

Colle N°2 : 21 au 25 Septembre 2026■ **Au programme des exercices**

Révisions d'électricité de MP2I,

Chapitre ELEC1 : rappels et compléments – systèmes linéaires et signaux périodiques, application au filtrage.

attention ! pas encore de filtrage numérique ! Pas d'exercice avec des ALI en régime saturé, et seulement des cas très simples pour les ALI en régime linéaire (hors programme, à réserver aux étoiles)

Révisions de mécanique de MP2I

(**attention !** pas encore de particules chargées, de forces centrales ni de mécanique du solide !)

■ **Questions de cours seules**

1. ♥ Circuit RC série en régime sinusoïdal alimenté par une tension harmonique $e(t) = E \cos(\omega t)$: déterminer $u_C(t)$ sous la forme $u_C = U_{C,m} \cos(\omega t + \varphi)$.
2. On considère un circuit RLC série en régime sinusoïdal forcé, alimenté par une tension sinusoïdale $e(t) = E \cos(\omega t)$.
 - a) Etablir la fonction de transfert en courant (tension aux bornes de R) : $\underline{H} = \underline{u_r}/\underline{E}$. Rappeler sans démonstration l'expression de la pulsation de résonance ainsi que le lien entre la largeur de la résonance (largeur de la bande passante) et le facteur de qualité.
 - b) ☆☆ Etablir ces résultats
3. ♥ Citer les principales caractéristiques des résonances en tension et en intensité (ou en élongation et en vitesse)
4. On étudie un circuit RC série alimenté par une source idéale de tension délivrant une tension sinusoïdale $e(t) = E \cos(\omega t)$, en considérant la tension de sortie $s(t)$ aux bornes du condensateur.
 - a) ♥ Faire une analyse qualitative de la nature du filtre puis établir la fonction de transfert.
 - b) ♥ Etablir les expressions des asymptotes du diagramme de Bode en gain et représenter leur allure.
 - c) Déterminer l'expression de la pulsation de coupure
5. On considère un filtre RLC série alimenté par un générateur de tension sinusoïdale, et on étudie la tension de sortie aux bornes de la résistance.
 - a) ♥ Déterminer par une analyse qualitative la nature du filtre
 - b) ♥ Montrer que la fonction de transfert s'écrit :
 - c) $\underline{H} = \frac{1}{1 + jQ\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)}$
 - d) ♥ Tracer en justifiant le diagramme de Bode asymptotique en gain.
 - e) ☆ Tracer l'allure du diagramme réel pour quelques valeurs du facteur de qualité.
6. On applique le signal $e(t) = 3 + 10\cos(5t) + 5\sin(70t)$ représenté ci-dessous à l'entrée d'un filtre passe-bas et d'un filtre passe-haut de fréquences de coupure assez proches.

- Associer chaque spectre aux signaux représentés et identifier la sortie de chaque filtre.
- Estimer le gain statique (ou gain à fréquence nulle) du filtre passe-bas.
- Quel filtre faudrait-il utiliser pour obtenir la valeur moyenne du signal d'entrée ?

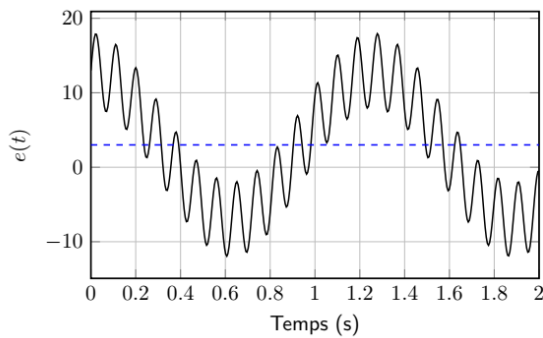


figure 1

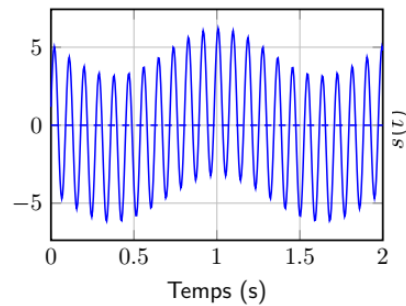


figure 2

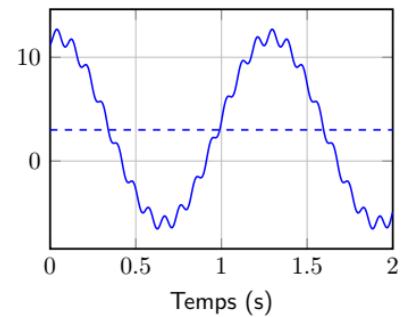
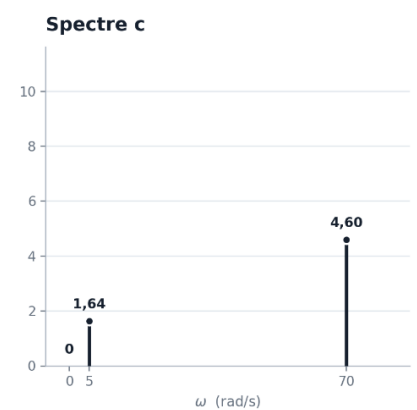
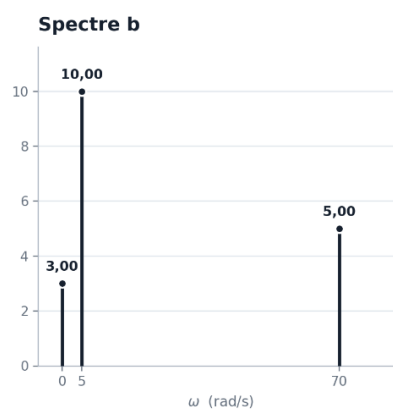
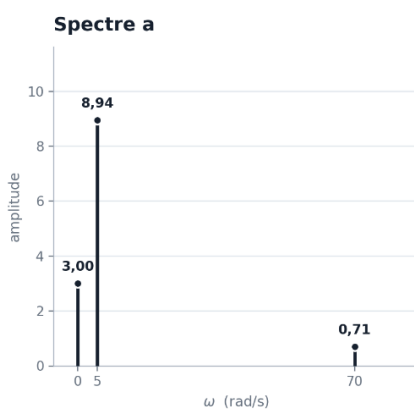
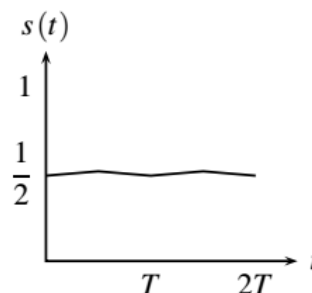
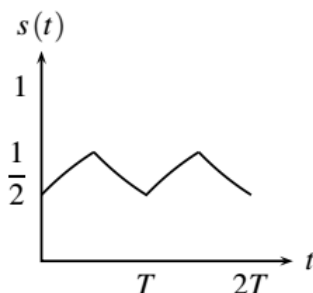
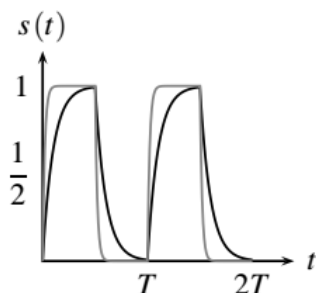


figure 3

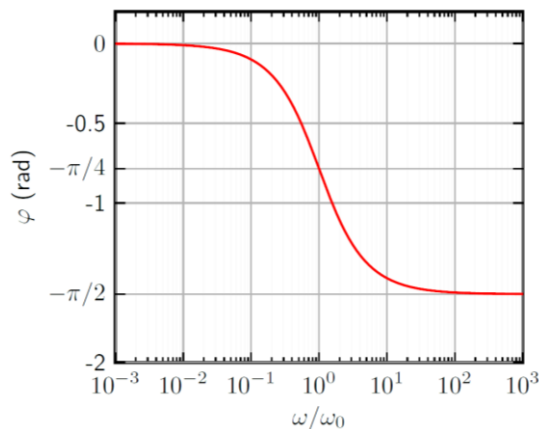
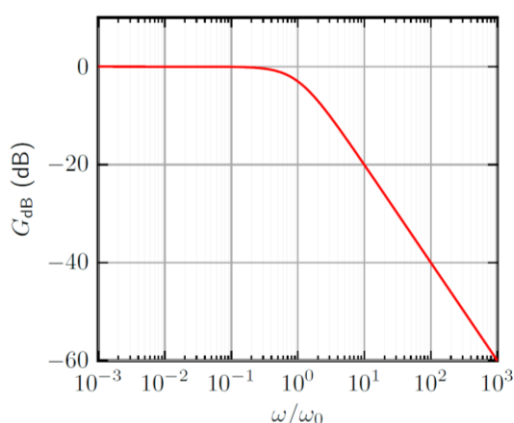


Signaux de sortie : des filtres **a** (en gris) et **b** (en noir) ; filtre **c** ; filtre **d**

7. ❤ On applique un signal carré de période $T = 2$ ms en entrée de 4 filtres passe-bas du premier ordre caractérisés par leurs pulsations propres ω_i , telles que $\omega_1 = \pi \cdot 10^3 \text{ rad/s}$, $\omega_2 = \pi \cdot 10^4 \text{ rad/s}$, $\omega_3 = \pi \cdot 10^2 \text{ rad/s}$ et $\omega_4 = 20\pi \text{ rad/s}$. Associer aux signaux de sortie ci-dessous des filtres a, b, c et d les pulsations propres ω_i associées. Interpréter la forme de ces signaux. Quel peut-être l'intérêt pratique du filtre à $\omega_4 = 20\pi \text{ rad/s}$?



8. Considérons le filtre dont le diagramme de Bode est donné ci-dessous.

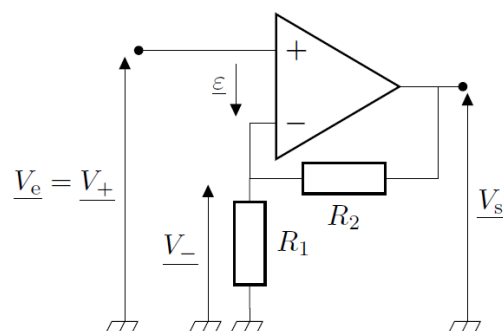


- a) Identifier la nature et l'ordre du filtre.
- b) On envoie en entrée du filtre le signal $e(t) = E_1 \cos(\omega_1 t) + E_2 \cos(\omega_2 t) + E_3 \cos(\omega_3 t)$ avec $\omega_1 = \omega_0/100$, $\omega_2 = \omega_0$ et $\omega_3 = 100 \omega_0$. Représenter le spectre associé à ce signal. Donner l'expression du signal de sortie.
- c) On envoie en entrée un signal créneau de pulsation $\omega_0/1000$. Prévoir qualitativement l'allure et l'amplitude du signal de sortie.
- d) Même question si le signal a une pulsation $100 \omega_0$.
- e) On considère un signal créneau de fréquence 1 kHz ayant une valeur moyenne non nulle. A quelle composante spectrale correspond cette valeur moyenne ? de quelle manière obtenir cette valeur moyenne seule en sortie d'un filtre ? comment appelle-t-on un filtre permettant de réaliser cette opération ?
9. On filtre un signal créneau de période $T = 1 \text{ ms}$, d'amplitude $A = 1 \text{ V}$ et de valeur moyenne 1 V par un filtre passe-bande de pulsation caractéristique $\omega_0 = 6\pi \cdot 10^3 \text{ rad/s}$ et de facteur de qualité $Q = 60$. Décrire en justifiant les caractéristiques du signal de sortie. Rappel : On montre que la décomposition en série de Fourier d'une fonction carrée $f(t)$ de période T et d'amplitude A et de valeur moyenne nulle est :

$$f(t) = \frac{4A}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos[(2n+1)\omega t]}{2n+1} = \frac{4A}{\pi} \left(\cos \omega t + \frac{1}{3} \cos 3\omega t + \frac{1}{5} \cos 5\omega t + \dots \right)$$

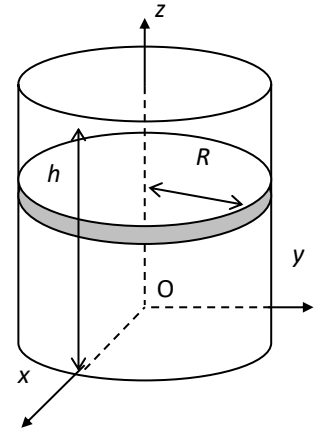
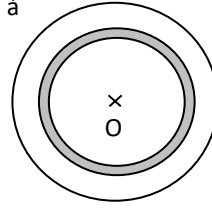
10. ☆☆ On considère un multiplieur analogique de relation $v = v_1 v_2 / E$. Que contient la sortie du multiplieur lorsqu'on lui applique deux sinusoïdes de pulsations ω_1 et ω_2 ? En déduire la valeur moyenne de v , en distinguant $\omega_1 = \omega_2$ et $\omega_1 \neq \omega_2$. Quel dispositif permet d'obtenir cette valeur moyenne ?

