres ω_i associées. Interpréter la forme de ces signaux. Quel peut-être l'intérêt pratique du filtre à $\omega_4 = 20\pi \text{ rad/s}$?

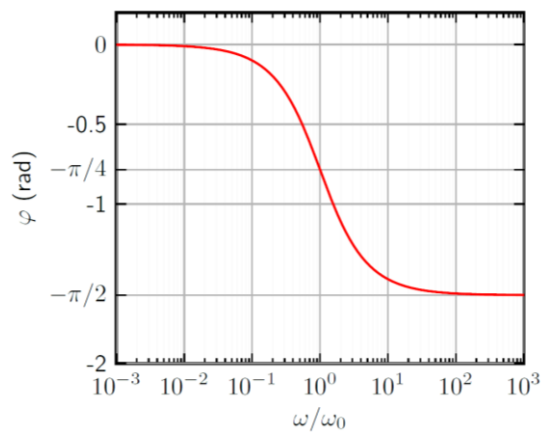
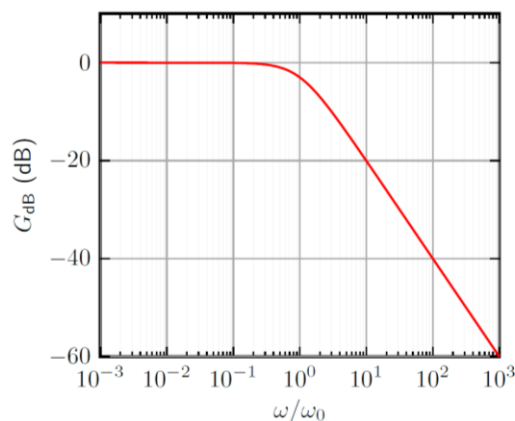


Signaux de sortie : des filtres **a** (en gris) et **b** (en noir) ;

filtre **c** ;

filtre **d**

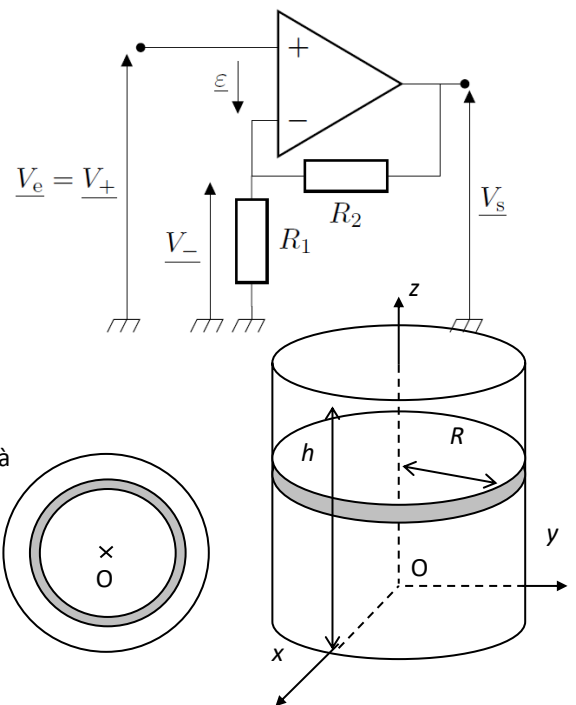
8. Considérons le filtre dont le diagramme de Bode est donné ci-dessous.



- a) Identifier la nature et l'ordre du filtre.

- b) On envoie en entrée du filtre le signal $e(t) = E_1 \cos(\omega_1 t) + E_2 \cos(\omega_2 t) + E_3 \cos(\omega_3 t)$ avec $\omega_1 = \omega_0/100$, $\omega_2 = \omega_0$ et $\omega_3 = 100 \omega_0$. Représenter le spectre associé à ce signal. Donner l'expression du signal de sortie.

- c) On envoie en entrée un signal créneau de pulsation $\omega_0/1000$. Prévoir qualitativement l'allure et l'amplitude du signal de sortie.
- d) Même question si le signal a une pulsation $100 \omega_0$.
9. On filtre un signal créneau de période $T = 1 \text{ ms}$, d'amplitude $A = 1 \text{ V}$ et de valeur moyenne 1 V par un filtre passe-bande de fréquence centrale $\omega_0 = 6\pi \cdot 10^3 \text{ rad/s}$ et de facteur de qualité $Q = 50$. Décrire en justifiant les caractéristiques du signal de sortie.
10. ☆ On considère un multiplieur analogique de relation $v = v_1 v_2 / E$. Que contient la sortie du multiplieur lorsqu'on lui applique deux sinusoïdes de pulsations ω_1 et ω_2 ? En déduire la valeur moyenne de v , en distinguant $\omega_1 = \omega_2$ et $\omega_1 \neq \omega_2$. Quel dispositif permet d'obtenir cette valeur moyenne?
11. ☆ Etablir la fonctions de transfert du montage ci-contre



12. a. ♥ Faire un schéma du repérage en coordonnées cylindriques. Donner les expressions d'un déplacement élémentaire, du volume élémentaire, Rappeler les expressions de la surface latérale d'un cylindre de rayon r et de hauteur h , ainsi que son volume.
- b. Donner les expressions des surfaces mésoscopiques correspondant à une couronne dans le plan $z = \text{cte}$ et d'une couronne à $r = \text{cte}$ (remarque : ces deux résultats doivent pouvoir être donnés sans calculs par analyse géométrique, mais la démonstration doit être connue).
13. a. ♥ Faire un schéma du repérage en coordonnées sphériques. Rappeler les expressions de la surface et du volume d'une sphère de rayon r .
- b. Donner les expressions d'un déplacement élémentaire, du volume élémentaire, ainsi que du volume mésoscopique correspondant à une écorce sphérique de rayon r et d'épaisseur dr (remarque : ce résultat doit pouvoir être donné sans calculs par analyse géométrique, mais la démonstration doit être connue).

■ Questions de cours avec éléments de réponse

1. ❤ Circuit RC série en régime sinusoïdal alimenté par une tension harmonique $e(t) = E \cos(\omega t)$: déterminer $u_c(t)$ sous la forme $u_c = U_{c,m} \cos(\omega t + \varphi)$.

