

NOM :

INTERROGATION DE COURS N°4

Note :

MPI – 2026-2027

1. Donner sans démonstration les expressions des vecteurs vitesse et accélération dans le cas particulier des mouvements circulaires puis circulaires uniformes.
2. Donner les expressions des déplacements élémentaires en coordonnées cylindriques et sphériques.
3. Donner les expressions de la surface latérale d'un cylindre de rayon R et de hauteur h , de la surface et du volume d'une sphère de rayon R .
4. Un point matériel M de masse m est suspendu à un fil supposé inextensible de longueur L . On suppose que le fil reste toujours tendu. A $t = 0$, le point M est lâché depuis un angle α par rapport à la verticale, avec une vitesse initiale v_0 .
 - a) Etablir l'équation différentielle du mouvement du pendule en exploitant la seconde loi de Newton.
 - b) Donner l'expression de l'énergie mécanique du système en un point quelconque.
 - c) Définir et calculer le moment du poids par rapport à l'axe de rotation.
5. On considère une personne de masse m voulant faire du saut à l'élastique avec un élastique caractérisé par une constante de raideur k et une longueur à vide ℓ_0 . Lorsque la personne est suspendue à l'élastique, établir la longueur à l'équilibre de cet élastique à l'aide du PFD. Donner l'expression de l'énergie potentielle élastique associée au ressort.
6. Considérons l'équation différentielle : $\ddot{x} + \frac{\omega_0}{Q}\dot{x} + \omega_0^2 x = \omega_0^2 X_0 \cos(\omega t)$. Donner la forme de la solution $x(t)$ en régime sinusoïdal forcé, présenter la grandeur complexe associée $\underline{x}(t)$, et exploiter l'équation différentielle pour déterminer l'amplitude X_m de $x(t)$ en fonction des grandeurs caractéristiques du système et de l'excitation.

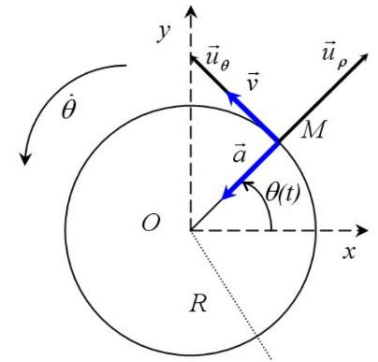
1. $MC : r = R = cte ; z = 0 = cte$

$$\vec{v}_R = R\dot{\theta} \vec{u}_\theta = R\omega \vec{u}_\theta$$

$$\vec{a}_R = -R\dot{\theta}^2 \vec{u}_r + R\ddot{\theta} \vec{u}_\theta = \underbrace{-\frac{v^2}{R} \vec{u}_r}_{\vec{a}_N} + \underbrace{R\ddot{\theta} \vec{u}_\theta}_{\vec{a}_T} = -\frac{v^2}{R} \vec{u}_r + R \frac{d\omega}{dt} \vec{u}_\theta$$

MCU : de plus, uniforme : $v = R\omega = cte ; \dot{\theta} = \omega = cte$

$$\vec{v}_R = R\dot{\theta} \vec{u}_\theta = R\omega \vec{u}_\theta \quad \vec{a}_R = -R\dot{\theta}^2 \vec{u}_r = -\frac{v^2}{R} \vec{u}_r$$



2. Cylindriques : $d\vec{OM} = dr \vec{e}_r + r d\theta \vec{e}_\theta + dz \vec{e}_z$
Sphériques : $d\vec{OM} = dr \vec{e}_r + r d\theta \vec{e}_\theta + r \sin\theta d\varphi \vec{e}_\varphi$

3. Cylindre : $S_{lat} = 2\pi r h$

Sphère : $S = 4\pi r^2$ et $V = \frac{4}{3}\pi r^3$

4. A) Equa. diff avec le PFD

Etude cinématique : mouvement circulaire, choix des coordonnées polaires

en coordonnées polaires, $\vec{v}(M)_R = L\dot{\theta} \vec{u}_\theta$ et $\vec{a}(M)_R = (-L\dot{\theta}^2) \vec{u}_r + (L\ddot{\theta}) \vec{u}_\theta$