11. ☆☆ Etablir la fonctions de transfert du montage ci-contre



12. a. ♥ Faire un schéma du repérage en coordonnées cylindriques. Donner les expressions d'un déplacement élémentaire, du volume élémentaire, Rappel les expressions de la surface latérale d'un cylindre de rayon r et de hauteur h , ainsi que son volume.

b. Donner les expressions des surfaces mésoscopiques correspondant à une couronne dans le plan $z = \text{cte}$ et d'une couronne à $r = \text{cte}$ (remarque : ces deux résultats doivent pouvoir être donnés sans calculs par analyse géométrique, mais la démonstration doit être connue).



13. a. ♥ Faire un schéma du repérage en coordonnées sphériques. Rappel les expressions de la surface et du volume d'une sphère de rayon r .

b. Donner les expressions d'un déplacement élémentaire, du volume élémentaire, ainsi que volume mésoscopique correspondant à une écorce sphérique de rayon r et d'épaisseur dr (remarque : ce résultat doit pouvoir être donné sans calculs par analyse géométrique, mais la démonstration doit être connue).

14. a) ♥ Expression du gradient en coordonnées cartésiennes, dimension

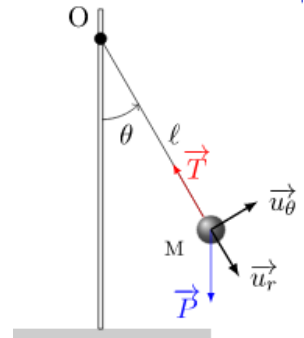
b) Définition et propriétés du gradient

15. a) ♥ Donner sans démonstration les expressions des vecteurs position, déplacement élémentaire, vitesse et accélération dans le cas particuliers des mouvements circulaires puis circulaires uniformes, en rappelant les caractéristiques de ces mouvements.

b) Donner ces expressions dans le cas d'un mouvement quelconque dans une base cylindrique.

16. Un point matériel M de masse m est suspendu à un fil supposé inextensible de longueur L . On suppose que le fil reste toujours tendu. A $t = 0$, le point M est lâché depuis un angle α par rapport à la verticale, avec une vitesse initiale v_0 .

- a) ♥ Etablir l'équation différentielle du mouvement du pendule en exploitant, au choix de l'examineur, la seconde loi de Newton ou le théorème du moment cinétique.
- b) ♥ Donner l'expression de l'énergie mécanique du système en un point quelconque.
- c) ☆ ☆ Etablir l'expression de la tension T du fil. A quelle condition le fil reste-t-il tendu ?



17. ♥ Un étudiant glisse sur une piste de ski depuis une altitude $h = 15 \text{ m}$. Sa vitesse initiale est nulle. On tient compte d'une force de frottement constante F . Déterminer l'expression de la vitesse du skieur en bas de la pente de longueur L en fonction de la force F .

18. ♥ Soit un système M de masse m relié à un ressort vertical de constante de raideur k et de longueur à vide l_0 , se déplaçant sans frottements ; on repère la position du point M à l'aide de l'axe (Oz) descendant où O représente le point d'attache du ressort. Il vérifie l'équation différentielle suivante :

$$m\ddot{z} + k(z - l_0) = mg$$

Résoudre cette équation différentielle après l'avoir mise sous forme canonique pour les conditions initiales suivantes : vitesse initiale v_0 , position initiale z_0 .

19. On considère une personne de masse m voulant faire du saut à l'élastique avec un élastique caractérisé par une constante de raideur k et une longueur à vide l_0 .

a- ♥ Lorsque la personne est suspendue à l'élastique, établir la longueur à l'équilibre de cet élastique à l'aide du PFD.

- b- ♥ Rappel dans le cas général les relations vérifiées par l'énergie potentielle pour un système conservatif à un degré de liberté à l'équilibre.
- c- Etablir l'équation permettant de déterminer la longueur maximale de l'élastique au cours du saut à l'aide d'une méthode énergétique (ne pas la résoudre).

20. ♥ Considérons un oscillateur harmonique amorti en régime libre d'équation différentielle

$$mg - k(z - l_0) - h\dot{z} = m\ddot{z}$$

Discuter et donner les solutions générales à l'équation homogène en fonction de la valeur du facteur de qualité.

21. ♥ Considérons l'équation différentielle : $\ddot{x} + \frac{\omega_0}{Q}\dot{x} + \omega_0^2 x = \omega_0^2 X_0 \cos(\omega t)$. Donner la forme de la solution $x(t)$ en régime sinusoïdal forcé, présenter la grandeur complexe associée $\underline{x}(t)$, et exploiter l'équation différentielle pour établir l'expression de $\underline{x}(t)$ en fonction des grandeurs caractéristiques du système et de l'excitation. Etablir l'expression de l'amplitude ; indiquer comment obtenir la phase à l'origine de la solution.

22. Considérons l'amplitude complexe d'expression : $\underline{X}_M(u) = X_m e^{i\varphi} = \frac{\omega_0^2 X_0}{(-\omega^2 + \frac{\omega_0^2}{Q} + i\omega\omega_0)}$.

- a) Etablir l'expression de l'amplitude X_M en fonction de la pulsation réduite $u = \frac{\omega}{\omega_0}$ et indiquer les caractéristiques de la réponse fréquentielle selon la valeur du facteur de qualité : asymptotes, allure des courbes de réponse X_M .
- b) Existence et caractéristiques de la résonance : donner les résultats.
- c) ☆☆☆ Démontrer les résultats précédents.

23. ☆☆☆ Établir la relation de la statique des fluides dans le seul champ de pesanteur, en admettant que le champ de pression ne dépend que de la coordonnée verticale ascendante z . On étudiera un cylindre de hauteur dz et de surface quelconque S_0 .

■ Questions de cours avec éléments de réponse

24. ❤ Circuit RC série en régime sinusoïdal alimenté par une tension harmonique $e(t) = E \cos(\omega t)$: déterminer $u_C(t)$ sous la forme $u_C = U_{C,m} \cos(\omega t + \varphi)$.

Éléments de réponse : Les impédances $\underline{Z}_R = R$ et $\underline{Z}_C = \frac{1}{jC\omega}$ associées respectivement à R et C sont associées en série et forment un pont diviseur de tension ; on a donc :

$$\underline{u}_s = \underline{u}_C = \frac{\underline{Z}_C}{\underline{Z}_C + \underline{Z}_R} \underline{u}_e = \frac{1/jC\omega}{R + 1/jC\omega} \underline{e} = \frac{1}{1 + jRC\omega} \underline{e}$$

Par définition de la notation complexe, on a

$$U_{C,m} = |\underline{u}_C| = \left| \frac{1}{1 + jRC\omega} \underline{e} \right| = \frac{E}{\sqrt{1 + (RC\omega)^2}}$$

$$\varphi = \arg(\underline{u}_C) = \arg(\underline{e}) - \arg(1 + jRC\omega) = 0 - \arctan(RC\omega)$$

25. On considère un circuit RLC série en régime sinusoïdal forcé, alimenté par une tension sinusoïdale $e(t) = E \cos(\omega t)$.

a) Etablir la fonction de transfert en courant (tension aux bornes de R) : $\underline{H} = \underline{u}_r / \underline{E}$. Rappeler sans démonstration l'expression de la pulsation de résonance ainsi que le lien entre la largeur de la résonance (largeur de la bande passante) et le facteur de qualité.

- b) ☆☆☆ Etablir ces résultats

Éléments de réponse : Dipôles en série formant un pont diviseur de tension :

$$\underline{H} = \frac{\underline{u}_r}{\underline{E}} = \frac{R}{R + jL\omega + \frac{1}{jC\omega}} = \frac{1}{1 + j\frac{1}{R}\left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)}$$

Par définition, il y a résonance en courant lorsque l'amplitude I_m du courant, soit avec $U_{rm} = RI_m$, lorsque U_{rm} admet un maximum pour une pulsation différente de zéro ou l'infini. Ici, on a :

$$U_{rm} = |\underline{u}_r| = \left| \frac{\underline{E}}{1 + j\frac{1}{R}\left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)} \right| = \frac{E}{\sqrt{1 + \frac{1}{R^2}\left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)^2}}$$

qui est maximal pour un dénominateur minimal (numérateur constant), soit pour

$g(\omega) = 1 + 1/R^2 \left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)^2$ minimale. R^2 étant une constante, $g(\omega)$ minimale pour $\left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)^2$ minimale.

Solution évidente : $\left(L\omega_r - \frac{1}{C\omega_r}\right)^2 = 0 \Leftrightarrow \omega_r = \frac{1}{\sqrt{LC}} = \omega_0$: La résonance en intensité a lieu à la pulsation propre de l'oscillateur.

On peut alors montrer : largeur de la bande passante (largeur de la résonance, ou bande passante) :

$\Delta\omega_c = \frac{\omega_0}{Q}$ avec les pulsations de coupure ω_c telles que $I_m(\omega_c) = \frac{I_{m,max}}{\sqrt{2}}$, et Q facteur de qualité du circuit tel que $Q = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}}$.

Démonstration

Les pulsations de coupure $\omega_1 < \omega_2$ sont celles pour lesquelles le gain vaut $\frac{G_{max}}{\sqrt{2}}$. La bande passante est l'intervalle $[\omega_1, \omega_2]$, de largeur $\Delta\omega = \omega_2 - \omega_1$.