Éléments de réponse : Les impédances $\underline{Z}_R = R$ et $\underline{Z}_C = \frac{1}{jC\omega}$ associées respectivement à R et C sont associées en série et forment un pont diviseur de tension ; on a donc :

$$\underline{u_s} = \underline{u_c} = \frac{\underline{Z}_C}{\underline{Z}_C + \underline{Z}_R} \underline{u_e} = \frac{1/jC\omega}{R + 1/jC\omega} \underline{e} = \frac{1}{1 + jRC\omega} \underline{e}$$

Par définition de la notation complexe, on a

$$U_{c,m} = |\underline{u_c}| = \left| \frac{1}{1 + jRC\omega} \underline{e} \right| = \frac{E}{\sqrt{1 + (RC\omega)^2}}$$

$$\varphi = \arg(\underline{u_c}) = \arg(\underline{e}) - \arg(1 + jRC\omega) = 0 - \arctan(RC\omega)$$

2. On considère un circuit RLC série en régime sinusoïdal forcé, alimenté par une tension sinusoïdale $e(t) = E \cos(\omega t)$.

a) Etablir la fonction de transfert en courant (tension aux bornes de R) : $\underline{H} = \underline{u_r}/\underline{E}$. Rappeler sans démonstration l'expression de la pulsation de résonance ainsi que le lien entre la largeur de la résonance (largeur de la bande passante) et le facteur de qualité.

- b) ☆ Etablir ces résultats

Éléments de réponse : Dipôles en série formant un pont diviseur de tension :

$$\underline{H} = \frac{\underline{u_r}}{\underline{E}} = \frac{R}{R + jL\omega + \frac{1}{jC\omega}} = \frac{1}{1 + j\frac{1}{R}\left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)}$$

Par définition, il y a résonance en courant lorsque l'amplitude I_m du courant, soit avec $U_{rm} = RI_m$, lorsque U_{rm} admet un maximum pour une pulsation différente de zéro ou l'infini. Ici, on a :

$$U_{rm} = |\underline{u_r}| = \left| \frac{\underline{E}}{1 + j\frac{1}{R}\left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)} \right| = \frac{E}{\sqrt{1 + \frac{1}{R^2}\left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)^2}}$$

qui est maximal pour un dénominateur minimal (numérateur constant), soit pour

$g(\omega) = 1 + 1/R^2 \left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)^2$ minimale. R^2 étant une constante, $g(\omega)$ minimale pour $\left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)^2$ minimale.

Solution évidente : $\left(L\omega_r - \frac{1}{C\omega_r}\right)^2 = 0 \Leftrightarrow \omega_r = \frac{1}{\sqrt{LC}} = \omega_0$: La résonance en intensité a lieu à la pulsation propre de l'oscillateur.

On peut alors montrer : largeur de la bande passante (largeur de la résonance, ou bande passante) :

$\Delta\omega_c = \frac{\omega_0}{Q}$ avec les pulsations de coupure ω_c telles que $I_m(\omega_c) = \frac{I_{m,max}}{\sqrt{2}}$, et Q facteur de qualité du circuit tel que

$$Q = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}}$$

Démonstration

Les pulsations de coupure $\omega_1 < \omega_2$ sont celles pour lesquelles le gain vaut $\frac{G_{max}}{\sqrt{2}}$. La bande passante est l'intervalle $[\omega_1, \omega_2]$, de largeur $\Delta\omega = \omega_2 - \omega_1$.

La condition $G(x_c) = \frac{1}{\sqrt{2}}$ s'écrit

$$\frac{1}{\sqrt{1 + Q^2 \left(x_c - \frac{1}{x_c}\right)^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow Q^2 \left(x_c - \frac{1}{x_c}\right)^2 = 1 \Leftrightarrow Q \left(x_c - \frac{1}{x_c}\right) = \pm 1.$$

En multipliant par $x_c > 0$, on obtient deux équations du second degré donc 4 solutions :

$$x_c^2 \pm \frac{1}{Q} x_c - 1 = 0, \quad \Delta = \frac{1}{Q^2} + 4 > 0, \quad x_c = \frac{\pm \frac{1}{Q} + \sqrt{\frac{1}{Q^2} + 4}}{2}$$

(on ne retient que la racine positive de chaque équation). D'où les deux solutions

$$x_{c1} = \frac{-\frac{1}{Q} + \sqrt{\frac{1}{Q^2} + 4}}{2} \quad \text{et} \quad x_{c2} = \frac{+\frac{1}{Q} + \sqrt{\frac{1}{Q^2} + 4}}{2}$$

Largeur de la bande passante : obtenue en soustrayant les deux expressions

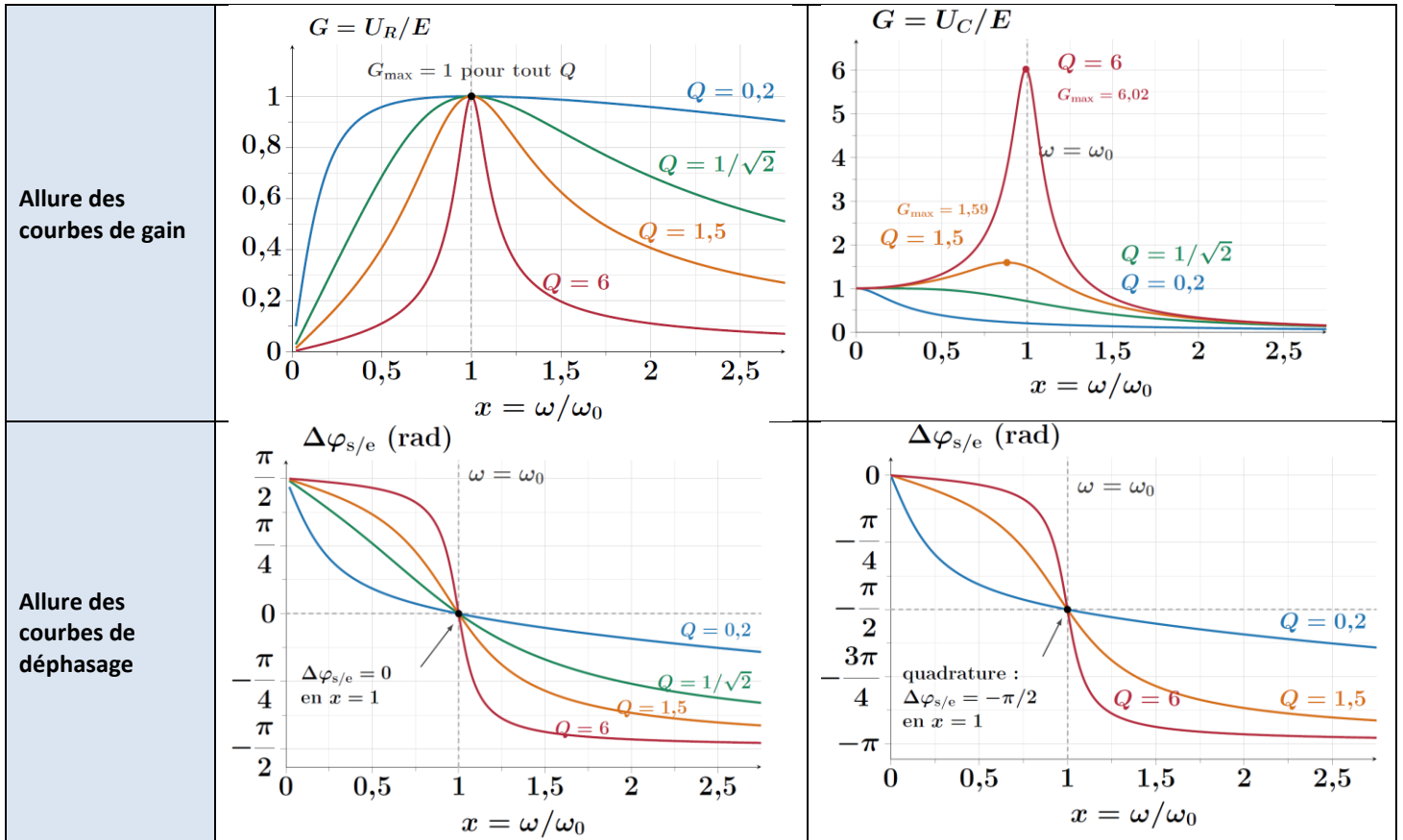
$$x_{c2} - x_{c1} = \Delta x = \frac{1}{2Q} + \frac{1}{2Q} = \frac{1}{Q} \Rightarrow \Delta x = \frac{1}{Q} \Leftrightarrow \Delta \omega = \frac{\omega_0}{Q} \Leftrightarrow \Delta f = f_{c2} - f_{c1} = \frac{f_0}{Q}$$