Bilan des actions mécaniques extérieures : M subit

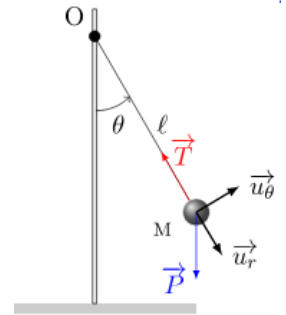
- Son poids, vertical descendant : $\vec{P} = m\vec{g} = mg\cos\theta \vec{u}_r - mg\sin\theta \vec{u}_\theta$
- La tension du fil dirigée selon le fil vers O et de norme T inconnue : $\vec{T} = -T \vec{u}_r$

PFD : Selon la 2^{de} loi de Newton dans un référentiel galiléen : $\vec{P} + \vec{T} = m \vec{a}(M)_R$

Projection sur	$\vec{P}$	+	$\vec{T}$	=	$m \vec{a}(M)_R$
$\vec{u}_r$	$mg\cos\theta$	+	$-T$	=	$-mL\dot{\theta}^2$
$\vec{u}_\theta$	$-mg\sin\theta$	+	0	=	$mL\ddot{\theta}$

Equation différentielle du mouvement : correspond à la projection sur $\vec{u}_\theta$:

$$mL\ddot{\theta} = -mg\sin\theta \Leftrightarrow \boxed{L\ddot{\theta} + g\sin\theta = 0}$$



b) Energie mécanique :

Bilan des actions mécaniques extérieures s'exerçant sur le système :

Poids, associé à l'énergie potentielle de pesanteur $E_p = -mgy + cte$.

Tension du fil, qui ne travaille pas (toujours perpendiculaire au déplacement)

Le système est donc conservatif.

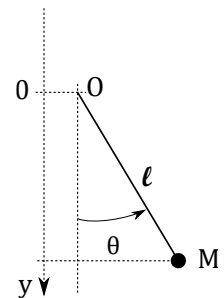
$$y = +l \cos\theta$$

D'où : $E_p = -mg\ell \cos\theta + cte$

Energie mécanique en un point quelconque caractérisé par l'angle θ : $E_m = E_c + E_p$;

le point M décrivant une trajectoire circulaire de rayon l, sa vitesse est $v = l\dot{\theta}$, d'où : $E_c = \frac{1}{2}m\ell^2\dot{\theta}^2$

soit finalement $E_m = \frac{1}{2}m\ell^2\dot{\theta}^2 - mg\ell \cos\theta + cte \stackrel{\text{}}{=} cte$
système conservatif



c) Moment du poids

$$\mathcal{M}_A(\vec{P}) = \vec{M}_O(\vec{P}) \cdot \vec{u}_z = (\vec{OM} \wedge \vec{P}) \cdot \vec{u}_z$$

Avec $\vec{P} = m\vec{g} = mg\cos\theta \vec{u}_r - mg\sin\theta \vec{u}_\theta$, $\vec{OM} \wedge \vec{P} = L\vec{u}_r \wedge (mg\cos\theta \vec{u}_r - mg\sin\theta \vec{u}_\theta) = -mgL\sin\theta \vec{u}_z$

$$\mathcal{M}_A(\vec{P}) = -mgL\sin\theta$$

Aussi, plus simplement : $\mathcal{M}_A(\vec{P}) = \pm P \times \text{bras de levier} \stackrel{\text{rotation par } \vec{P} \text{ dans le sens négatif}}{=} -mg \times \text{bras de levier} = -mgL\sin\theta$

5. Saut à l'élastique

6. Axe (Oz) vertical descendant, origine au niveau du point A sur le pont. Origine des E_p de pesanteur en $z = 0$.

Système : sauteur, considéré comme un point matériel de masse m

Référentiel : terrestre, supposé galiléen

Base : axe Oz vertical descendant

Phase 1 : poids $\vec{P} = m\vec{g} = mg\vec{u}_z$,

Phase 2 : se rajoute la force de rappel élastique $\vec{F} = -k(l - l_0)\vec{u}_{ext} = -k(l - l_0)\vec{u}_z$

A l'équilibre, $\sum \vec{F} = \vec{0}$; projection sur $\vec{u}_z$:

$$mg - k(l_{eq} - l_0) = 0 \quad l_{eq} = l_0 + \frac{mg}{k}$$

$$E_p = \frac{1}{2} k(l - l_0)^2$$