La condition $G(x_c) = \frac{1}{\sqrt{2}}$ s'écrit

$$\frac{1}{\sqrt{1 + Q^2 \left(x_c - \frac{1}{x_c}\right)^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow Q^2 \left(x_c - \frac{1}{x_c}\right)^2 = 1 \Leftrightarrow Q \left(x_c - \frac{1}{x_c}\right) = \pm 1.$$

En multipliant par $x_c > 0$, on obtient deux équations du second degré donc 4 solutions :

$$x_c^2 \pm \frac{1}{Q} x_c - 1 = 0, \quad \Delta = \frac{1}{Q^2} + 4 > 0, \quad x_c = \frac{\pm \frac{1}{Q} + \sqrt{\frac{1}{Q^2} + 4}}{2}$$

(on ne retient que la racine positive de chaque équation). D'où les deux solutions

$$x_{c1} = \frac{-\frac{1}{Q} + \sqrt{\frac{1}{Q^2} + 4}}{2} \quad \text{et} \quad x_{c2} = \frac{+\frac{1}{Q} + \sqrt{\frac{1}{Q^2} + 4}}{2}$$

Largeur de la bande passante : obtenue en soustrayant les deux expressions

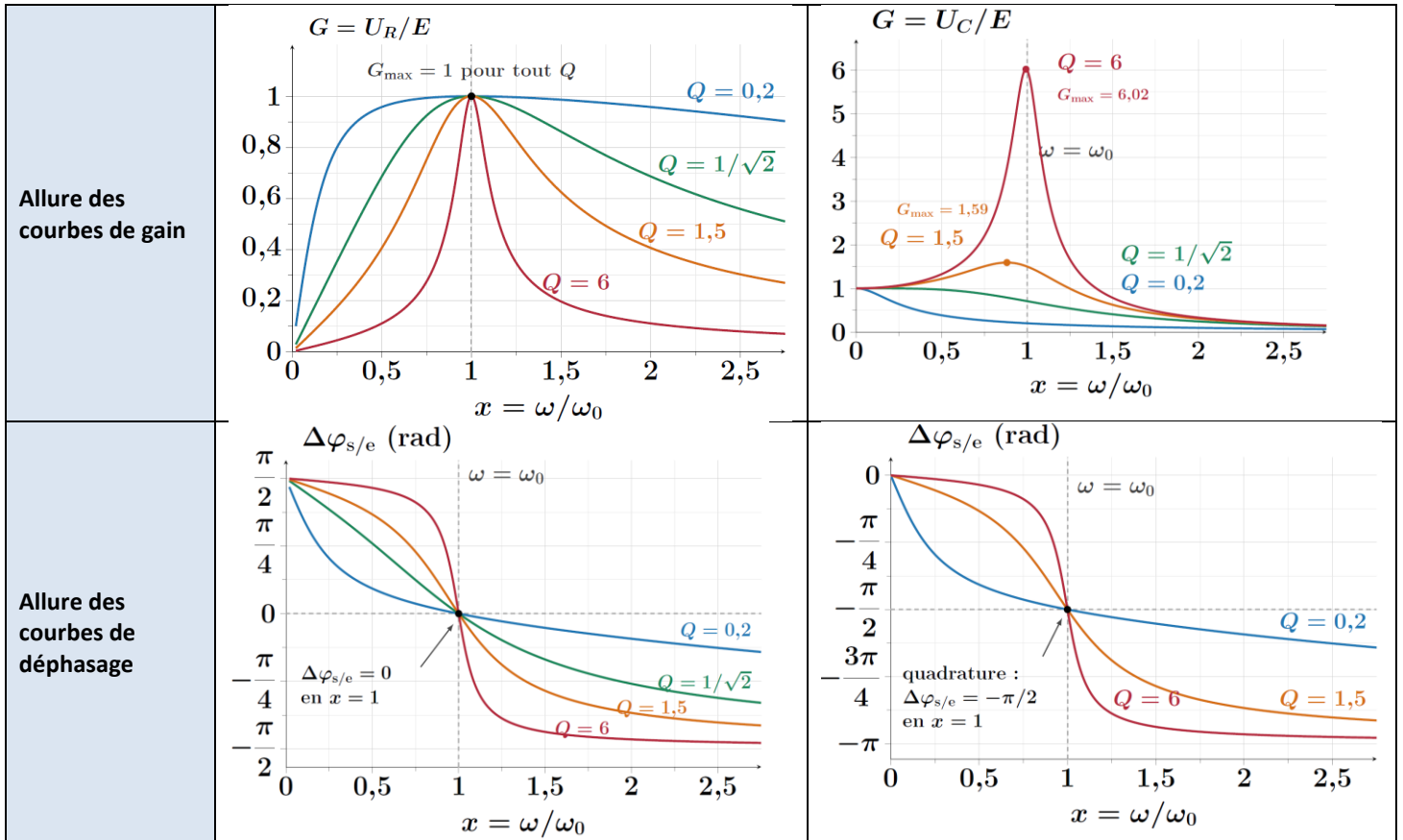
$$x_{c2} - x_{c1} = \Delta x = \frac{1}{2Q} + \frac{1}{2Q} = \frac{1}{Q} \Rightarrow \Delta x = \frac{1}{Q} \Leftrightarrow \Delta\omega = \frac{\omega_0}{Q} \Leftrightarrow \Delta f = f_{c2} - f_{c1} = \frac{f_0}{Q}$$

On peut également obtenir le facteur de qualité Q à partir de la largeur de la bande passante :

$$Q = \frac{f_0}{\Delta f} = \frac{\omega_0}{\Delta\omega}$$

26. ♥ Citer les principales caractéristiques des résonances en tension et en intensité (ou en élongation et en vitesse)

Prototype	en électronique : RLC série en mécanique : masse attachée à un ressort horizontal	
Type de résonance	Résonance en intensité i (ou en tension u_R) Résonance en vitesse	Résonance en tension u_c Résonance en élongation
Existence de la résonance	Toujours	Soumise à condition : si $Q > 1/\sqrt{2}$
Pulsation de résonance	ω_0	$\omega_{\text{res}} \leq \omega_0$ Pour $Q \gg 1$: $\omega_{\text{res}} \approx \omega_0$
Largeur de la bande passante	$\Delta\omega = \frac{\omega_0}{Q}$	Pour $Q \gg 1$: $\Delta\omega \approx \frac{\omega_0}{Q}$
Gain à la résonance	$G = 1$	Pour $Q \gg 1$: $G \approx Q$
Déphasage à la résonance	$\Delta\varphi_{s/e} = 0$ entrée et sortie en phase	$\Delta\varphi_{s/e} = -\pi/2$ entrée et sortie en quadrature
Repérage expérimental de la résonance	A l'oscilloscope, en mode XY, l'ellipse s'aplatit pour devenir une droite (déphasage nul)	Peu utilisé



27. On étudie un circuit RC série alimenté par une source idéale de tension délivrant une tension sinusoïdale $e(t) = E \cos(\omega t)$, en considérant la tension de sortie $s(t)$ aux bornes du condensateur.

- d) ♥ Faire une analyse qualitative de la nature du filtre puis établir la fonction de transfert.
- e) ♥ Etablir les expressions des asymptotes du diagramme de Bode en gain et représenter leur allure.
- f) Déterminer l'expression de la pulsation de coupure

Éléments de réponse : On note u_e la tension d'entrée. Le filtre passe-bas est obtenu en considérant une sortie $\underline{u_s} = \underline{u_C}$ aux bornes de C.

Analyse qualitative : Basses fréquences : C se comporte comme un interrupteur ouvert d'où $i \rightarrow 0$ soit $u_R = Ri \rightarrow 0$; loi des mailles : $u_C \rightarrow u_e$; hautes fréquences : C se comporte comme un interrupteur fermé (fil) d'où $u_C \rightarrow 0$: comportement passe-bas aux bornes de C.

Les impédances associées à R et C sont en série et forment un pont diviseur de tension :

$$\underline{u_s} = \underline{u_C} = \frac{Z_C}{Z_C + Z_R} \underline{u_e} \quad \Leftrightarrow \quad \underline{H} = \frac{\underline{u_C}}{\underline{u_e}} = \frac{1/jC\omega}{R + 1/jC\omega} = \frac{1}{1 + jRC\omega} = \frac{1}{1 + jx}$$

En posant $RC\omega = \frac{\omega}{\omega_0} = x$

Asymptotes dans le diagramme de Bode :

Aux basses fréquences, $\omega \rightarrow 0$ donc $x \rightarrow 0$

fonction de transfert équivalente : $\underline{H}_{BF} \simeq 1$ soit $G_{BF} = |\underline{H}_{BF}| = 1$ et $G_{dB,BF} = 20 \log(G_{BF}) = 0$

Asymptote horizontale aux basses fréquences.

Aux hautes fréquences, $x \rightarrow +\infty$, fonction de transfert équivalente :

$$\underline{H}_{HF} \simeq \frac{1}{jx} \text{ soit } G_{HF} = |\underline{H}_{HF}| = \frac{1}{x} \text{ et } G_{dB,HF} = 20 \log(G_{HF}) = -20 \log(x)$$

Asymptote à -20 dB par décade aux hautes fréquences

Par définition, à la pulsation de coupure, $|\underline{H}(x_c)| = \frac{H_0}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$ avec $|\underline{H}(x_c)| = 1/\sqrt{1+x_c^2}$ soit $x_c = 1$ et $\omega_c = \omega_0$

28. On considère un filtre RLC série alimenté par un générateur de tension sinusoïdale, et on étudie la tension de sortie aux bornes de la résistance.

- f) ♥ Déterminer par une analyse qualitative la nature du filtre
- g) ♥ Montrer que la fonction de transfert s'écrit :
- h) $\underline{H} = \frac{1}{1+jQ\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)}$
- i) ♥ Tracer en justifiant le diagramme de Bode asymptotique en gain.
- j) ☆ Tracer l'allure du diagramme réel pour quelques valeurs du facteur de qualité.

Éléments de réponse :

a) Aux BF, C se comporte comme un interrupteur ouvert, aux HF, c'est L. Dans les deux cas, pas d'intensité dans le circuit donc tension aux bornes de R nulle. Filtre probable : passe-bande.

b) En posant $\frac{\omega}{\omega_0} = x$

$$\underline{H} = \frac{1}{1+jQ\left(x - \frac{1}{x}\right)}$$

$$G = |\underline{H}| = \frac{1}{\sqrt{1+Q^2\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)^2}} = \frac{1}{\sqrt{1+Q^2\left(x - \frac{1}{x}\right)^2}}$$

Asymptotes dans le diagramme de Bode :

Aux basses fréquences, $x \rightarrow 0$ soit $\underline{H}_{BF} = \frac{jx}{Q}$

$$G_{BF} = |\underline{H}_{BF}| = \frac{x}{Q} \text{ et } G_{dB,BF} = 20 \log(G_{BF}) = 20 \log(x) - 20 \log(Q)$$

Asymptote à +20 dB par décade aux basses fréquences.

Aux hautes fréquences, $x \rightarrow +\infty$, soit $\underline{H}_{BF} = \frac{1}{jQx}$ et $G_{HF} = |\underline{H}_{HF}| = \frac{1}{Qx}$ et

$$G_{dB,HF} = 20 \log(G_{HF}) = -20 \log(x) - 20 \log(Q)$$

Asymptote à -20 dB par décade aux hautes fréquences

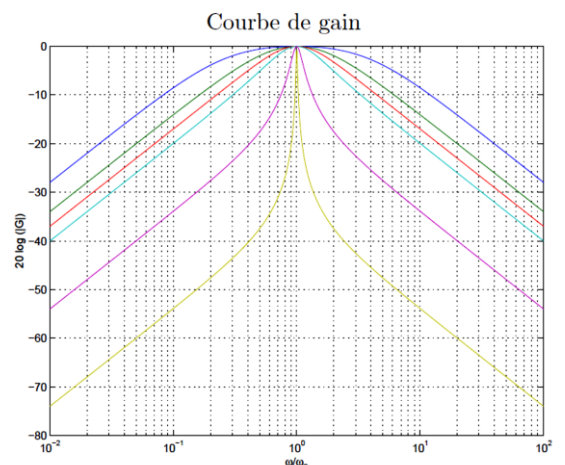
Intersection des asymptotes : $20 \log(x) - 20 \log(Q) = -20 \log(x) - 20 \log(Q) \Leftrightarrow x = 1$ avec

$$G_{dB,HF}(x=1) = G_{dB,BF}(x=1) = -20 \log(Q)$$

Plus le facteur de qualité est élevé, plus l'intersection des asymptotes se fait à une valeur basse du gain.

Il est nécessaire pour le tracé du diagramme réel de calculer la valeur exacte du gain en $\omega = \omega_0$ soit en $x = 1$, donc d'avoir l'expression exacte de ce gain.

$$\forall Q, G(x=1) = 1$$



29. On applique le signal $e(t) = 3 + 10\cos(5t) + 5\sin(70t)$ représenté ci-dessous à l'entrée d'un filtre passe-bas et d'un filtre passe-haut de fréquences de coupure assez proches.