On peut également obtenir le facteur de qualité Q à partir de la largeur de la bande passante :

$$Q = \frac{f_0}{\Delta f} = \frac{\omega_0}{\Delta \omega}$$

3. ♥ Citer les principales caractéristiques des résonances en tension et en intensité (ou en élongation et en vitesse)

Prototype	en électronique : RLC série en mécanique : masse attachée à un ressort horizontal	
Type de résonance	Résonance en intensité i (ou en tension u_R) Résonance en vitesse	Résonance en tension u_c Résonance en élongation
Existence de la résonance	Toujours	Soumise à condition : si $Q > 1/\sqrt{2}$
Pulsation de résonance	ω_0	$\omega_{\text{res}} \leq \omega_0$ Pour $Q \gg 1$: $\omega_{\text{res}} \approx \omega_0$
Largeur de la bande passante	$\Delta \omega = \frac{\omega_0}{Q}$	Pour $Q \gg 1$: $\Delta \omega \approx \frac{\omega_0}{Q}$
Gain à la résonance	$G = 1$	Pour $Q \gg 1$: $G \approx Q$
Déphasage à la résonance	$\Delta \varphi_{s/e} = 0$ entrée et sortie en phase	$\Delta \varphi_{s/e} = -\pi/2$ entrée et sortie en quadrature
Repérage expérimental de la résonance	A l'oscilloscope, en mode XY, l'ellipse s'aplatit pour devenir une droite (déphasage nul)	Peu utilisé



4. ♥ On étudie un circuit RC série alimenté par une source idéale de tension délivrant une tension sinusoïdale $e(t) = E \cos(\omega t)$, en considérant la tension de sortie $s(t)$ aux bornes du condensateur.
- Faire une analyse qualitative de la nature du filtre puis établir la fonction de transfert.
 - Etablir les expressions des asymptotes du diagramme de Bode en gain et représenter leur allure.
 - Déterminer l'expression de la pulsation de coupure

Éléments de réponse : On note u_e la tension d'entrée. Le filtre passe-bas est obtenu en considérant une sortie $\underline{u_s} = \underline{u_C}$ aux bornes de C.

Analyse qualitative : Basses fréquences : C se comporte comme un interrupteur ouvert d'où $i \rightarrow 0$ soit $u_R = Ri \rightarrow 0$; loi des mailles : $u_C \rightarrow u_e$; hautes fréquences : C se comporte comme un interrupteur fermé (fil) d'où $u_C \rightarrow 0$: comportement passe-bas aux bornes de C.

Les impédances associées à R et C sont en série et forment un pont diviseur de tension :

$$\underline{u_s} = \underline{u_C} = \frac{Z_C}{Z_C + Z_R} \underline{u_e} \quad \Leftrightarrow \quad \underline{H} = \frac{\underline{u_C}}{\underline{u_e}} = \frac{1/jC\omega}{R + 1/jC\omega} = \frac{1}{1 + jRC\omega} = \frac{1}{1 + jx}$$

En posant $RC\omega = \frac{\omega}{\omega_0} = x$

Asymptotes dans le diagramme de Bode :

Aux basses fréquences, $\omega \rightarrow 0$ donc $x \rightarrow 0$

fonction de transfert équivalente : $\underline{H}_{BF} \simeq 1$ soit $G_{BF} = |\underline{H}_{BF}| = 1$ et $G_{dB,BF} = 20 \log(G_{BF}) = 0$

Asymptote horizontale aux basses fréquences.

Aux hautes fréquences, $x \rightarrow +\infty$, fonction de transfert équivalente :

$$\underline{H}_{HF} \simeq \frac{1}{jx} \text{ soit } G_{HF} = |\underline{H}_{HF}| = \frac{1}{x} \text{ et } G_{dB,HF} = 20 \log(G_{HF}) = -20 \log(x)$$

Asymptote à -20 dB par décade aux hautes fréquences

Par définition, à la pulsation de coupure, $|\underline{H}(x_c)| = \frac{H_0}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$ avec $|\underline{H}(x_c)| = 1/\sqrt{1+x_c^2}$ soit $x_c = 1$ et $\omega_c = \omega_0$

5. ♥ On considère un filtre RLC série alimenté par un générateur de tension sinusoïdale, et on étudie la tension de sortie aux bornes de la résistance.

- e) Déterminer par une analyse qualitative la nature du filtre
f) Montrer que la fonction de transfert s'écrit :

$$\underline{H} = \frac{1}{1 + jQ \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right)}$$

- g) Tracer en justifiant le diagramme de Bode asymptotique en gain.
h) ☆ Tracer l'allure du diagramme réel pour quelques valeurs du facteur de qualité.

Éléments de réponse :

a) Aux BF, C se comporte comme un interrupteur ouvert, aux HF, c'est L. Dans les deux cas, pas d'intensité dans le circuit donc tension aux bornes de R nulle. Filtre probable : passe-bande.

b) En posant $\frac{\omega}{\omega_0} = x$

$$\underline{H} = \frac{1}{1 + jQ \left(x - \frac{1}{x} \right)}$$

$$G = |\underline{H}| = \frac{1}{\sqrt{1 + Q^2 \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right)^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 + Q^2 \left(x - \frac{1}{x} \right)^2}}$$

Asymptotes dans le diagramme de Bode :

Aux basses fréquences, $x \rightarrow 0$ soit $\underline{H}_{BF} = \frac{jx}{Q}$

$$G_{BF} = |\underline{H}_{BF}| = \frac{x}{Q} \text{ et } G_{dB,BF} = 20 \log(G_{BF}) = 20 \log(x) - 20 \log(Q)$$

Asymptote à +20 dB par décade aux basses fréquences.

Aux hautes fréquences, $x \rightarrow +\infty$, soit $\underline{H}_{BF} = \frac{1}{jQx}$ et $G_{HF} = |\underline{H}_{HF}| = \frac{1}{Qx}$ et

$$G_{dB,HF} = 20 \log(G_{HF}) = -20 \log(x) - 20 \log(Q)$$

Asymptote à -20 dB par décade aux hautes fréquences

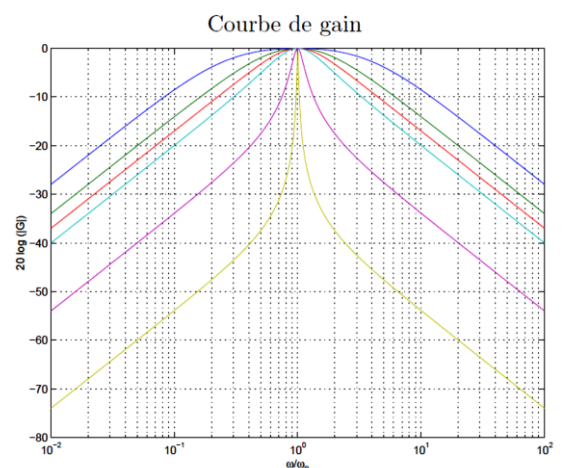
Intersection des asymptotes : $20 \log(x) - 20 \log(Q) = -20 \log(x) - 20 \log(Q) \Leftrightarrow x = 1$ avec

$$G_{dB,HF}(x = 1) = G_{dB,BF}(x = 1) = -20 \log(Q)$$

Plus le facteur de qualité est élevé, plus l'intersection des asymptotes se fait à une valeur basse du gain.

Il est nécessaire pour le tracé du diagramme réel de calculer la valeur exacte du gain en $\omega = \omega_0$ soit en $x = 1$, donc d'avoir l'expression exacte de ce gain.

$$\forall Q, G(x = 1) = 1$$



6. On applique le signal $e(t) = 3 + 10\cos(5t) + 5\sin(70t)$ représenté ci-dessous à l'entrée d'un filtre passe-bas et d'un filtre passe-haut de fréquences de coupure assez proches.

- Associer chaque spectre aux signaux représentés et identifier la sortie de chaque filtre.
- Estimer le gain statique (ou gain à fréquence nulle) du filtre passe-bas.
- Quel filtre faudrait-il utiliser pour obtenir la valeur moyenne du signal d'entrée ?

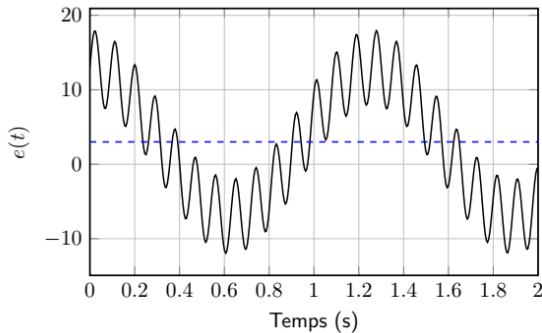


figure 1

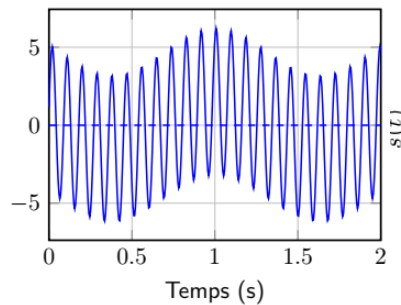


figure 2

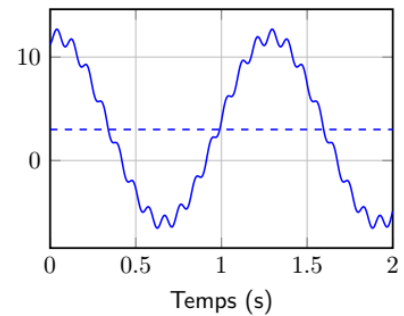
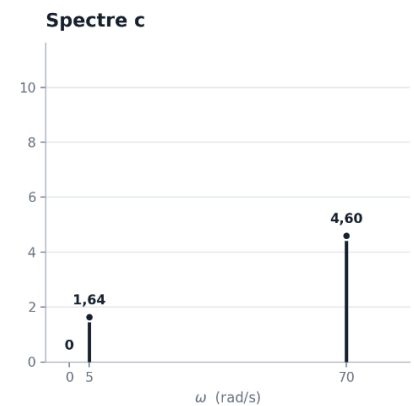
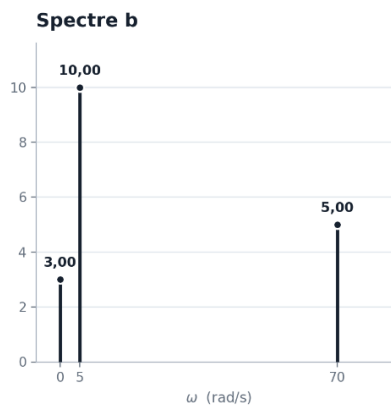
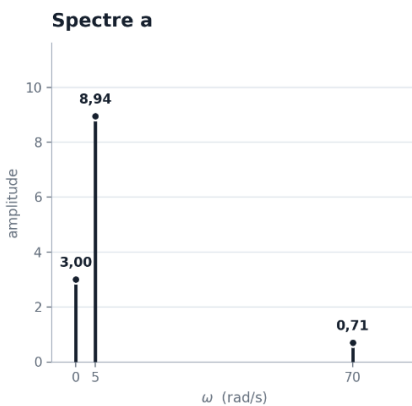


figure 3



Signaux de sortie : des filtres **a** (en gris) et **b** (en noir) ; filtre **c** ; filtre **d**