- Associer chaque spectre aux signaux représentés et identifier la sortie de chaque filtre.
- Estimer le gain statique (ou gain à fréquence nulle) du filtre passe-bas.
- Quel filtre faudrait-il utiliser pour obtenir la valeur moyenne du signal d'entrée ?

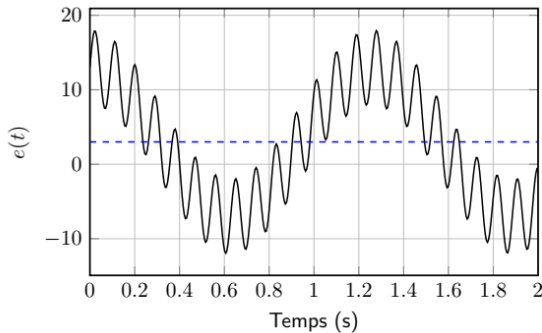


figure 1

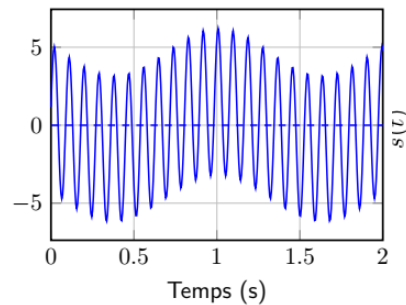


figure 2

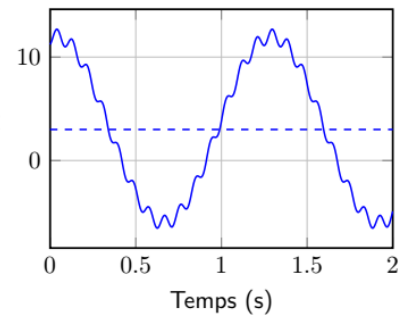
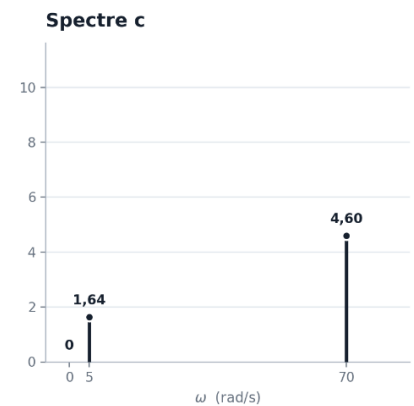
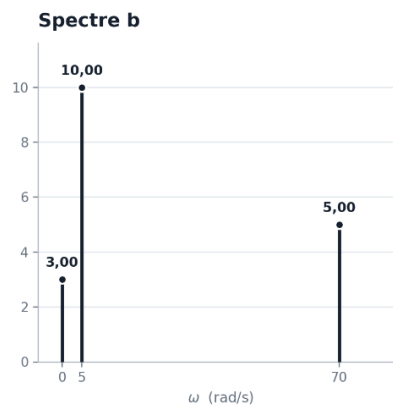
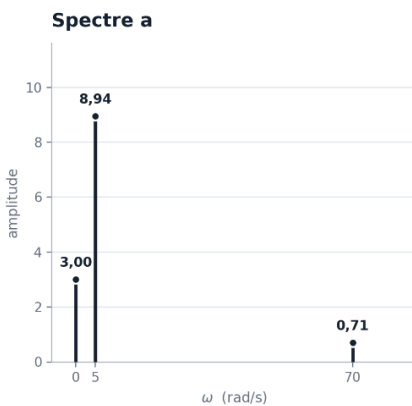


figure 3



Signaux de sortie : des filtres **a** (en gris) et **b** (en noir) ; filtre **c** ; filtre **d**

Éléments de réponse :

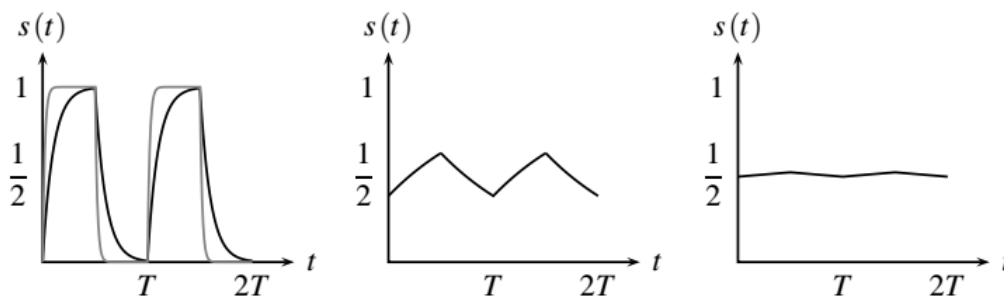
- a) Le signal de la figure 1 correspond au signal d'entrée et au spectre b, non filtré

Le signal de la figure 3 correspond à un filtrage passe-bas (composante continue conservée, variations rapides atténuées) ; il a pour spectre le spectre a : amplitude à la fréquence nulle, associée à la valeur moyenne du signal, non atténuée, avec un filtrage important de la composante HF (rang 14).

Le signal 2 correspond au filtrage passe haut et au spectre c, la composante continue est supprimée, la composante fondamentale plus atténuée que la composante de rang 14 qui est quasi totalement transmise (gain proche de 1).

- Le signal en sortie du filtre passe-bas possède une moyenne d'environ 3, tout comme le signal d'entrée. Le gain statique du filtre est quasiment unitaire.
- Filtre moyenneur : Filtre passe-bas de pulsation de coupure très basse (ici par exemple $\omega_c = 0,1 \text{ rad.s}^{-1}$, en tous cas suffisamment inférieure à $\omega_1 = 5 \text{ rad.s}^{-1}$).

30. ♥ On applique un signal carré de période $T = 2 \text{ ms}$ en entrée de 4 filtres passe-bas du premier ordre caractérisés par leurs pulsations propres ω_i , telles que $\omega_1 = \pi \cdot 10^3 \text{ rad/s}$, $\omega_2 = \pi \cdot 10^4 \text{ rad/s}$, $\omega_3 = \pi \cdot 10^2 \text{ rad/s}$ et $\omega_4 = 20\pi \text{ rad/s}$. Associer aux signaux de sortie ci-dessous des filtres a, b, c et d les pulsations propres ω_i associées. Interpréter la forme de ces signaux. Quel peut-être l'intérêt pratique du filtre à $\omega_4 = 20\pi \text{ rad/s}$?



- 1) Le signal de gauche résulte d'un filtrage passe-bas avec $T \gg \tau$, $f \ll f_c = 1/\tau$, le signal est peu déformé mais lissé au niveau des discontinuités. En effet, la composante continue et la forme globale sont conservées car un grand nombre d'harmoniques sont transmises. En revanche, les harmoniques de hautes fréquences nécessaires à la description des discontinuités du signal (ce sont elles qui varient rapidement) sont coupées et le signal s'en trouve lissé. Le signal varie lentement devant le temps de réaction du système, le système a « le temps » de répondre, le signal « traverse » le filtre sans trop de modifications.

Plus T est petit devant τ , plus les composantes spectrales (hormis la composante continue) se trouvent dans la bande coupée d'ordre 1, donc intégrées. Le signal conserve sa composante continue, sa partie alternative est de faible amplitude et de forme triangulaire (intégration du carré).

Filtre à $\omega_2 = \pi \cdot 10^4 \text{ rad/s}$: la grande majorité du spectre de $e(t)$ se trouve dans la bande passante du filtre : signal quasi rectangle, seules les discontinuités les plus importantes caractérisées par les harmoniques de fréquences très élevées sont atténuées : filtre a.

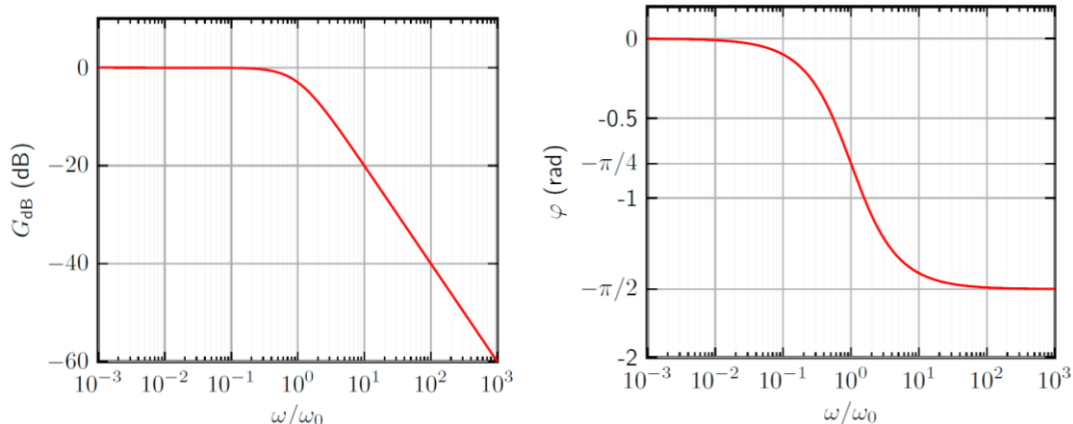
Filtre à $\omega_4 = 20\pi \text{ rad/s}$: en dehors de la composante continue, l'ensemble du spectre se trouve largement hors de la bande-passante : quasi seule la valeur moyenne est transmise, signal de sortie quasi constant, tel que $s(t) \approx \langle e(t) \rangle = E_0$: filtre d. (Le signal d'entrée varie trop vite par rapport au temps de réponse du système ($f \gg f_c = 1/(2\pi\tau)$).)

Filtre à $\omega_3 = \pi \cdot 10^2 \text{ rad/s}$: proche du filtre d, donc filtre c. L'ensemble du spectre se trouve également hors de la bande passante, au niveau de l'asymptote à -20 dB : comportement intégrateur, cohérent avec le signal triangulaire observé, qui correspond bien à l'intégrale du signal rectangle, avec une atténuation de l'amplitude (mais moindre que celle du filtre d).

Filtre à $\omega_1 = \pi \cdot 10^3 \text{ rad/s}$: proche du filtre a, donc filtre b.

Filtre à ω_4 : filtre moyenneur

31. Considérons le filtre dont le diagramme de Bode est donné ci-dessous.



- f) Identifier la nature et l'ordre du filtre.
- g) On envoie en entrée du filtre le signal $e(t) = E_1 \cos(\omega_1 t) + E_2 \cos(\omega_2 t) + E_3 \cos(\omega_3 t)$ avec $\omega_1 = \omega_0/100$, $\omega_2 = \omega_0$ et $\omega_3 = 100 \omega_0$. Représenter le spectre associé à ce signal. Donner l'expression du signal de sortie.
- h) On envoie en entrée un signal créneau de pulsation $\omega_0/1000$. Prévoir qualitativement l'allure et l'amplitude du signal de sortie.

- i) Même question si le signal a une pulsation $100 \omega_0$.
- j) On considère un signal créneau de fréquence 1 kHz ayant une valeur moyenne non nulle. A quelle composante spectrale correspond cette valeur moyenne ? de quelle manière obtenir cette valeur moyenne seule en sortie d'un filtre ? comment appelle-t-on un filtre permettant de réaliser cette opération ?

Éléments de réponse :

- a) Passe-bas (forme du diagramme de Bode en gain) du premier ordre (pente à -20 dB/décade).
- b) On étudie séparément chaque composante en lisant les valeurs de G_{dB} et φ pour la pulsation de la composante étudiée, avec $G = \frac{S_i}{E_i} = 10^{\frac{G_{dB}}{20}}$ soit $S_i = G E_i = 10^{\frac{G_{dB}}{20}} E_i$

Composante	$\frac{\omega_i}{\omega_0}$	$G_{dB,i}$ (en dB)	$G_i = 10^{\frac{G_{dB,i}}{20}}$	$S_i = G E_i$	φ_i	$s_i(t)$
$\omega_1 = \frac{\omega_0}{100}$	$\frac{\omega_1}{\omega_0} = 10^{-2}$	0	1	E_1	0	$E_1 \cos(\omega_1 t)$
$\omega_2 = \omega_0$	$\frac{\omega_2}{\omega_0} = 1$	-3	$10^{\frac{-3}{20}} = 1/\sqrt{2}$	$\frac{E_2}{\sqrt{2}}$	$-\frac{\pi}{4}$	$\frac{E_2}{\sqrt{2}} \cos\left(\omega_2 t - \frac{\pi}{4}\right)$
$\omega_3 = 100 \omega_0$	$\frac{\omega_3}{\omega_0} = 10^2$	-40	$10^{\frac{-40}{20}} = 10^{-2}$	$\frac{E_3}{100}$	$-\frac{\pi}{2}$	$\frac{E_3}{100} \cos\left(\omega_3 t - \frac{\pi}{2}\right)$

Finalement $s(t) = E_1 \cos(\omega_1 t) + \frac{E_2}{\sqrt{2}} \cos\left(\omega_2 t - \frac{\pi}{4}\right) + \frac{E_3}{100} \cos\left(\omega_3 t - \frac{\pi}{2}\right)$.

- c) pulsation $\omega_0/1000$: domaine des très basses fréquences, le signal n'est presque pas modifié (de même que son amplitude, le gain aux basses fréquences étant de 1) car la très grande majorité de son spectre se trouve dans la bande passante, hormis les fréquences les plus élevées : seules les variations brutales vont donc être atténuées (angles du créneau arrondis)
- d) pulsation $100 \omega_0$: domaine des très hautes fréquences, le signal est très atténué (gain de 10^{-2} pour le fondamental). De plus, il s'agit de la zone où l'asymptote à -20 dB/décade est atteinte : domaine intégrateur. Le signal d'entrée créneaux donne donc un signal de sortie triangulaire.

32. On filtre un signal créneau de période $T = 1 \text{ ms}$, d'amplitude $A = 1 \text{ V}$ et de valeur moyenne 1 V par un filtre passe-bande de pulsation caractéristique $\omega_0 = 6\pi \cdot 10^3 \text{ rad/s}$ et de facteur de qualité $Q = 60$. Décrire en justifiant les caractéristiques du signal de sortie. Rappel : On montre que la décomposition en série de Fourier d'une fonction carrée $f(t)$ de période T et d'amplitude A et de valeur moyenne nulle est :

$$f(t) = \frac{4A}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos[(2n+1)\omega t]}{2n+1} = \frac{4A}{\pi} \left(\cos \omega t + \frac{1}{3} \cos 3\omega t + \frac{1}{5} \cos 5\omega t + \dots \right)$$

Éléments de correction :

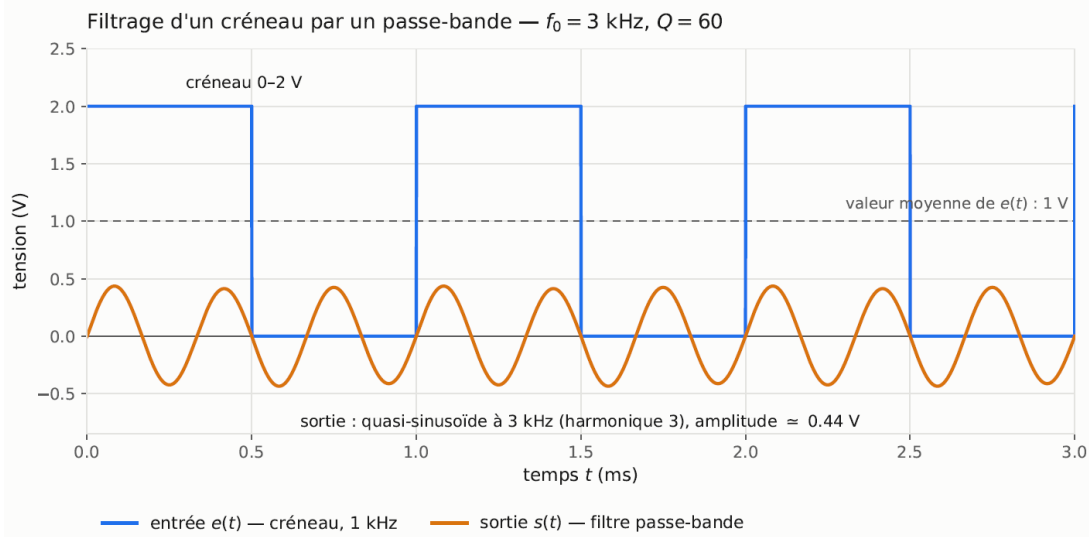
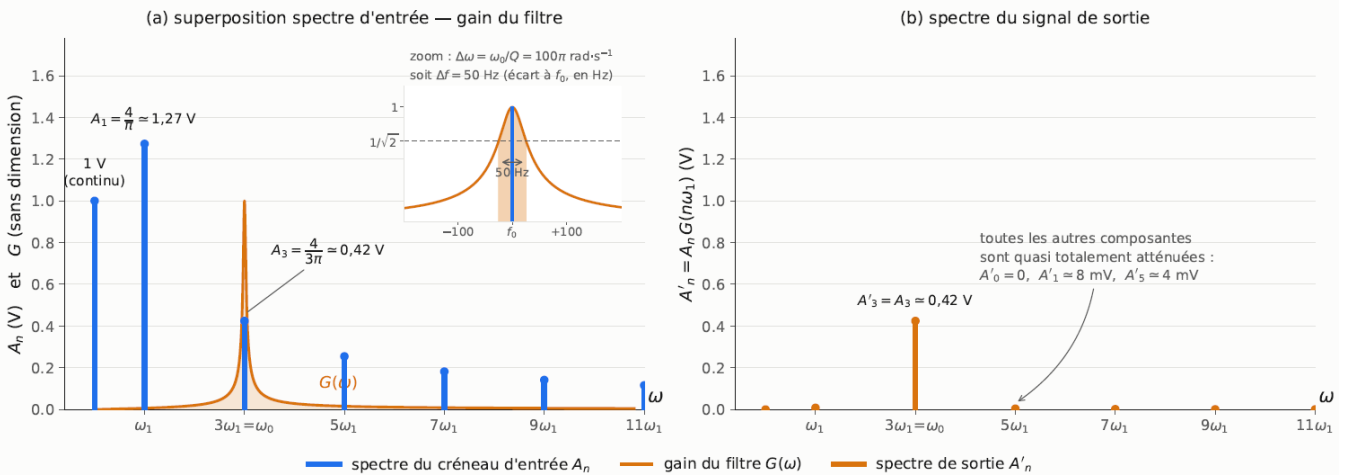
La bande passante contient la pulsation caractéristique ω_0 (facteur de qualité élevé, elle est quasi centrée sur elle).

Largeur de la bande passante : $\Delta\omega = \omega_0/Q = \pi \cdot 10^2 \text{ rad/s}$

Spectre du créneau : Pulsation du fondamental $\omega = 2\pi/T = 2\pi \cdot 10^3 \text{ rad/s}$

On a donc $\omega_0 = 3\omega$: l'harmonique de rang trois se trouve dans la bande passante ; tandis que d'après la largeur de la bande passante, les autres harmoniques se trouvent largement en dehors. Le signal de sortie a donc une unique harmonique : signal sinusoïdal (de valeur moyenne nulle, la composante continue ayant été filtrée), de fréquence trois fois plus élevée que le signal carré d'entrée, avec une amplitude $\frac{4A}{3\pi} \approx 0,4 A$: amplitude nettement plus faible.

Filtrage d'un créneau (1 kHz) par un passe-bande $\omega_0 = 6\pi \cdot 10^3 \text{ rad}\cdot\text{s}^{-1}$, $Q = 60$



33. ☆☆ On considère un multiplieur analogique de relation $v = v_1 v_2 / E$. Que contient la sortie du multiplieur lorsqu'on lui applique deux sinusoïdes de pulsations ω_1 et ω_2 ? En déduire la valeur moyenne de v , en distinguant $\omega_1 = \omega_2$ et $\omega_1 \neq \omega_2$. Quel dispositif permet d'obtenir cette valeur moyenne ?

Le multiplieur transpose les fréquences. En notant $s_m(t)$ le signal en sortie du multiplieur, avec des signaux d'entrée $e_i(t) = V_i \cos(\omega_i t + \varphi_i)$, on obtient :

$$s_m(t) = \frac{V_1 V_2}{E} \cos(\omega_1 t + \varphi_1) \cos(\omega_2 t + \varphi_2)$$

$$= \frac{V_1 V_2}{2E} [\cos((\omega_1 - \omega_2)t + (\varphi_1 - \varphi_2)) + \cos((\omega_1 + \omega_2)t + (\varphi_1 + \varphi_2))].$$

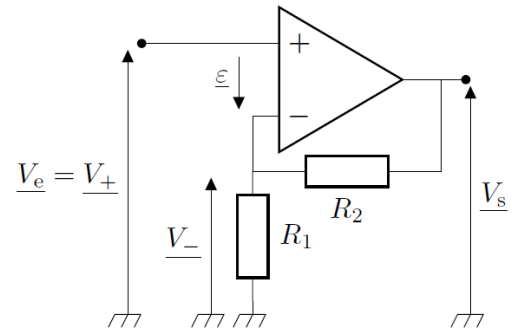
(on exploite la relation trigo : $\cos(a) \cos(b) = 1/2 [\cos(a + b) + \cos(a - b)]$)

$\omega_1 \neq \omega_2$: deux sinusoïdes de fréquences non nulles $\Rightarrow \langle v \rangle = 0$.

$\omega_1 = \omega_2 = \omega_0$ (déphasage $\Delta\varphi = \varphi_1 - \varphi_2$) : le terme de différence devient continu, $\langle v \rangle = \frac{V_1 V_2}{2E} \cos \varphi$.

La valeur moyenne est obtenue à l'aide d'un filtre moyennneur, soit un filtre passe-bas de pulsation de coupure très basse. (principe de la détection synchrone)

34. ☆☆ Etablir la fonctions de transfert du montage ci-contre



Éléments de réponse :

Le circuit présente une boucle de rétroaction négative : régime linéaire avec $V_+ = V_-$ et $i_e^+ = i_e^- = 0$.

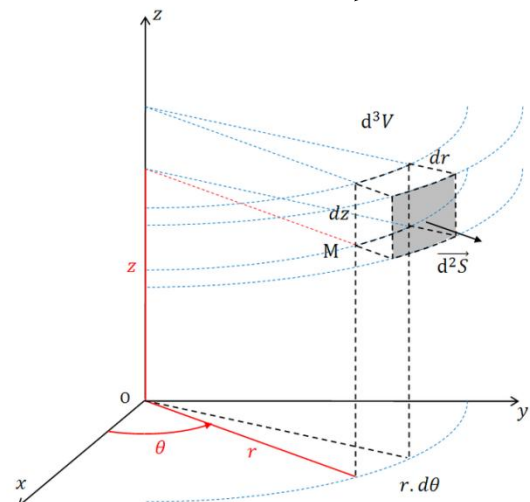
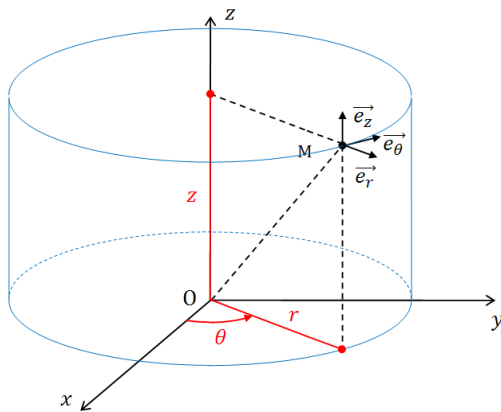
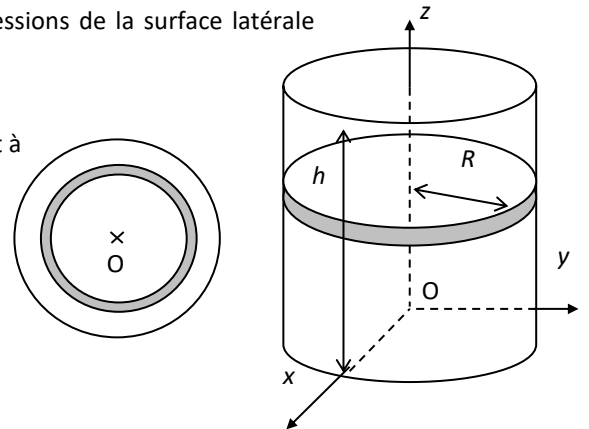
Avec $i_e^- = 0$, R_1 et R_2 sont en série, et forment donc un pont diviseur de tension. Tension aux bornes de l'ensemble : V_s , tension aux bornes de R_1 : V_- , or en régime linéaire $V_+ = V_- = V_e$.