Éléments de réponse :

a) Le signal de la figure 1 correspond au signal d'entrée et au spectre b, non filtré

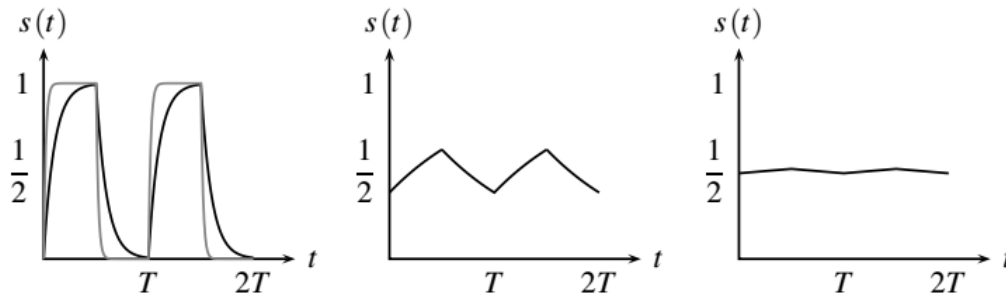
Le signal de la figure 3 correspond à un filtrage passe-bas (composante continue conservée, variations rapides atténuées) ; il a pour spectre le spectre a : amplitude à la fréquence nulle, associée à la valeur moyenne du signal, non atténuée, avec un filtrage important de la composante HF (rang 14).

Le signal 2 correspond au filtrage passe haut et au spectre c, la composante continue est supprimée, la composante fondamentale plus atténuée que la composante de rang 14 qui est quasi totalement transmise (gain proche de 1).

b) Le signal en sortie du filtre passe-bas possède une moyenne d'environ 3, tout comme le signal d'entrée. Le gain statique du filtre est quasiment unitaire.

c) Filtre moyenneur : Filtre passe-bas de pulsation de coupure très basse (ici par exemple $\omega_c = 0,1 \text{ rad.s}^{-1}$, en tous cas suffisamment inférieure à $\omega_1 = 5 \text{ rad.s}^{-1}$).

7. ♥ On applique un signal carré de période $T = 2 \text{ ms}$ en entrée de 4 filtres passe-bas du premier ordre caractérisés par leurs pulsations propres ω_i , telles que $\omega_1 = \pi \cdot 10^3 \text{ rad/s}$, $\omega_2 = \pi \cdot 10^4 \text{ rad/s}$, $\omega_3 = \pi \cdot 10^2 \text{ rad/s}$ et $\omega_4 = 20\pi \text{ rad/s}$. Associer aux signaux de sortie ci-dessous des filtres a, b, c et d les pulsations propres ω_i associées. Interpréter la forme de ces signaux. Quel peut-être l'intérêt pratique du filtre à $\omega_4 = 20\pi \text{ rad/s}$?



- 1) Le signal de gauche résulte d'un filtrage passe-bas avec $T \gg \tau$, $f \ll f_c = 1/\tau$, le signal est peu déformé mais lissé au niveau des discontinuités. En effet, la composante continue et la forme globale sont conservées car un grand nombre d'harmoniques sont transmises. En revanche, les harmoniques de hautes fréquences nécessaires à la description des discontinuités du signal (ce sont elles qui varient rapidement) sont coupées et le signal s'en trouve lissé. Le signal varie lentement devant le temps de réaction du système, le système a « le temps » de répondre, le signal « traverse » le filtre sans trop de modifications.

Plus T est petit devant τ , plus les composantes spectrales (hormis la composante continue) se trouvent dans la bande coupée d'ordre 1, donc intégrées. Le signal conserve sa composante continue, sa partie alternative est de faible amplitude et de forme triangulaire (intégration du carré).

Filtre à $\omega_2 = \pi \cdot 10^4 \text{ rad/s}$: la grande majorité du spectre de $e(t)$ se trouve dans la bande passante du filtre : signal quasi rectangle, seules les discontinuités les plus importantes caractérisées par les harmoniques de fréquences très élevées sont atténuées : filtre a.

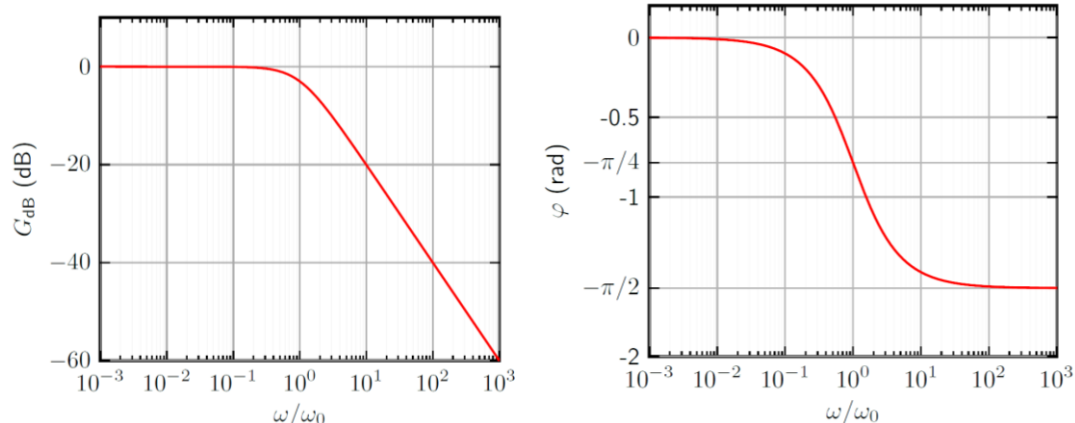
Filtre à $\omega_4 = 20\pi \text{ rad/s}$: en dehors de la composante continue, l'ensemble du spectre se trouve largement hors de la bande-passante : quasi seule la valeur moyenne est transmise, signal de sortie quasi constant, tel que $s(t) \approx \langle e(t) \rangle = E_0$: filtre d. (Le signal d'entrée varie trop vite par rapport au temps de réponse du système ($f \gg f_c = 1/(2\pi\tau)$).)

Filtre à $\omega_3 = \pi \cdot 10^2 \text{ rad/s}$: proche du filtre d, donc filtre c. L'ensemble du spectre se trouve également hors de la bande passante, au niveau de l'asymptote à -20 dB : comportement intégrateur, cohérent avec le signal triangulaire observé, qui correspond bien à l'intégrale du signal rectangle, avec une atténuation de l'amplitude (mais moindre que celle du filtre d).