D'où $V_e = \frac{R_1}{R_1 + R_2} V_s$, soit $H = \frac{V_s}{V_e} = 1 + \frac{R_2}{R_1}$.

amplificateur non inverseur

35. a. ♥ Faire un schéma du repérage en coordonnées cylindriques. Donner les expressions d'un déplacement élémentaire, du volume élémentaire, Rappeler les expressions de la surface latérale d'un cylindre de rayon r et de hauteur h , ainsi que son volume.

b. Donner les expressions des surfaces mésoscopiques correspondant à une couronne dans le plan $z = \text{cte}$ et d'une couronne à $r = \text{cte}$ (remarque : ces deux résultats doivent pouvoir être donnés sans calculs par analyse géométrique, mais la démonstration doit être connue).



Déplacement élémentaire : $d\vec{OM} = dr \vec{e}_r + r d\theta \vec{e}_\theta + dz \vec{e}_z$

Volume élémentaire : $d^3V = r d\theta dr dz$

Surface latérale et volume d'un cylindre de rayon r et de hauteur h : $S_{lat} = 2\pi r h$ et $V = \pi r^2 h$

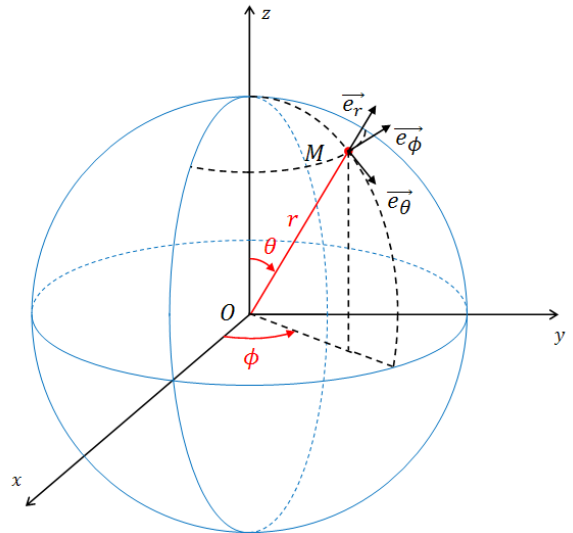
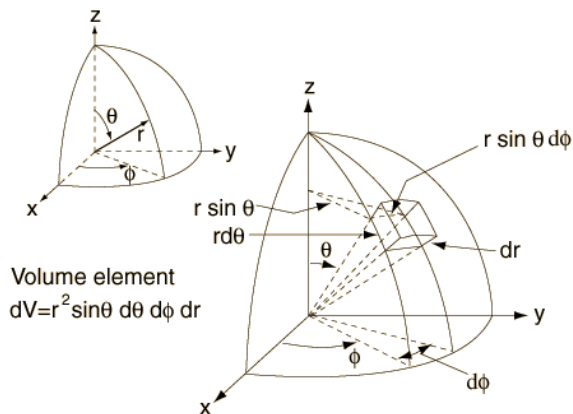
Couronne à $z = \text{cte}$: $dS_z = 2\pi r dr$ (surface élémentaire $d^2S = r d\theta dr$ intégrée sur θ variant de 0 à 2π)

Couronne à $r = \text{cte}$: $dS_r = 2\pi R dz$ (surface élémentaire $d^2S = R d\theta dz$ intégrée sur θ variant de 0 à 2π)

36. a. ♥ Faire un schéma du repérage en coordonnées sphériques. Rappeler les expressions de la surface et du volume d'une sphère de rayon r .

b. Donner les expressions d'un déplacement élémentaire, du volume élémentaire, ainsi que du volume mésoscopique correspondant à une écorce sphérique de rayon r et d'épaisseur dr (remarque : ce résultat doit pouvoir être donné sans calculs par analyse géométrique, mais la démonstration doit être connue).

Surface et volume d'une sphère de rayon r : $S = 4\pi r^2$ et $V = \frac{4}{3}\pi r^3$



Déplacement élémentaire : $d\vec{OM} = dr \vec{e}_r + r d\theta \vec{e}_\theta + r \sin\theta d\phi \vec{e}_\phi$

Volume élémentaire : $d^3V = r^2 \sin\theta d\theta d\phi dr$

Ecorce sphérique de rayon r et d'épaisseur dr :

$$dV = 4\pi r^2 dr$$

37. a) ♥ Expression du gradient en coordonnées cartésiennes, dimension

b) Définition et propriétés du gradient

a) En coordonnées cartésiennes, dans la base $\mathcal{B} (\vec{e}_x ; \vec{e}_y ; \vec{e}_z)$, avec $f(x, y, z)$:

$$\overrightarrow{\text{grad}}(f) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{y,z} \vec{e}_x + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_{z,x} \vec{e}_y + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)_{x,y} \vec{e}_z \quad \text{ou} \quad \overrightarrow{\text{grad}}(f) = \begin{pmatrix} \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{y,z} \\ \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_{z,x} \\ \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)_{x,y} \end{pmatrix}$$

Dimension : $[\overrightarrow{\text{grad}}(f)] = [f] \cdot L^{-1}$.

b) Définition intrinsèque du gradient

$$df = \overrightarrow{\text{grad}}(f) \cdot d\vec{OM} = \overrightarrow{\text{grad}}(f) \cdot d\vec{l}$$

La circulation élémentaire du champ de gradient d'une fonction scalaire f sur un déplacement élémentaire $d\vec{l}$ est égale à la variation df de cette fonction sur ce déplacement

Soit un chemin reliant 2 points A et B, la variation de f entre ces 2 points peut s'écrire :

$$f(B) - f(A) = \Delta f = \int_A^B \vec{\text{grad}} f \cdot d\vec{M}$$

Le gradient est un **opérateur vectoriel linéaire**.

Propriétés du gradient à retenir

- Le gradient caractérise la **non-uniformité d'un champ scalaire**, c'est-à-dire ses variations spatiales.
- Un champ scalaire uniforme a un gradient nul et, réciproquement, un champ scalaire de gradient nul dans une région de l'espace est uniforme dans cette région.
- la direction du gradient est perpendiculaire aux courbes iso- f .
- La **direction du gradient d'un champ est celle le long de laquelle ce champ varie le plus rapidement** (le gradient donne la direction privilégiée de variation de f i.e. la ligne qu'il faut suivre localement pour faire varier f le plus possible).
- Le **sens du gradient** indique la direction à suivre pour augmenter f . Le gradient est donc orienté dans le sens des valeurs croissantes de f (des plus petites valeurs vers les plus grandes).
- La **norme du gradient traduit la rapidité de cette variation spatiale le long de cette direction**. Plus le gradient est important en norme, plus la grandeur f varie de manière importante, puisque $|\vec{\text{grad}} f| \sim \frac{\Delta f}{\Delta x}$.

38. a) ♥ Donner sans démonstration les expressions des vecteurs position, déplacement élémentaire, vitesse et accélération dans le cas particuliers des mouvements circulaires puis circulaires uniformes, en rappelant les caractéristiques de ces mouvements.

b) Donner ces expressions dans le cas d'un mouvement quelconque dans une base cylindrique.

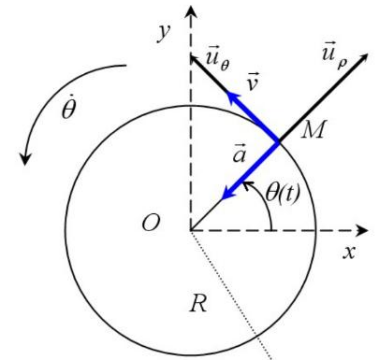
MC (mouvement circulaire) : $r = R = \text{cte}$; $z = 0 = \text{cte}$

$$\vec{v}_R = R \dot{\theta} \vec{u}_\theta = R \omega \vec{u}_\theta$$

$$\vec{a}_R = -R \dot{\theta}^2 \vec{u}_r + R \ddot{\theta} \vec{u}_\theta = -\underbrace{\frac{v^2}{R}}_{\vec{a}_N} \vec{u}_r + \underbrace{R \ddot{\theta} \vec{u}_\theta}_{\vec{a}_T} = -\frac{v^2}{R} \vec{u}_r + R \frac{d\omega}{dt} \vec{u}_\theta$$

MCU (mouvement circulaire uniforme) : de plus, uniforme : $v = R\omega = \text{cte}$; $\dot{\theta} = \omega = \text{cte}$

$$\vec{v}_R = R \dot{\theta} \vec{u}_\theta = R \omega \vec{u}_\theta \quad \vec{a}_R = -R \dot{\theta}^2 \vec{u}_r = -\underbrace{\frac{v^2}{R}}_{\vec{a}_N} \vec{u}_r$$

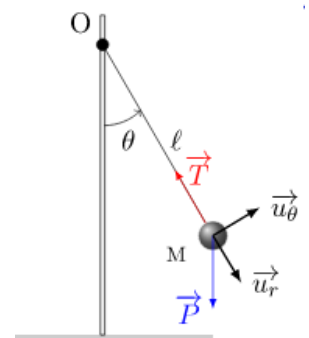


Coordonnées	Vecteur position $\vec{OM}$	Vitesse $\vec{v}_R$	Déplacement élémentaire $d\vec{OM}$	Accélération $\vec{a}_R$
cylindriques	$r \vec{u}_r(\theta) + z \cdot \vec{u}_z$	$\dot{r} \vec{u}_r + r \dot{\theta} \vec{u}_\theta + \dot{z} \vec{u}_z$	$dr \vec{u}_r + r d\theta \vec{u}_\theta + dz \vec{u}_z$	$(\ddot{r} - r \dot{\theta}^2) \vec{u}_r + (2\dot{r}\dot{\theta} + r \ddot{\theta}) \vec{u}_\theta + \ddot{z} \vec{u}_z$

39. Un point matériel M de masse m est suspendu à un fil supposé inextensible de longueur L . On suppose que le fil reste toujours tendu. A $t = 0$, le point M est lâché depuis un angle α par rapport à la verticale, avec une vitesse initiale v_0 .

- d) ♥ Etablir l'équation différentielle du mouvement du pendule en exploitant, au choix de l'examinateur, la seconde loi de Newton ou le théorème du moment cinétique.
- e) ♥ Donner l'expression de l'énergie mécanique du système en un point quelconque.
- f) ☆ ☆ Etablir l'expression de la tension T du fil. A quelle condition le fil reste-t-il tendu ?

Éléments de réponse :



a) Système : point M de masse m, étudié dans le référentiel terrestre supposé galiléen.

Méthode N°1 : PFD :

Etude cinématique : mouvement circulaire, choix des coordonnées polaires

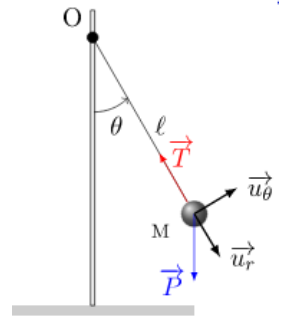
en coordonnées polaires, $\overrightarrow{v(M)}_R = L \dot{\theta} \vec{u}_\theta$ et $\overrightarrow{a(M)}_R = (-L \dot{\theta}^2) \vec{u}_r + (L \ddot{\theta}) \vec{u}_\theta$

Bilan des actions mécaniques extérieures : M subit

- Son poids, vertical descendant : $\vec{P} = m \vec{g} = mg \cos \theta \vec{u}_r - mg \sin \theta \vec{u}_\theta$
- La tension du fil dirigée selon le fil vers O et de norme T inconnue : $\vec{T} = -T \vec{u}_r$

PFD : Selon la 2^{nde} loi de Newton dans un référentiel galiléen : $\vec{P} + \vec{T} = m \overrightarrow{a(M)}_R$

Projection sur	$\vec{P}$	+	$\vec{T}$	=	$m \overrightarrow{a(M)}_R$
$\vec{u}_r$	$mg \cos \theta$	+	$-T$	=	$-mL \dot{\theta}^2$
$\vec{u}_\theta$	$-mg \sin \theta$	+	0	=	$mL \ddot{\theta}$



Equation différentielle du mouvement : correspond à la projection sur $\vec{u}_\theta$:

$$mL \ddot{\theta} = -mg \sin \theta \quad \Leftrightarrow \quad \boxed{L \ddot{\theta} + g \sin \theta = 0}$$

Méthode N°2 : TPM

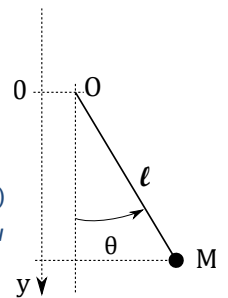
On introduit l'axe (Oy) vertical descendant

Bilan des actions mécaniques extérieures s'exerçant sur le système :

Poids.

Tension du fil,

Théorème du moment cinétique (TMC) par rapport à l'axe Δ de rotation du pendule (axe (Oz) orthogonal au plan du mouvement, fixe dans le référentiel terrestre galiléen correspondant au référentiel d'étude) :



$$\left. \frac{dL_\Delta(M)}{dt} \right|_{\mathcal{R}_g} = \sum_i \mathcal{M}_{\Delta,i}(\vec{F}_i) = \mathcal{M}_\Delta(\vec{P}) + \mathcal{M}_\Delta(\vec{T})$$

Moments de forces :

$\mathcal{M}_\Delta(\vec{T}) = 0$ (Force centrale, la droite d'action passe par l'axe, le bras de levier est nul).

$$\mathcal{M}_\Delta(\vec{P}) = \overrightarrow{\mathcal{M}_0}(\vec{P}) \cdot \vec{u}_z = (\overrightarrow{OM} \wedge \vec{P}) \cdot \vec{u}_z$$

Avec $\vec{P} = m \vec{g} = mg \cos \theta \vec{u}_r - mg \sin \theta \vec{u}_\theta$, $\overrightarrow{OM} \wedge \vec{P} = L \vec{u}_r \wedge (mg \cos \theta \vec{u}_r - mg \sin \theta \vec{u}_\theta) = -mgL \sin \theta \vec{u}_z$

$$\mathcal{M}_\Delta(\vec{P}) = -mgL \sin \theta$$

Aussi, plus simplement : $\mathcal{M}_\Delta(\vec{P}) = \pm P \times \text{bras de levier} \quad \stackrel{\text{rotation par } \vec{P} \text{ dans le sens négatif}}{=} \quad -mg \times \text{bras de levier} = -mgL \sin \theta$

Moment cinétique

$L_\Delta(M) = \sigma_\Delta(M) = \overrightarrow{L_{/0}}(M) \cdot \vec{u}_z = (\overrightarrow{OM} \wedge m \vec{v(M)}) \cdot \vec{u}_z = mL^2 \dot{\theta}$ soit

$$\left. \frac{dL_\Delta(M)}{dt} \right|_{\mathcal{R}_g} = mL^2 \ddot{\theta}$$

$$\text{TMC : } \left. \frac{dL_\Delta(M)}{dt} \right|_{\mathcal{R}_g} = \mathcal{M}_\Delta(\vec{P}) + \mathcal{M}_\Delta(\vec{T}) \quad \Leftrightarrow \quad mL^2 \ddot{\theta} = -mgL \sin \theta \quad \Leftrightarrow \quad \boxed{\ddot{\theta} + \frac{g}{L} \sin \theta = 0}$$

b) *Energie mécanique :*

Bilan des actions mécaniques extérieures s'exerçant sur le système :

Poids, associé à l'énergie potentielle de pesanteur $E_{pp} = -mgy + cte$.

Tension du fil, qui ne travaille pas (toujours perpendiculaire au déplacement)

Le système est donc conservatif.

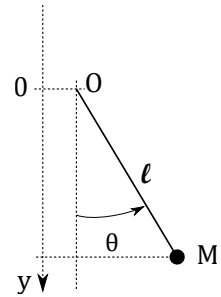
$$y = +\ell \cos \theta$$

D'où : $E_p = -mg\ell \cos \theta + cte$

Energie mécanique en un point quelconque caractérisé par l'angle θ : $E_m = E_c + E_p$;

le point M décrivant une trajectoire circulaire de rayon ℓ , sa vitesse est $v = \ell \dot{\theta}$, d'où : $E_c = \frac{1}{2} m \ell^2 \dot{\theta}^2$

soit finalement $E_m = \frac{1}{2} m \ell^2 \dot{\theta}^2 - mg\ell \cos \theta + cte \quad \stackrel{\text{systeme conservatif}}{=} \quad cte$



c) *D'après la projection du PFD selon $\vec{u}_r$, on a* $mg \cos \theta - T = -mL \dot{\theta}^2 = -m \frac{v^2}{L}$ *Soit*

$$T = mg \cos \theta + \frac{mv^2}{L}$$

En exploitant la conservation de l'énergie :

$$E_m = \frac{1}{2} mv^2 - mg\ell \cos \theta + cte \quad \stackrel{\text{systeme conservatif + C.I.}}{=} \quad \frac{1}{2} mv_0^2 - mg\ell \cos \alpha + cte^*$$

D'où l'expression de v donc celle de T

Fil tendu si $\forall t, T > 0$

40. ♥ Un étudiant glisse sur une piste de ski depuis une altitude $h = 15 \text{ m}$. Sa vitesse initiale est nulle. On tient compte d'une force de frottement constante F . Déterminer l'expression de la vitesse du skieur en bas de la pente de longueur L en fonction de la force F .

Eléments de réponse :

Système : étudiant supposé ponctuel étudié dans le référentiel terrestre supposé galiléen

Bilan des actions mécaniques extérieures :

- poids $\vec{P}$ (dérivant de l'énergie potentielle de pesanteur $E_{pp} = +mgz + cte$, avec z altitude)
- réaction normale du support $\vec{R}_N$
- Force de frottement solide $\vec{F} = -F\vec{u}_x$, non conservative

Étude énergétique :

Théorème de l'énergie mécanique entre le point A : position initiale du skieur en haut de la piste et le point B : skieur en bas de la piste :

$$E_m(B) - E_m(A) = W(\vec{F}_{\text{non conservative}}) = W(\vec{F})$$

Travail de la force de frottement du point A en haut de la piste au point B au bas de la piste : on introduit un axe (Ox) le long de la pente, d'origine le point A, avec $x_B = x_f = L$.

$$W(\vec{F}) = \int_A^B -F\vec{u}_x \cdot d\vec{OM} = \int_A^B -F dx = -Fx_f = -FL$$

Avec $E_m(A) = \frac{1}{2}mv_A^2 + mgz_A + cte \stackrel{\substack{\text{vitesse} \\ \text{initiale} \\ \text{nulle}}}{=} mgz_A + cte$ et

$$E_m(B) = \frac{1}{2}mv_B^2 + mgz_B + cte = \frac{1}{2}mv_f^2 + mgz_B + cte$$

En l'exploitant le Théorème de l'énergie mécanique entre les points A et B :

$$E_m(B) - E_m(A) = -FL \quad \text{avec} \quad z_A - z_B = h : \quad \frac{1}{2}mv_f^2 - mgh = -FL$$

soit

$$v_f = \sqrt{2\left(gh - \frac{FL}{m}\right)}$$

41. ❤️ Soit un système M de masse m relié à un ressort vertical de constante de raideur k et de longueur à vide l_0 , se déplaçant sans frottements ; on repère la position du point M à l'aide de l'axe (Oz) descendant où O représente le point d'attache du ressort. Il vérifie l'équation différentielle suivante :

$$m\ddot{z} + k(z - l_0) = mg$$

Résoudre cette équation différentielle après l'avoir mise sous forme canonique pour les conditions initiales suivantes : vitesse initiale v_0 , position initiale z_0 .

Éléments de réponse : Forme canonique : $\ddot{z} + \frac{k}{m}z = g + \frac{k}{m}l_0 = \frac{k}{m}\left(l_0 + \frac{mg}{k}\right)$ Soit

$$\ddot{z} + \omega_0^2 z = \omega_0^2 l_{\text{eq}}$$

avec $l_{\text{eq}} = l_0 + \frac{mg}{k}$ position d'équilibre (à l'équilibre, $\ddot{z}_{\text{eq}} = 0$) ;

Pulsation propre : $\frac{k}{m} = \omega_0^2$ d'où $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} = \frac{2\pi}{T}$ en rad.s^{-1} [ω_0] = T^{-1}

SGEH (Solution générale à l'équation homogène) :

$$z_H(t) = Z_m \cos(\omega_0 t + \varphi) = A \cos(\omega_0 t) + B \sin(\omega_0 t)$$

SPEC (solution particulière à l'équation complète) : $z_p(t) = K = l_{\text{eq}}$ (le second membre étant constant, on recherche la solution particulière stationnaire (sous forme de constante)).

soit $z(t) = z_H(t) + z_p(t) = l_{\text{eq}} + A \cos(\omega_0 t) + B \sin(\omega_0 t) = l_{\text{eq}} + Z_m \cos(\omega_0 t + \varphi)$

$$\dot{z}(t) = \frac{dz}{dt} = -A\omega_0 \sin(\omega_0 t) + B\omega_0 \cos(\omega_0 t)$$

CICI : $z(t_0 = 0) \stackrel{\substack{\text{C.I.} \\ \text{énoncé}}}{=} z_0 \stackrel{\substack{\text{formule} \\ \text{à } t=0}}{=} A \cos(\omega_0 t_0) + B \sin(\omega_0 t_0) + l_{\text{eq}} \Rightarrow \boxed{A = z_0 - l_{\text{eq}}}$

$\dot{z}(t_0 = 0) \stackrel{\substack{\text{C.I.} \\ \text{énoncé}}}{=} v_0 \stackrel{\substack{\text{formule} \\ \text{à } t=0}}{=} -A\omega_0 \sin(\omega_0 t_0) + B\omega_0 \cos(\omega_0 t_0) \Rightarrow \boxed{B = \frac{v_0}{\omega_0}}$

$$z(t) = (z_0 - l_{\text{eq}}) \cos(\omega_0 t) + \frac{v_0}{\omega_0} \sin(\omega_0 t) + l_{\text{eq}}$$

42. On considère une personne de masse m voulant faire du saut à l'élastique avec un élastique caractérisé par une constante de raideur k et une longueur à vide ℓ_0 .