Filtre à $\omega_1 = \pi \cdot 10^3 \text{ rad/s}$: proche du filtre a, donc filtre b.

Filtre à ω_4 : filtre moyenneur

8. Considérons le filtre dont le diagramme de Bode est donné ci-dessous.



- Identifier la nature et l'ordre du filtre.
- On envoie en entrée du filtre le signal $e(t) = E_1 \cos(\omega_1 t) + E_2 \cos(\omega_2 t) + E_3 \cos(\omega_3 t)$ avec $\omega_1 = \omega_0/100$, $\omega_2 = \omega_0$ et $\omega_3 = 100 \omega_0$. Représenter le spectre associé à ce signal. Donner l'expression du signal de sortie.
- On envoie en entrée un signal créneau de pulsation $\omega_0/1000$. Prévoir qualitativement l'allure et l'amplitude du signal de sortie.
- Même question si le signal a une pulsation $100 \omega_0$.

- e) On considère un signal créneau de fréquence 1 kHz ayant une valeur moyenne non nulle. A quelle composante spectrale correspond cette valeur moyenne ? de quelle manière obtenir cette valeur moyenne seule en sortie d'un filtre ? comment appelle-t-on un filtre permettant de réaliser cette opération ?

Éléments de réponse :

- a) Passe-bas (forme du diagramme de Bode en gain) du premier ordre (pente à -20 dB/décade).
- b) On étudie séparément chaque composante en lisant les valeurs de G_{dB} et φ pour la pulsation de la composante étudiée, avec $G = \frac{S_i}{E_i} = 10^{\frac{G_{dB}}{20}}$ soit $S_i = G E_i = 10^{\frac{G_{dB}}{20}} E_i$

Composante	$\frac{\omega_i}{\omega_0}$	$G_{dB,i}$ (en dB)	$G_i = 10^{\frac{G_{dB,i}}{20}}$	$S_i = G E_i$	φ_i	$s_i(t)$
$\omega_1 = \frac{\omega_0}{100}$	$\frac{\omega_1}{\omega_0} = 10^{-2}$	0	1	E_1	0	$E_1 \cos(\omega_1 t)$
$\omega_2 = \omega_0$	$\frac{\omega_2}{\omega_0} = 1$	-3	$10^{\frac{-3}{20}} = 1/\sqrt{2}$	$\frac{E_2}{\sqrt{2}}$	$-\frac{\pi}{4}$	$\frac{E_2}{\sqrt{2}} \cos\left(\omega_2 t - \frac{\pi}{4}\right)$
$\omega_3 = 100 \omega_0$	$\frac{\omega_3}{\omega_0} = 10^2$	-40	$10^{\frac{-40}{20}} = 10^{-2}$	$\frac{E_3}{100}$	$-\frac{\pi}{2}$	$\frac{E_3}{100} \cos\left(\omega_3 t - \frac{\pi}{2}\right)$

Finalement $s(t) = E_1 \cos(\omega_1 t) + \frac{E_2}{\sqrt{2}} \cos\left(\omega_2 t - \frac{\pi}{4}\right) + \frac{E_3}{100} \cos\left(\omega_3 t - \frac{\pi}{2}\right)$.

- c) pulsation $\omega_0/1000$: domaine des très basses fréquences, le signal n'est presque pas modifié (de même que son amplitude, le gain aux basses fréquences étant de 1) car la très grande majorité de son spectre se trouve dans la bande passante, hormis les fréquences les plus élevées : seules les variations brutales vont donc être atténuées (angles du créneau arrondis)
- d) pulsation $100 \omega_0$: domaine des très hautes fréquences, le signal est très atténué (gain de 10^{-2} pour le fondamental). De plus, il s'agit de la zone où l'asymptote à -20 dB/décade est atteinte : domaine intégrateur. Le signal d'entrée créneaux donne donc un signal de sortie triangulaire.

9. On filtre un signal créneau de période $T = 1 \text{ ms}$, d'amplitude $A = 1 \text{ V}$ et de valeur moyenne 1 V par un filtre passe-bande de pulsation caractéristique $\omega_0 = 6\pi \cdot 10^3 \text{ rad/s}$ et de facteur de qualité $Q = 60$. Décrire en justifiant les caractéristiques du signal de sortie. Rappel : On montre que la décomposition en série de Fourier d'une fonction carrée $f(t)$ de période T et d'amplitude A et de valeur moyenne nulle est :

$$f(t) = \frac{4A}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos[(2n+1)\omega t]}{2n+1} = \frac{4A}{\pi} \left(\cos \omega t + \frac{1}{3} \cos 3\omega t + \frac{1}{5} \cos 5\omega t + \dots \right)$$

Éléments de correction :

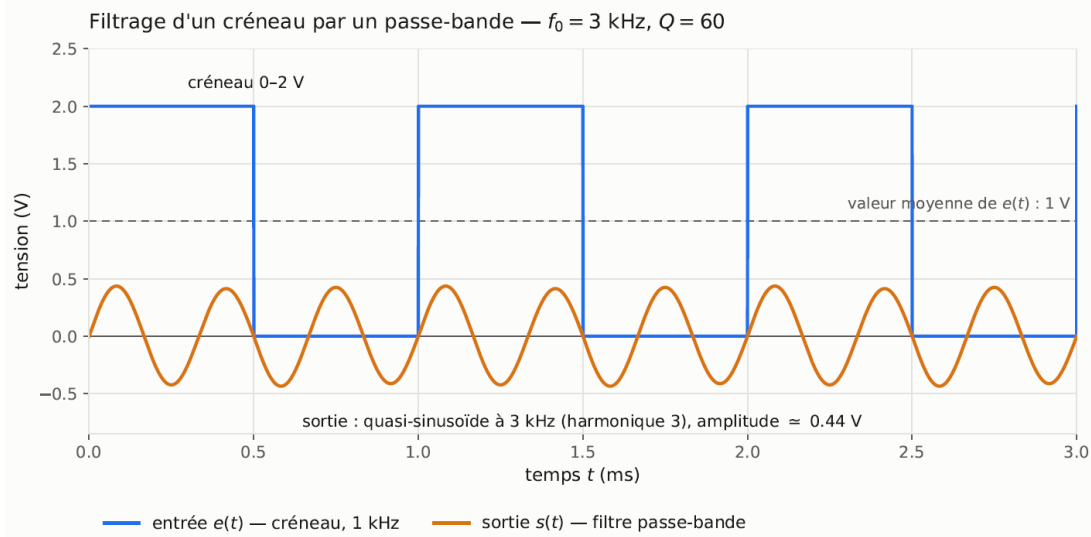
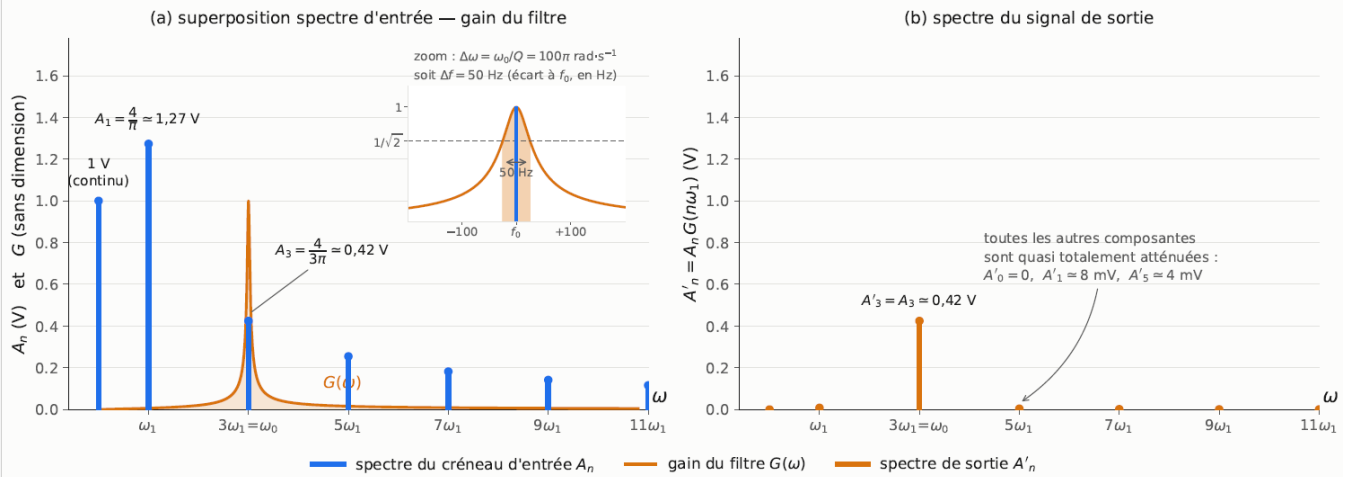
La bande passante contient la pulsation caractéristique ω_0 (facteur de qualité élevé, elle est quasi centrée sur elle).

Largeur de la bande passante : $\Delta\omega = \omega_0/Q = \pi \cdot 10^2 \text{ rad/s}$

Spectre du créneau : Pulsation du fondamental $\omega = 2\pi/T = 2\pi \cdot 10^3 \text{ rad/s}$

On a donc $\omega_0 = 3\omega$: l'harmonique de rang trois se trouve dans la bande passante ; tandis que d'après la largeur de la bande passante, les autres harmoniques se trouvent largement en dehors. Le signal de sortie a donc une unique harmonique : signal sinusoïdal (de valeur moyenne nulle, la composante continue ayant été filtrée), de fréquence trois fois plus élevée que le signal carré d'entrée, avec une amplitude $\frac{4A}{3\pi} \approx 0,4 \text{ A}$: amplitude nettement plus faible.

Filtrage d'un créneau (1 kHz) par un passe-bande $\omega_0 = 6\pi \cdot 10^3 \text{ rad}\cdot\text{s}^{-1}$, $Q = 60$



10. ☆ On considère un multiplieur analogique de relation $v = v_1 v_2 / E$. Que contient la sortie du multiplieur lorsqu'on lui applique deux sinusoïdes de pulsations ω_1 et ω_2 ? En déduire la valeur moyenne de v , en distinguant $\omega_1 = \omega_2$ et $\omega_1 \neq \omega_2$. Quel dispositif permet d'obtenir cette valeur moyenne ?

Le multiplieur transpose les fréquences. En notant $s_m(t)$ le signal en sortie du multiplieur, avec des signaux d'entrée $e_i(t) = V_i \cos(\omega_i t + \varphi_i)$, on obtient :

$$s_m(t) = \frac{V_1 V_2}{E} \cos(\omega_1 t + \varphi_1) \cos(\omega_2 t + \varphi_2) \\ = \frac{V_1 V_2}{2E} [\cos((\omega_1 - \omega_2)t + (\varphi_1 - \varphi_2)) + \cos((\omega_1 + \omega_2)t + (\varphi_1 + \varphi_2))].$$

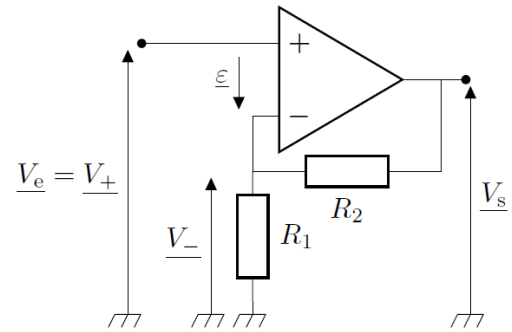
(on exploite la relation trigo : $\cos(a) \cos(b) = 1/2 [\cos(a + b) + \cos(a - b)]$)

$\omega_1 \neq \omega_2$: deux sinusoïdes de fréquences non nulles $\Rightarrow \langle v \rangle = 0$.

$\omega_1 = \omega_2 = \omega_0$ (déphasage $\Delta\varphi = \varphi_1 - \varphi_2$) : le terme de différence devient continu, $\langle v \rangle = \frac{V_1 V_2}{2E} \cos \varphi$.

La valeur moyenne est obtenue à l'aide d'un filtre moyennneur, soit un filtre passe-bas de pulsation de coupure très basse. (principe de la détection synchrone)

11. ☆ Etablir la fonctions de transfert du montage ci-contre



Éléments de réponse :

Le circuit présente une boucle de rétroaction négative : régime linéaire avec $V_+ = V_-$ et $i_e^+ = i_e^- = 0$.