- d- ❤️ Lorsque la personne est suspendue à l'élastique, établir la longueur à l'équilibre de cet élastique à l'aide du PFD.
- e- ❤️ Rappeler dans le cas général les relations vérifiées par l'énergie potentielle pour un système conservatif à un degré de liberté à l'équilibre.
- f- Établir l'équation permettant de déterminer la longueur maximale de l'élastique au cours du saut à l'aide d'une méthode énergétique (ne pas la résoudre).

a. Axe (Oz) vertical descendant, origine au niveau du point A sur le pont. Origine des E_p de pesanteur en $z = 0$.

Système : sauteur, considéré comme un point matériel de masse m

Référentiel : terrestre, supposé galiléen

Base : axe Oz vertical descendant

Phase 1 : poids $\vec{P} = m\vec{g} = mg\vec{u}_z$,

Phase 2 : se rajoute la force de rappel élastique $\vec{F} = -k(l - l_0)\vec{u}_{ext} = -k(l - l_0)\vec{u}_z$

A l'équilibre, $\sum \vec{F} = \vec{0}$; projection sur $\vec{u}_z$:

$$mg - k(l_{eq} - l_0) = 0 \quad l_{eq} = l_0 + \frac{mg}{k}$$

b. Pour une force conservative, $\vec{F} = -\overrightarrow{\text{grad}}(E_p)$ ou $\delta W(\vec{F}) = -dE_p$

Lien entre équilibre et énergie potentielle pour un point matériel repéré par un paramètre x unique,

Position d'**équilibre** : correspond à un **extremum de l'énergie potentielle** soit $\left(\frac{dE_p}{dx}\right)_{x_{eq}} = 0$

Position d'**équilibre stable** : **minimum de l'énergie potentielle** soit $\left(\frac{d^2E_p}{dx^2}\right)_{x_{eq}} > 0$

Position d'**équilibre instable** : **maximum de l'énergie potentielle** soit $\left(\frac{d^2E_p}{dx^2}\right)_{x_{eq}} < 0$

Graphiquement : Les positions d'équilibre sont associées localement à des puits (minimum local) ou des barrières (maximum local) de potentiel

c. Les deux forces dérivent d'une énergie potentielle, le système est conservatif :

Phase 1 : poids $\vec{P} = m\vec{g} = mg\vec{u}_z$, dérive d'une $E_p = -m g z + cte = -mgz$

Phase 2 : se rajoute la force de rappel élastique $\vec{F} = -k(l - l_0)\vec{u}_{ext} = -k(l - l_0)\vec{u}_z$, dérive d'une $E_p = \frac{1}{2} k(l - l_0)^2$

Conservation de l'énergie mécanique : $E_m(z = 0) = E_m(z = L_{max})$

$$0 = \frac{1}{2} m v_{L_{max}}^2 - mgz_{L_{max}} + \frac{1}{2} k (z_{L_{max}} - l_0)^2 \text{ or } v_{L_{max}} = 0 \text{ et } z_{L_{max}} = L$$

$$0 = -mgL + \frac{1}{2} k (L - l_0)^2$$

On obtient une équation du deuxième degré en L .

43. ♥ Considérons un oscillateur harmonique amorti en régime libre d'équation différentielle

$$mg - k(z - l_0) - h\dot{z} = m\ddot{z}$$

Discuter et donner les solutions générales à l'équation homogène en fonction de la valeur du facteur de qualité.

Equations différentielles	Equations caractéristiques	Discriminant
$m\ddot{z} + h\dot{z} + kz = kl_0 - mg$ $\frac{d^2z(t)}{dt^2} + \frac{\omega_0}{Q} \frac{dz(t)}{dt} + \omega_0^2 z(t) = \omega_0^2 z_e(t)$	$mr^2 + hr + k = 0$ $r^2 + \frac{\omega_0}{Q} r + \omega_0^2 = 0$	$\Delta = h^2 - 4km$ $\Delta = \frac{\omega_0^2}{Q^2} - 4\omega_0^2$

pulsation propre : $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$ en rad.s^{-1} $[\omega_0] = T^{-1}$

facteur de qualité de l'oscillateur : $Q = \frac{1}{h} \sqrt{km}$ sans unité ; $[Q] = 1$.

Solutions générales à l'équation homogène, dont la forme dépend de la valeur du facteur de qualité

	REGIME APERIODIQUE	REGIME CRITIQUE	REGIME PSEUDO-PERIODIQUE
Conditions	$\Delta > 0 \Leftrightarrow Q < \frac{1}{2}$ $\Leftrightarrow h^2 > 4km$	$\Delta = 0 \Leftrightarrow Q = \frac{1}{2}$ $\Leftrightarrow h^2 = 4km$	$\Delta < 0 \Leftrightarrow Q > \frac{1}{2}$ $\Leftrightarrow h^2 < 4km$
	$h^2 > 4km$: cas de $h^2 = 9km$	$h^2 = 4km$	$h^2 < 4km$: cas de $h = 0$, $h^2 = \frac{km}{16}$
Amortissement	Amortissement élevé	Amortissement critique	Amortissement faible
Solutions de l'équation caractéristique	Deux racines réelles r_1 et r_2 : $r_1, r_2 = -\lambda \pm \Omega$	Une racine double r_0 : $r_0 = -\omega_0$	Deux racines complexes conjuguées $r_1, r_2 = -\lambda \pm j\Omega$ avec Ω valeur absolue de la partie imaginaire : pseudo pulsation $-\lambda$: partie réelle
Forme générale des solutions homogènes	$x_H(t) = \mu_1 \exp(r_1 t) + \mu_2 \exp(r_2 t)$	$x_H(t) = (\mu_1 + \mu_2 t) \exp(r_0 t)$	$x_H(t) = e^{-\lambda t} (A \cos(\Omega t) + B \sin(\Omega t))$ $x_H(t) = D e^{-\lambda t} \cos(\Omega t + \varphi)$

44. ♥ Considérons l'équation différentielle : $\ddot{x} + \frac{\omega_0}{Q} \dot{x} + \omega_0^2 x = \omega_0^2 X_0 \cos(\omega t)$. Donner la forme de la solution $x(t)$ en régime sinusoïdal forcé, présenter la grandeur complexe associée $\underline{x}(t)$, et exploiter l'équation différentielle pour établir l'expression de $\underline{x}(t)$ en fonction des grandeurs caractéristiques du système et de l'excitation. Etablir l'expression de l'amplitude ; indiquer comment obtenir la phase à l'origine de la solution.

Éléments de réponse : En régime sinusoïdal forcé, réponse $x(t)$ de la forme $x(t) = X_m \cos(\omega t + \varphi)$

On pose $\underline{x}(t) = X_m e^{i(\omega t + \varphi)} = X_m e^{i\varphi} e^{i\omega t}$, on a alors

$$\dot{\underline{x}}(t) = i\omega \underline{x}(t) \text{ donc } \ddot{\underline{x}}(t) = (i\omega)^2 \underline{x}(t) = -\omega^2 \underline{x}(t)$$

A partir de l'équation différentielle

$$\ddot{\underline{x}} + \frac{\omega_0}{Q} \dot{\underline{x}} + \omega_0^2 \underline{x} = \omega_0^2 X_0 e^{i\omega t} = -\omega^2 \underline{x}(t) + \frac{\omega_0}{Q} \times i\omega \underline{x}(t) + \omega_0^2 \underline{x} = \left(-\omega^2 + \frac{\omega_0}{Q} \times i\omega + \omega_0^2 \right) \underline{x} \text{ soit}$$

$$\left(-\omega^2 + \frac{\omega_0}{Q} \times i\omega + \omega_0^2 \right) X_m e^{i\varphi} e^{i\omega t} = \omega_0^2 X_0 e^{i\omega t}$$

$$\underline{X}_m = X_m e^{i\varphi} = \frac{\omega_0^2 X_0}{(-\omega^2 + \frac{\omega_0}{Q} i\omega + \omega_0^2)} \text{ d'où}$$

$$X_m = |\underline{X}_m e^{i\varphi}| = \left| \frac{\omega_0^2 X_0}{(-\omega^2 + \frac{\omega_0}{Q} i\omega + \omega_0^2)} \right| = \frac{\omega_0^2 X_0}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \left(\frac{\omega_0}{Q} \omega\right)^2}} \quad \text{Arg}(\underline{X}_m) = \varphi$$

45. Considérons l'amplitude complexe d'expression : $\underline{X}_M(u) = X_m e^{i\varphi} = \frac{\omega_0^2 X_0}{(-\omega^2 + \frac{\omega_0}{Q} i\omega + \omega_0^2)}$.

- a) Etablir l'expression de l'amplitude X_M en fonction de la pulsation réduite $u = \frac{\omega}{\omega_0}$ et indiquer les caractéristiques de la réponse fréquentielle selon la valeur du facteur de qualité : asymptotes, allure des courbes de réponse X_M .
- b) Existence et caractéristiques de la résonance : donner les résultats.
- c) ☆☆☆ Démontrer les résultats précédents.

Éléments de réponse : $\underline{X}_M = X_m e^{i\varphi} = \frac{X_0}{1 - u^2 + i\frac{u}{Q}}$

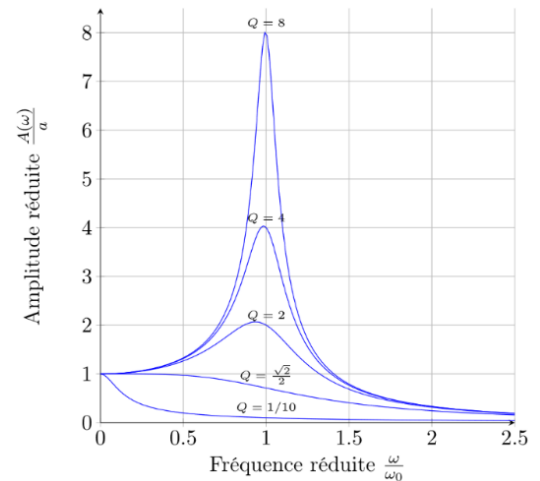
$$X_M = |\underline{X}_M| = \frac{X_0}{\left|1 - u^2 + i\frac{u}{Q}\right|} = \frac{X_0}{\sqrt{(1 - u^2)^2 + \left(\frac{u}{Q}\right)^2}}$$

Allure de la courbe : aux faibles fréquences, $X_M \rightarrow X_0$, aux hautes fréquences : $X_M \rightarrow 0$.

Condition de résonance : C'est une résonance soumise à condition : absence de résonance aux faibles facteurs de qualité ($Q < 1/\sqrt{2}$), et pour les facteurs de qualité élevés ($Q > 5$), la pulsation de résonance est $\omega_r \approx \omega_0$ avec une amplitude à la résonance $X_M(\omega_0) = Q X_0$

Le facteur de qualité donne le gain à la résonance :

$$G(\omega_r \approx \omega_0) = \frac{X_M(\omega_0)}{X_0} = Q$$



46. ☆☆☆ Établir la relation de la statique des fluides dans le seul champ de pesanteur, en admettant que le champ de pression ne dépend que de la coordonnée verticale ascendante z . On étudiera un cylindre de hauteur dz et de surface quelconque S_0 .

Démonstration attendue : bilan 1d sur une tranche mésoscopique de surface S et d'épaisseur dz plutôt que bilan sur une particule fluide qui utilise le gradient.

La tranche de fluide subit

- des forces pressantes latérales : résultante nulle, les forces se compensent deux à deux par symétrie, la pression ne dépendant que de z .*
- la force pressante sur la face du bas : $+P(z)S \vec{e}_z$; sur la face du haut : $-P(z + dz)S \vec{e}_z$*
- son poids $dm\vec{g} = -dm g \vec{e}_z = -\mu S dz g \vec{e}_z$*

A l'équilibre, $-\mu S dz g \vec{e}_z + P(z)S \vec{e}_z - P(z + dz)S \vec{e}_z = \vec{0}$ D'où $dP = P(z + dz) - P(z) = -\mu g dz$