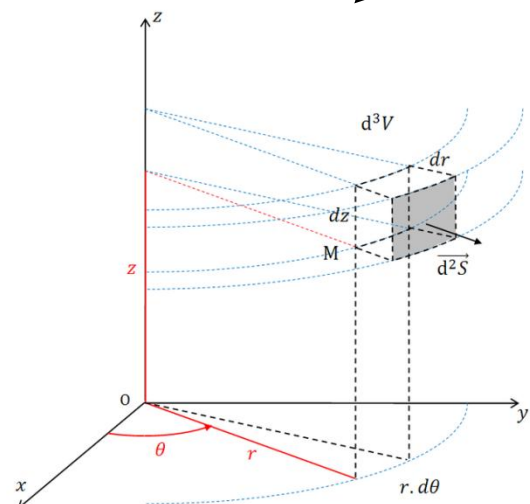
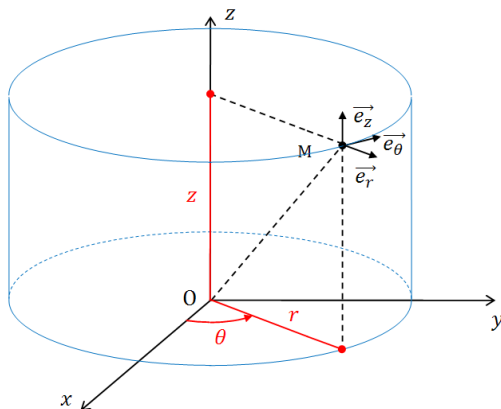
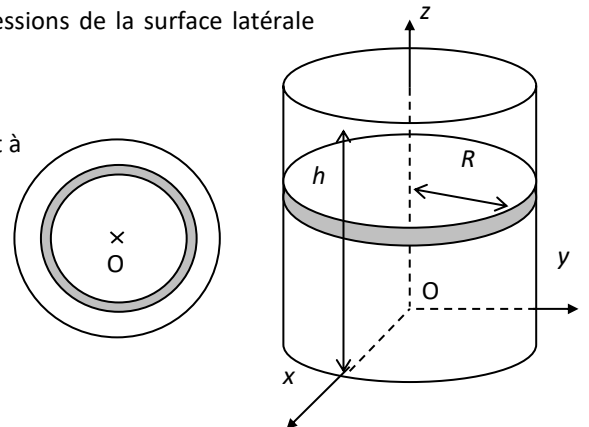
Avec $i_e^- = 0$, R_1 et R_2 sont en série, et forment donc un pont diviseur de tension. Tension aux bornes de l'ensemble : V_s , tension aux bornes de R_1 : V_- , or en régime linéaire $V_+ = V_- = V_e$.

D'où $V_e = \frac{R_1}{R_1 + R_2} V_s$, soit $H = \frac{V_s}{V_e} = 1 + \frac{R_2}{R_1}$.

amplificateur non inverseur

12. a. ♥ Faire un schéma du repérage en coordonnées cylindriques. Donner les expressions d'un déplacement élémentaire, du volume élémentaire, Rappeler les expressions de la surface latérale d'un cylindre de rayon r et de hauteur h , ainsi que son volume.

b. Donner les expressions des surfaces mésoscopiques correspondant à une couronne dans le plan $z = \text{cte}$ et d'une couronne à $r = \text{cte}$ (remarque : ces deux résultats doivent pouvoir être donnés sans calculs par analyse géométrique, mais la démonstration doit être connue).



Déplacement élémentaire : $d\vec{OM} = dr \vec{e}_r + r d\theta \vec{e}_\theta + dz \vec{e}_z$

Volume élémentaire : $d^3V = r d\theta dr dz$

Surface latérale et volume d'un cylindre de rayon r et de hauteur h : $S_{lat} = 2\pi r h$ et $V = \pi r^2 h$

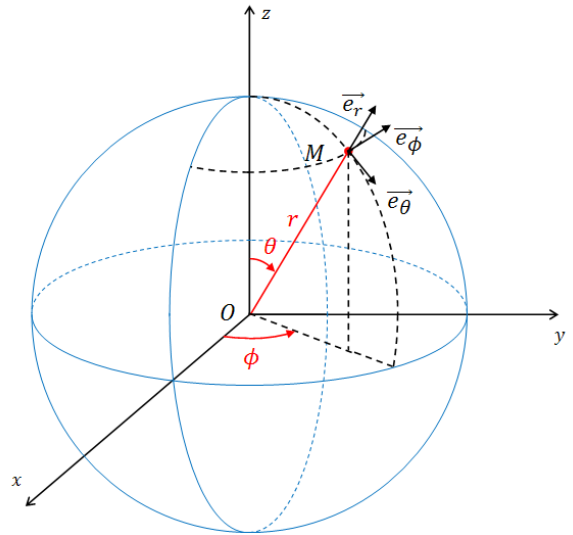
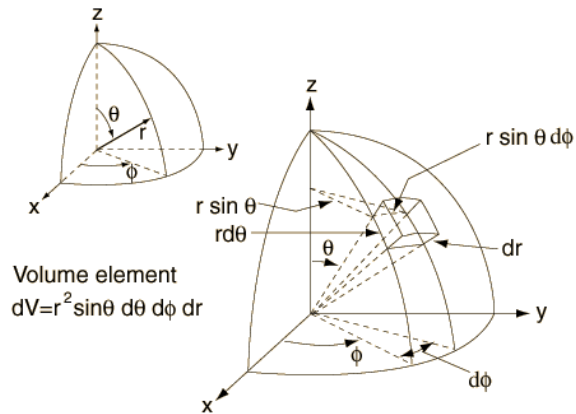
Couronne à $z = \text{cte}$: $dS_z = 2\pi r dr$ (surface élémentaire $d^2S = r d\theta dr$ intégrée sur θ variant de 0 à 2π)

Couronne à $r = \text{cte}$: $dS_r = 2\pi R dz$ (surface élémentaire $d^2S = R d\theta dz$ intégrée sur θ variant de 0 à 2π)

13. a. ♥ Faire un schéma du repérage en coordonnées sphériques. Rappeler les expressions de la surface et du volume d'une sphère de rayon r .

b. Donner les expressions d'un déplacement élémentaire, du volume élémentaire, ainsi que du volume mésoscopique correspondant à une écorce sphérique de rayon r et d'épaisseur dr (remarque : ce résultat doit pouvoir être donné sans calculs par analyse géométrique, mais la démonstration doit être connue).

Surface et volume d'une sphère de rayon r : $S = 4\pi r^2$ et
 $V = \frac{4}{3}\pi r^3$



Déplacement élémentaire : $d\vec{OM} = dr \, \vec{e}_r + r d\theta \, \vec{e}_\theta + r \sin\theta d\phi \, \vec{e}_\phi$

Volume élémentaire : $d^3V = r^2 \sin\theta d\theta d\phi dr$

Ecorce sphérique de rayon r et d'épaisseur dr :

$$dV = 4\pi r^2 dr$$